МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«Братский целлюлозно – бумажный колледж»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«Множества, Графы»

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПЕРВОГО КУРСА

Братск, 2024

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Методическое пособие содержит краткие теоретические сведения и упражнения по темам «Множества», «Графы», задачи для самостоятельного решения, вопросы для самоконтроля, тестовые задания

Методическое пособие может быть использовано преподавателями, ведущими дисциплину «Математика» на первом курсе колледжа.

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

« » февраля 2024 г. ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2024 г. №______

Содержание

Введение

С множествами математика, как таковыми, оперирует с начала своего существования. Однако формирование понятия множества начало происходить значительно позже - в 19 веке. Большое влияние на формирование этого понятия оказали работы Больцано, Дедекинда, Дюбуа-Реймона, но эти математики рассматривали лишь конечные множества. Переход к изучению бесконечных множеств и операций над ними представлял принципиальную трудность. Свидетельством последнего являются различные противоречия (антиномии теории множеств), открытые разными учеными к 1900 г. Изучение бесконечных множеств было начато в работах Георга Кантора в 1871-1883 гг., которые встречали активное сопротивление современников. Кантор употреблял вначале термин Inbegrift - “совокупность”, затем Mannigfaltigkeit - “многообразие”, и наконец, Menge - “множество”, в настоящее время сохранилось его обозначение множества M = {m}, которое он ввел в 1895 году. Официальное признание теории множеств прозвучало на Первом международном математическом конгрессе (Цюрих, 1897 г.), где Адамар и Гурвиц указали на важные применения этой теории к анализу. Большое значение в распространении идей теории множеств принадлежит Гильберту. Именно он сказал: “Никто не сможет нас изгнать из рая, созданного Кантором”.

Георг Кантор считается основателем современной теории множеств. В его работах началось построение аксиоматической теории множеств, хотя первая система аксиом теории множеств была предложена позднее в работах Цермело в1904-1908 гг. Эта система аксиом позволила получить важные для математики результаты по теории множеств. Но лишь в 1940 году Гедель построил наиболее полную систему аксиом и доказал ее непротиворечивость.

Понятие множества с современной точки зрения считается интуитивно заданным. Попытки дать определение множества приводят к сведению понятия множества к другим подобного рода понятиям: совокупность, набор и т.д.

1 Множества и операции над ними

1. 1 Основные понятия о множествах

Одним из основных понятий математики является понятие множества, и, как каждое основное понятие, не поддаётся точному определению (например, понятия «точка», «прямая» являются одними из основных понятий геометрии).

Множеством называется собрание, совокупность объектов, объединенных по какому-нибудь общему признаку, свойству. Например: множество студентов данной учебной группы (элементы – студенты); множество планет солнечной системы (элементы – планеты); множество букв русского алфавита (элементы – буквы); множество натуральных чисел (элементы – натуральные числа); множество делителей числа 6 (элементы – числа 1, 2, 3, 6).

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обычной речи. Так, в обычной речи понятие «множество» связывают с большим числом предметов, в математике же этого не требуется. Здесь могут рассматриваться множества, содержащие один объект, много объектов, несколько объектов или не содержащие ни одного объекта. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*.

Множества обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита (без индексов или с индексами). Например: B, C,…,X, Y,…, A_1, B_1,…

Элементы множества обозначаются строчными (малыми) буквами латинского алфавита. Например: b, c,…,x, y,…,a_1, b_1,…

В математике особую роль играют множества, элементами которых являются числа. Такие множества называются *числовыми*. Некоторые числовые множества имеют специальные обозначения, вводимые для удобства пользования.

Например:

N – множество всех натуральных чисел;

Z_c (или Z^+) – множество всех целых неотрицательных чисел;

Z – множество всех целых чисел;

Q – множество всех рациональных чисел;

R – множество всех действительных чисел;

R^+ - множество всех действительных положительных чисел.

По числу элементов, входящих в множество, множества делятся на три класса: конечные, бесконечные, пустые.

Если элементы множества можно сосчитать, то множество является *конечным*.

Пример 1.

Множество гласных букв в слове «математика» состоит из трёх элементов – это буквы «а», «е», «и», причем, гласная считается только один раз, т.е. элементы множества при перечислении не повторяются и множество гласных букв в слове «математика» является конечным.

Если элементы множества сосчитать невозможно, то множество *бесконечное*.

Пример 2.

Множество натуральных чисел бесконечно.

Пример 3.

Множество точек отрезка [0;1] бесконечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Символически оно обозначается знаком $\varnothing$.

Пример 4.

Множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ пустое.

Пример 5.

Множество людей, проживающих на Солнце пустое.

В математике часто приходится определять принадлежность данного элемента конкретному множеству.

Пример 6.

Если говорится, что число 5 натуральное, т.е. утверждается, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел. Символически принадлежность множеству записывается с помощью знака $\in$. В данном случае символическая запись будет такой: $5 \in N$. Читается: «5 принадлежит множеству натуральных чисел».

Число 5,2 не принадлежит множеству натуральных чисел, т.к. не является натуральным числом. Символически отношение «не принадлежит» записывается с помощью знака $\notin$. Таким образом, здесь имеется: $5{,}2 \notin N$. Читается: 5,2 не принадлежит множеству натуральных чисел.

1.2 Способы задания множеств

Множество считается заданным, если имеется способ, позволяющий для любого данного элемента определить, принадлежит он данному множеству или не принадлежит.

Множество можно задать непосредственно, перечислив все его элементы, причём, порядок следования элементов может быть произвольным. В этом случае названия всех элементов множества записываются в строчку, отделяются точкой с запятой и заключаются в фигурные скобки.

Пример 7.

Множество всех гласных букв русского алфавита:

A={а; я; у; ю; э; е; о; ё; и; ы}.

Пример 8.

Множество цифр десятичной системы счисления:

$$B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}.$$

Очевидно, что такой способ задания множеств удобно применять для конечных множеств с небольшим количеством элементов.

Конечные и бесконечные множества могут быть заданы другим способом: указанием *характеристического,* т.е. такого свойства, которым обладает любой элемент данного множества и не обладает ни один элемент, не принадлежащий ему.

Пусть P обозначает некоторое свойство, которым обладают все элементы множества A и не обладают элементы никакого другого множества. Тогда множество всех элементов, обладающих свойством P, обозначаются так:

$A=\{x : x \text{ обладает свойством } P\}=\{x : P(x)\}$.

Свойство P, задающее множество A, есть характеристическое свойство множества A.

Пример 9.

Множество чётных натуральных чисел. Задается с помощью характеристического свойства:

$B=\{x : x \text{ – чётное натуральное число}\}=\{x : x=2k,\ k \in N\}$.

Пример 10.

Множество всех действительных чисел на отрезке от 1 до 3 включительно запишется следующим образом:

$R_{1\text{-}3}=\{y : 1\leq y\leq 3,\ y \in R\}$.

Следует заметить, что в ряде случаев одно и то же множество может быть задано как первым, так и вторым способом.

Пример 11.

Множество натуральных чисел, меньших, чем 10.

Первый способ: $N_{<10}=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Второй способ: $N_{<10}=\{z : z < 10,\ z \in N\}$.

Случается, что одно и то же множество может быть задано с помощью различных характеристических свойств.

Пример 12.

Множество квадратов.

Первый способ: $A=\{x : x \text{ – ромб с прямыми углами}\}$.

Второй способ: $A=\{x : x \text{ – прямоугольник с равными сторонами}\}$.

1.3 Отношения между множествами

Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых кругами Эйлера (или диаграммами Эйлера – Венна).

Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде кругов или любых других замкнутых кривых (фигур), представленных на рисунках 1, 2, 3, 4.

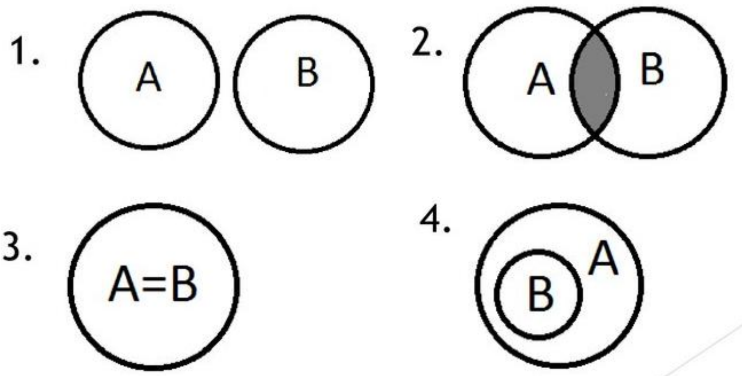


Рисунок 1 – Круги Эйлера

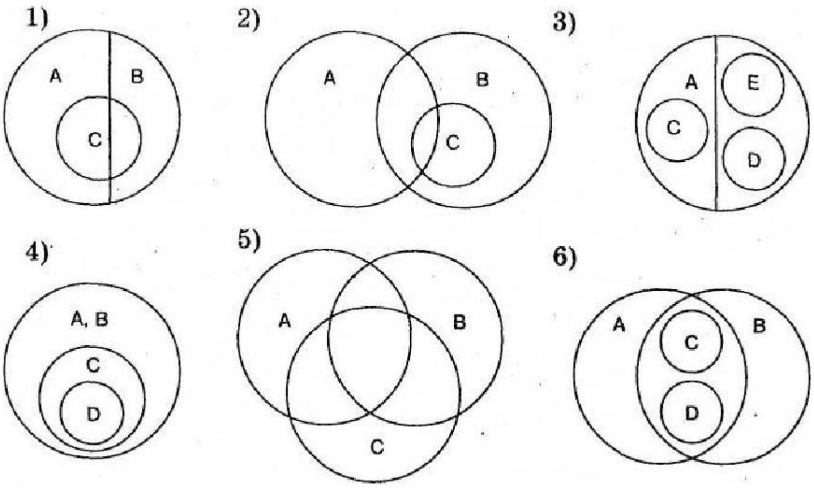


Рисунок 2 – Систематизация по Эйлеру

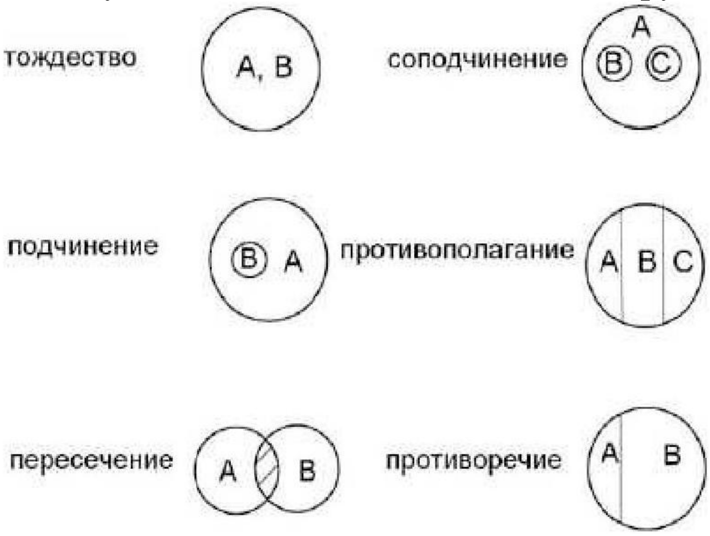


Рисунок 3 – Отношения между множествами

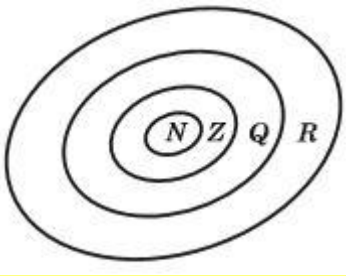


Рисунок 4 – Изображение числовых множеств с помощью кругов Эйлера

Пусть даны два множества: X={a; b; c; d} и Y={l; k; m; b; c}. Множества X и Y содержат некоторые одинаковые элементы, а именно “b” и “c” . В данном случае говорят, что множества X и Y находятся в отношении *пересечения*. Символ пересечения $A\cap B$. Изображение пересечения представлено на рисунке 1 (2).

Пусть даны множества B_1={1; 2; 3} и B_2={4; 5; 6}.

Данные множества различны, у них нет одинаковых элементов. В таком случае говорят, что множества B_1 и B_2 находятся в отношении *непересечения*.

С помощью кругов Эйлера данное отношение показано на рисунке 5.

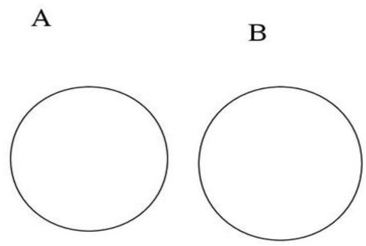


Рисунок 5 – Изображение непересекающихся множеств

Пример 12. 1) даны множества A={a; b; c; d; e} и B={e; f; g}. Тогда $A\cap B=\varnothing$.

2) А – множество двузначных чисел, В - множество трехзначных чисел. Тогда $A\cap B=\varnothing$.

3) А – множество положительных чисел, В - множество отрицательных чисел. Тогда $A\cap B=\varnothing$.

Пусть даны множества A={a; b; c; d} и B={a; b; c}.

Очевидно, что эти множества пересекаются; кроме того, каждый элемент
множества В является в то же время (одновременно) и элементом множества А. Тогда говорят, что множество В *включено* в множество А, или что В есть *подмножество* множества А.

Определение 1.1

Множество В является подмножеством множества А тогда и только тогда, когда каждый элемент множества В является элементом множества А.

Отношение «включено» обозначается знаком □.

Соответственно отношение «включает» обозначается знаком □.

Определение 1.1 символически записывается так: В □ А или А □ В. С помощью кругов Эйлера данное отношение между множествами показано на рисунке 1 (4).

Из определения подмножества следует, что всякое непустое множество А содержит по крайней мере два множества: Ø и А, которые называются *несобственными подмножествами* множества. Все остальные подмножества (если они существуют) называются *собственными подмножествами* множества. То есть, если В – собственное подмножество множества А, то имеем: Ø □ В □ А, или иначе: А □ В □ Ø.

Пример 13. Записать все подмножества множества A={1, 2 ,3 }.

Решение.

$A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, $A_3=\{3\}$, $A_4=\{1, 2\}$, $A_5=\{2, 3\}$, $A_6=\{1,3\}$, $A_7=\{1, 2 ,3 \}$, $A_8 = \varnothing$.

Пример 14. Записать все подмножества множества А={а, б, в, г}.

Решение.

A_1 ={а}, A_2 ={б}, A_3={в}, A_4 ={г}, A_5={а, б}, A_6={а, в}, A_7={а, г},

A_8={ б, в}, A_9={б, г}, A_{10}={ в, г}, A_{11}={а, б, в}, A_{12}={а, б, г}, A_{13}={ б, в, г}, A_{14}={а, б, г}, A_{15}={ а, в, г}, A_{16}={а, б, в}.

Если множество А содержит n элементов, то количество его подмножеств равно 2^n.

Пусть даны множества C={x; y; z}, D={x; y; z}, которые состоят из одних и тех же элементов. В таком случае говорят, что множества C и D равны и пишут C=D.

Определение 1.2

Множества C и D называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Используя понятие «включено», можно дать другое определение равенства множеств.

Определение 1.3

Множества C и D называются *равными* тогда и только тогда, когда множество C является подмножеством множества D, и наоборот.

Символически данное определение можно записать так:

C = D ⇔ C □ D и D □ C, или C = D ⇔ C □ D э D □ C,

где знак ⇔ означает «эквивалентность» (равнозначность).

Иногда вместо записи $A \subset B$ используется также запись $A \subseteq B$.

Сопоставление определение равенства множеств с определением подмножества: если множества A и B равны, то:

1) каждый элемент множества A является элементом множества B, следовательно, A — подмножество B ($A \subseteq B$);

2) каждый элемент множества B является элементом множества A, следовательно, B — подмножество A ($B \subseteq A$). Таким образом,

два множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого.

$$\boxed{A = B \text{ означает то же, что } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A}$$

Рисунок 6 – Символические записи равных множеств

С помощью кругов Эйлера отношение “равенство” показано на рисунке 1 (3).

Пусть U (или T – total) – некоторое фиксированное множество. Рассматриваются только такие множества A, B, C,…, которые являются подмножествами множества U. В этом случае множество U называется универсальным множеством всех множеств A, B, C,…

Примером универсального множества может служить множество действительных чисел, множество людей на планете Земля. Универсальное множество можно изображать прямоугольником с буквой U в правом верхнем углу (рис.6), внутри которого будут размещаться те или иные множества, как представлено на рисунке 7.

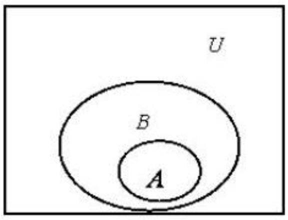


Рисунок 7 – Изображение универсального множества

1.4 Операции над множествами

Далее приведены некоторые операции над множествами.

1.4.2 Пересечение множеств

Пусть даны два множества: A={a; b; c; d} и B ={c; d; e} и пусть имеется новое множество P, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B, т.е. P ={c;d}. Тогда говорят, что множество P является пересечением множеств A и B.

Определение 1.4

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее их всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Символически пересечение множеств A и B обозначается так: $A \cap B$, где символ $\cap$ - знак пересечения множеств. Используя характеристическое свойство, определение 1.4 можно записать следующим образом:

$P=A \cap B= \{ x: x \in A$ и $x \in B\}$ (1)

Таким образом, (1) есть характеристическое свойство пересечения двух множеств.

Если имеется ситуация, когда x не принадлежит пересечению множеств A и B, то это означает, что x не принадлежит или множеству A, или множеству B.

Графическая иллюстрация вариантов пересечения двух множеств приведена на рисунке 8 (пересечение заштриховано).

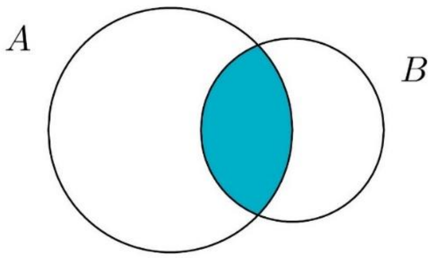


Рисунок 8 - Пересечение двух множеств

Пример 15. Даны множества A = {3,4,6,8,9} и B = {3,5,2,8,1}. Найти пересечение множеств A и B.

Решение.

Элементами, которые принадлежат и множеству А и множеству В, являются числа 3 и 8.

Ответ: $A \cap B = \{3,8\}$.

1.4.3 Объединение множеств

Множества А и В входят в их объединение только один раз. Это вполне соответствует толкованию множества, принятому в математике: ни один элемент не может содержаться в множестве несколько раз.

Определение 1.5

Объединением двух множеств А и В называется такое множество С, которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Символически объединение двух множеств А и В обозначается так:

$A \cup B$, где $\cup$ - символ объединения множеств. Определение 1.5 можно записать с помощью характеристического свойства:

$$C = A \cup B = \{ x: x \in A \text{ или } x \in B\}. \qquad (4)$$

Если же элемент x не принадлежит объединению множеств А и В, то он не принадлежит ни множеству А, ни множеству В.

Графически вариант объединения двух множеств показан на рисунке 9 (объединение заштриховано).

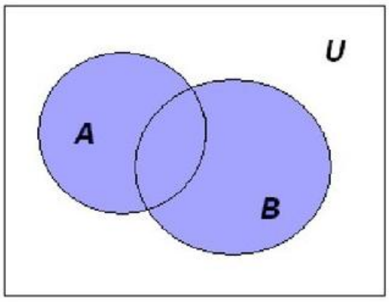


Рисунок 9 - Объединение двух множеств

Из определения объединения множеств очевидны свойства операции объединения двух множеств:

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \varnothing = A, \qquad A \cup U = U. \qquad (7)$$

Замечание1. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несколько множеств, то аналогично тому, как это делалось для двух множеств, определяется их пересечение, т.е. составляется множество, представляющее их общую часть:

$$P = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \in A_i,\ i = 1,2,\ldots n\},$$

Замечание 2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несколько множеств, то аналогично тому, как это делалось для двух множеств, определяется их объединение – составляется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному их них:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \ldots \text{или } x \in A_n\}.$$

Замечание 3. Если в выражении есть знаки $\cap$ и $\cup$ и нет скобок, то сначала выполняется операция пересечения, а потом – операция объединения (аналог сложению и умножению в арифметике).

Пример 16. Даны множества А = {3,4,6,8,9} и В = {3,5,2,8,1}. Найти объединение множеств А и В.

Решение.

Элементами, которые принадлежат множеству А или множеству В, являются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Одинаковые числа берутся один раз.

Ответ: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Свойства объединения и пересечения множеств представлены на рисунке 10.

№	Свойства объединения множеств	№	Свойства пересечения множеств
1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения $\cup$);	1′	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$);	2′	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$);
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$);	3′	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$);
4	$A \cup \varnothing = A$;	4′	$A \cap U = A$;
5	$A \cup \overline{A} = U$;	5′	$A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6	$A \cup A = A$;	6′	$A \cap A = A$;
7	$A \cup U = U$;	7′	$A \cap \varnothing = \varnothing$;
8	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);	8′	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);	9′	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).

Рисунок 10 – Свойства объединения и пересечения множеств

1.4.4 Разность множеств

Определение 1.6

Разностью двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.

Символически разность двух множеств обозначается так: $A \setminus B$, где символ $\setminus$ является знаком разности для множеств. С помощью характеристического свойства определение 1.6 выглядит следующим образом:

$$C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\} \qquad (8)$$

Пример 17.

Если $E_1=\{2; 4; 6\}$ и $E_2=\{6; 8; 10\}$,то $E_3=E_1\setminus E_2=\{2; 4\}$, $E_4=E_2\setminus E_1=\{8;10\}$.

Пример 18.

Если $M_1=\{x_1; x_2; x_3\}$, $M_2=\{y_1; y_2\}$, то $M_3=M_1\backslash M_2=\{x_1; x_2; x_3\}$, $M_4=M_2\backslash M_1=\{y_1; y_2\}$.

Пример 19.

Если $K_1=\{1; 3; 5; 7; 9\}$, $K_2=\{5; 7; 1\}$, то $K_3=K_1\backslash K_2=\{3; 9\}$, $K_4=K_2\backslash K_1\varnothing$.

Графическое представление вариантов разности двух множеств A и B показано на рисунке 11, где множество A \ B заштриховано.

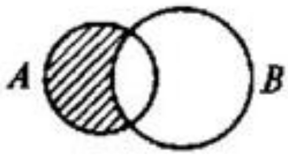


Рисунок 11 – Разность двух множеств

Свойства разности множеств представлено на рисунке 12.

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда:

а) $A \setminus A = \varnothing$;

б) $A\setminus B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$;

в) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B)\setminus C$.

Рисунок 12 – Свойства разности двух множеств

1.4.5 Дополнение к множеству

Определение 1.7 Пусть A – некоторое множество, являющееся частью универсального (основного) множества U. *Дополнением* множества A называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов их множества U, которые не принадлежат A. Его обозначают $\overline{A}$.

Это определение может быть записано в виде:

$$\overline{A} = \{x : x \notin A, x \notin U\} \text{или} \ \overline{A} = \backslash A \qquad (10)$$

Графически дополнение (соответственно определению 1.7) изображено на рисунке 13 , на котором дополнение заштриховано.

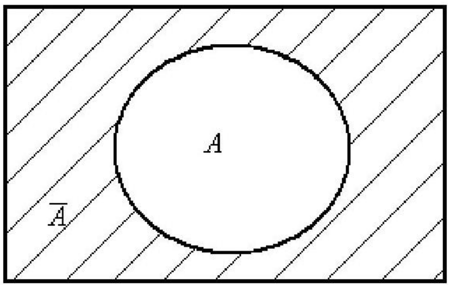


Рисунок 13 – Дополнение к множеству

Пример 20. Дано множество $U = \{\text{все обучающиеся группы ИСП} - 000\}$. Множество $A = \{\text{девушки группы ИСП} - 000\}$. Тогда множество $\overline{A} = \{\text{юноши группы ИСП} - 000\}$.

1.4.6 Симметрическая разность

Определение 1.8. Симметрической разностью (кольцевой суммой) двух множеств A и B называется множество G, состоящее из всех элементов исходных множеств, не принадлежащим одновременно обоим исходным множествам.

Обозначение: Δ или $\div$ $\oplus$.

$G = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Пример 21. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3,4\ 5,6, 7\}$. Найти симметрическую разность множеств A и B.

Решение.

Способ 1. По определению симметрической разности элементы 1 и 2 множества A не принадлежат множеству B, а элементы 6 и 7 множества B не принадлежат множеству A.

Способ 2. $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{6, 7\}$, тогда $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 6, 7\}$.

Способ 3. Сделать самостоятельно, применив формулу

$G = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Ответ: $A \Delta B = \{1, 2, 6, 7\}$.

Графически виды симметрической разности изображены на рисунке 14 , на котором симметрические разности заштрихованы.

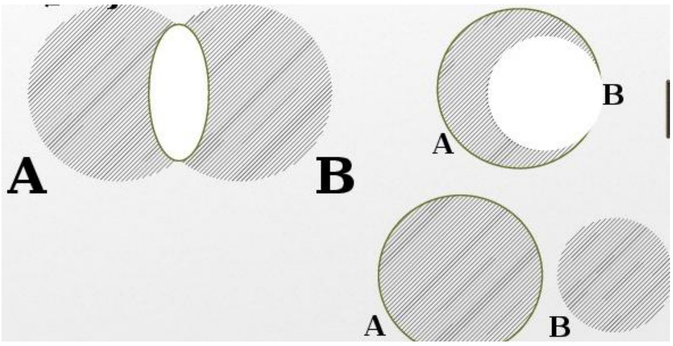


Рисунок 14 - Виды симметрических разностей

1.5 Мощность множества

Определение 1.9. Мощностью множества A называется число элементов в множестве A. Обозначение мощности: m (A) .

Из определения следуют свойства:

Свойство 1. $m(A) + m(\bar{A}) = m(U)$.

Свойство 2. $A = B \Rightarrow m(A) = m(B)$.

Для любых конечных множеств справедливы так же утверждения:

1. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$
2. $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$
3. $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C)$.

Далее представлен ряд задач, которые удобно решать, используя графическую иллюстрацию.

Задача №1.

В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Найти: Сколько учащихся решили все задачи? Сколько учащихся решили только две задачи? Сколько учащихся решили только одну задачу?

Решение. Краткая запись условия:

m (E) = 40, m (A) = 20, m (B) = 18, m (C) = 18, m $(A \cap B)$ = 7, m $(A \cap C)$ = 8, m $(B \cap C)$ = 9, m $(A \cup B \cup C)$ = 3 => m $(A \cup B \cup C)$ = 40 – 3 = 37.

K1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;

K2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;

K3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

K4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;

K5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

K6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

K7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

K8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Разбиение универсального множества E множествами A, B, C приведено на рисунке 15.

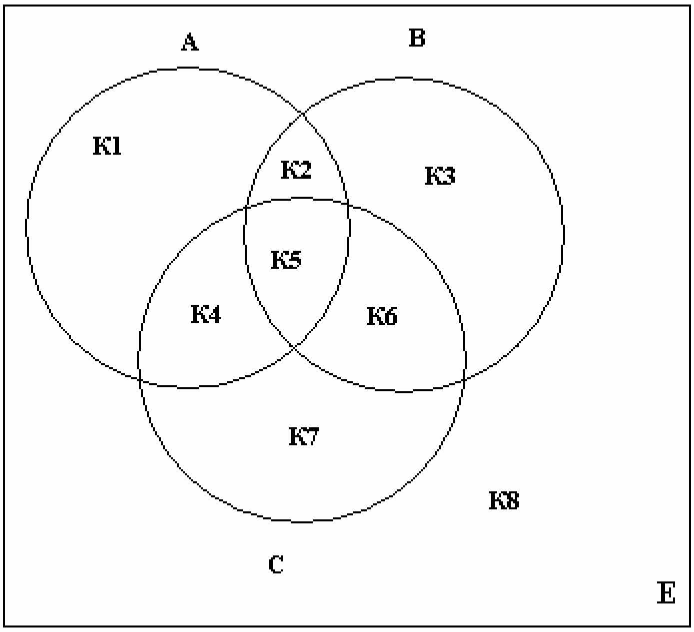


Рисунок 15 - Разбиение универсального множества E множествами A, B, C

Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:

1) m (К5) = m ($A\cap B\cap C$)= m ($A\cup B\cup C$) - m (A) - m (B) - m (C) + m ($A\cap B$) + m ($A\cap C$) + m ($B\cap C$);
2) m (К5) = 37-20-18-18+7+8+9=5;
3) m (К2) = m ($A\cap B$) - m (К5) = 7-5=2;
4) m (К4) = m ($A\cap C$) - m (К5) = 8-5=3;
5) m (К6) = m ($B\cap C$) - m (К5) = 9-5=4;
6) m (К1) = m (A) - m (К2) - m (К4) - m (К5) = 20-2-3-5=10;
7) m (К3) = m (B) - m (К2) - m (К6) - m (К5) = 18-2-4-5=7;
8) m (К7) = m (C) - m (К4) - m (К6) - m (К5) = 18-3-4-5 =6;
9) m (К2) + m (К4) + m (К6) = 2+3+4=9 – число учеников решивших только две задачи;
10) m (К1) + m (К3) + m (К7) = 10+7+6=23 – число учеников решивших только одну задачу.
Ответ:
5 учеников решили три задачи;
9 учеников решили только по две задачи;
23 ученика решили только по одной задаче.

Задача № 2.

Первую или вторую контрольные работы по математике успешно написали 33 студента, первую или третью – 31 студент, вторую или третью – 32 студента. Не менее двух контрольных работ выполнили 20 студентов. Сколько студентов успешно решили только одну контрольную работу?
Решение.

По условию m ($A\cup B$) = 33; m ($A\cup C$) = 31; m ($B\cup C$) = 32; m (К2) + m (К4) + m (К6) + m (К5) = 20.
Найти m (К1) + m (К3) + m (К7).

1) m (AUB) = m (К1) + m (К2) + m (К3) + m (К4) + m (К5) + m (К6) = m (К1) + m (К3) + 20 = 33 => (К1) + m (К3) = 33 – 20 = 13;
2) m (AUC) = m (К1) + m (К4) + m (К2) + m (К5) + m (К6) + m (К7) = m (К1) + m (К7) + 20 = 31 => m (К1) + m (К7) = 31 – 20 = 11;
3) m (BUC) = m (К3) + m (К2) + m (К5) + m (К6) + m (К7) + m (К4) = m (К3) + m (К7) + 20 = 32 => m (К3) + m (К7) = 32 – 20 = 12;
4) 2m (К1) + m (К3) + m (К7) = 13+11=24
5) 2m (К1) + 12 = 24 => m (К5) = $\frac{24-12}{2}$ = 6;
6) m (К3)= 13-6=7;
7) m (К7)=12-7=5;
8) m (К1) + m (К3) + m (К7) = 6+7+5=18

Ответ: только одну контрольную работу решили 18 учеников.

Задача № 3. В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников.

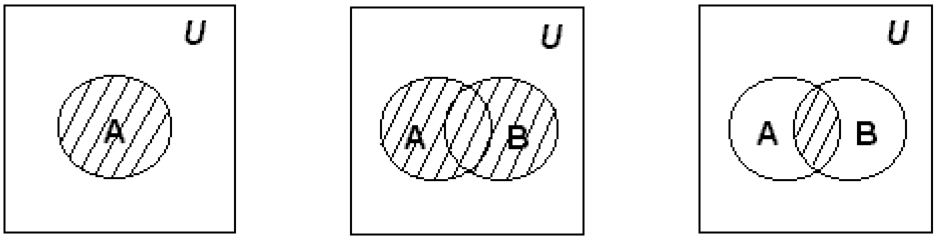
Решение. По условию $m(E) = 35$; $m(A \cap B \cap C) = m(K5) = 6$; $m(A \cap B) = 15$; $m(A \cap C) = 13$; $m(B \cap C) = 9$.
Найти $m(K1) + m(K3) + m(K7)$.

1) $m(K2) = m(A \cap B) - m(K5) = 15-6=9$;
2) $m(K4) = m(A \cap C) - m(K5) = 13-6=7$;
3) $m(K6) = m(B \cap C) - m(K5) = 9-6=3$;
4) $m(K1) + m(K3) + m(K7) = m(E) - m(K4) - m(K2) - m(K6) - m(K5) = 35-7-9-3-6=10$.

Ответ: только одним видом транспорта пользуется 10 учеников.

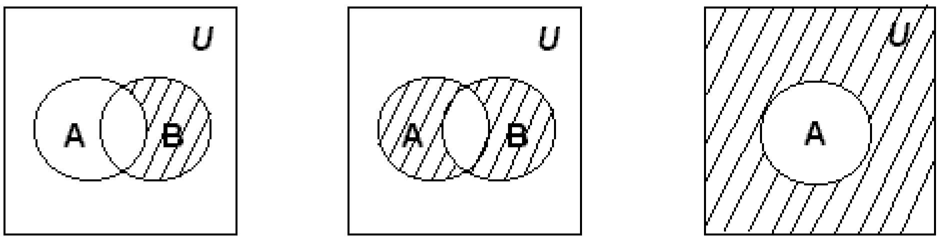
1.6 Вопросы для самоконтроля по разделу 1

1.Дайте понятие множества. Приведите примеры множеств.
2. Дайте определение элемента множества.
3. Сформулируйте определение числового множества.
4. Перечислите классы множеств.
5. Дайте определение конечного множества.
6. Дайте определение бесконечного множества.
7. Дайте определение пустого множества.
8. Перечислите способы задания множеств.
9. Что такое характеристическое свойство множества?
10. Перечислите виды отношений между множествами.
11. Как геометрически изображают множества?
12. Какие множества называются пересекающимися?
13. Какие множества называются непересекающимися?
14. Дайте определение подмножества.
15. Какое множество называется универсальным?
16. Какие множества называются равными?
17. Сформулируйте определение пересечения множеств.
18. Сформулируйте определение объединения множеств.
19. Сформулируйте определение разности множеств.
20. Сформулируйте определение дополнения до множества.
21. Сформулируйте определение симметрической разности множеств.
22. Сформулируйте понятие мощности множества.
23. Запишите свойства мощности множества.
24. Запишите формулу мощности объединения двух множеств.
25. Запишите формулу мощности пересечения двух множеств.
26. Запишите формулу мощности объединения трех множеств.
27. Укажите соответственное отношение между множествами и их изображениями, представленными на рисунках 16 и 17.



1 2 3

Рисунок 16 - Геометрические изображения 1- 3



4 5 6

Рисунок 17 - Геометрические изображения 4 - 6

Варианты ответа:
а) пустое множество;
б) равные множества;
в) объединение множеств;
г) пересечение множеств подмножество;
д) симметрическая разность множеств;
е) дополнение до множества;
ж) разность множеств.

Ответы к вопросу 27 представлены на рисунке 18.

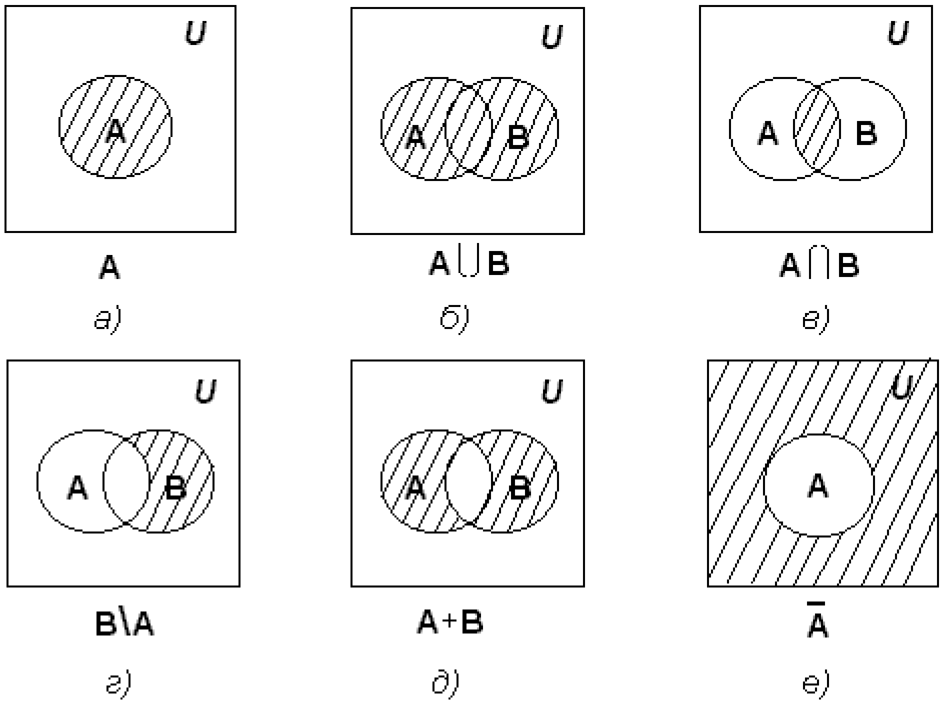


Рисунок 18 - Ответы к вопросу 27

1.7 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти объединение множеств А $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 3)$ и В = $(2; \sqrt{11})$.

Задача 2. Найти пересечение множеств А $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 3)$ и В = $(2; \sqrt{11})$.

Задача 3. Составить описание множества А = $\{1, 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Задача 4. Составить описание множества А $=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$.

Задача 5. Составить описание множества А $=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$.

Задача 6. Даны множества М $=\{5; 4; 6\}$, Р = $\{4; 5; 6\}$, Т = $\{5; 6; 7\}$, S $=\{4; 6\}$. Какое утверждение является неверным?

а) М = Р; б) $P \neq S$; в) $M \neq T$; г) Р = Т.

Задача 7. Известно, что А = $\{1; 2; 5\}$, В = $\{1; 4; 5; 7; 9\}$, С = $\{4; 7; 9\}$. Найти:

1) пересечение А и В; 2) пересечение А и С; 3) пересечение В и С; 4)объединение А и С; 5) объединение В и С; 6) разность А и В; 7) разность А и С; 8) дополнение С до В; 9) симметрическую разность В и С; 10) дополнение А, В, С до универсального множества, если U – все цифры.

Задача 8. Пусть универсальное множество *U* – множество всех преподавателей и студентов колледжа; *A* – множество всех преподавателей; *B* – множество студентов, успевающих по всем дисциплинам на «отлично»; *C* – множество неуспевающих студентов; *D* – множество студентов в группе № 1. Составить символические записи для описаний множеств:

а) множество всех студентов колледжа (без преподавателей);

б) множество преподавателей и студентов, кроме успевающих по всем предметам на «отлично»;

в) множество отличников, обучающихся в группе № 1;

г) множество студентов группы № 1, справляющихся с учебным планом;

д) множество преподавателей и всех успевающих студентов.

Задача 9. Три купчихи Сосипатра Тихоновна, Олимпиада Карповна и Поликсена Уваровна сели пить чай. Сосипатра Тихоновна и Олимпиада Карповна выпили 11 чашек. Олимпиада Карповна и Поликсена Уваровна – 15 чашек. Сосипатра Тихоновна и Поликсена Уваровна – 14 чашек. Сколько чашек чая выпили купчихи вместе?

Задача 20. Выполнить тестовые задания.

Тестовые задания № 1.

1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется…

Вариант ответа:

а) пустым

б) конечным

в) нулевым

2. Число всех подмножеств множества K={7,9,11,13,15,17,19} равно…

Вариант ответа:

а) 182

б) 128

в) 88

3. Множество решений уравнения записывается в виде…

Вариант ответа:

а) {-2, 3}

б) (2; -3)

в) {2, -3}

4. Мощность множества B={0,1,2,3,5,9,27,38} равна…

Вариант ответа:

а) 8

б) 18

в) 4

5. Правильная запись предложения «Y – множество действительных чисел, больших 3» — это…

Вариант ответа:

а) Y={y|yR, y>3}

б) Y={R| y>3}

в) Y={yR|y>3}

6. Декартово произведение множеств A={0,-3} и B={-1,2} – это…

Вариант ответа:

а) AB={(0,-1),(-3,2)}

б) AB={(0,-1),(-3,-1),(0,2),(-3,2)}

в) AB={0,-1}

7. Укажите множества чисел, которые не пересекаются…
а) простых и четных
б) простых и нечетных
в) простых и составных
8. Пересечение множеств равносторонних и прямоугольных треугольников – это множество треугольников…
Вариант ответа:
а) пустое множество
б) равнобедренных
в) прямоугольных
9. Пересечение множеств прямоугольников и ромбов – это множество…
Вариант ответа:
а) параллелограммов
б) прямоугольников
в) квадратов
10. Пересекаются множества чисел…
Вариант ответа:
а) четных и нечетных
б) простых и четных
в) простых и составных
11. Мощность множества $A=\{-3,0,2,5,13\}$ равна…
Вариант ответа:
а) 5
б) 15
в) 2
12. Правильная запись предложения «X – множество целых чисел, больших -5» — это…
Вариант ответа:
а) $X=\{Z|\ x>-5\}$
б) $X=\{xZ|x>-5\}$
в) $X=\{xQ|x>-5\}$
13. Декартово произведение множеств $A=\{-1,2\}$ и $B=\{0,-3\}$ – это…
Вариант ответа:
а) $AB=\{(-1,0),(-1,-3),(2,0),(2,-3)\}$ +
б) $AB=\{-1,0\}$; 2) $AB=\{(-1,0),(2,-3)\}$
в) $AB=\{(0,-1),(-3,-1),(0,2),(-3,2)\}$
14. Множество решений неравенства записывается в виде…
Вариант ответа:
а) (1;0)
б) (0;1)
в) (-1;0)
15. Число всех подмножеств множества $E=\{5,10,15,20,25,30\}$ равно…
Вариант ответа:
а) 64

б) 46
в) 164
16. Множество решений уравнения записывается…
Вариант ответа:
а) {-4, 3}
б) {-3, 4}
в) (3; -4)
17. Математический символ Ø обозначает…
Вариант ответа:
а) нулевое множество
б) бесконечное множество
в) пустое множество
18. Существует множество без элементов…
Вариант ответа:
а) нет
б) да
в) в любом множестве не менее 1 элемента
19. Если все элементы множества А входят в множество В, то можно сказать, что…
Вариант ответа:
а) А – образ множества В
б) В – прообраз множества
в) А – подмножество В
20. Множество, состоящее из определенного числа конкретных элементов, называется…
Вариант ответа:
а) определенным
б) конкретным
в) конечным
21. Если можно найти разность двух множеств, то можно найти их…
Вариант ответа:
а) объединение
б) произведение
в) сумму
22. При обозначении множеств используют:…
Вариант ответа:
а) только круглые скобки
б) только фигурные скобки
в) иногда круглые, иногда фигурные, иногда одновременно оба вида скобок
23. При операциях на числовых множествах за универсальное множество берут…
Вариант ответа:
а) все целые числа

б) только множество натуральных чисел
в) всё множество действительных чисел
24. Как можно изобразить множество графически…
Вариант ответа:
а) частью координатной плоскости
б) диаграммами Эйлера-Венна
в) интервалом на числовой оси
25. При пересечении двух множеств получаем третье множество, которое…
Вариант ответа:
а) всегда состоит из одного элемента
б) всегда не содержит элементов
в) может состоять из одного элемента
26. Множества обозначаются:…
Вариант ответа:
а) малыми латинскими буквами
б) большими латинскими буквами
в) кириллицей
27. Какой операции над множествами соответствует выражение:
«Элемент, принадлежащий полученному множеству, принадлежит множеству А И множеству В»?
Вариант ответа:
а) пересечение множеств
б) перечисление множеств
в) дополнение множества
28. Какой операции над множествами соответствует выражение:
«Элемент, принадлежащий полученному множеству, принадлежит множеству А или множеству В.»?
Вариант ответа:
а) пересечение множеств
б) перечисление множеств
в) объединение множеств
29. Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают в виде…
Вариант ответа:
а) $x \in X$
б) $x \mid X$
в) $x \subset X$
30. Если множество А является частью множества В, то записывают…
Вариант ответа:
а) $A \mid B$
б) $A \subset B$
в) $A \in B$
Тестовые задания № 2.
1.Как называют множество точек угла, равноудаленных от его сторон?
Вариант ответа:
а) серединный перпендикуляр б) биссектриса в) медиана

2.Дана функция $f(x) = y^2$, найдите верное утверждение.
Вариант ответа:
а) $3 \in D(f)$ б) $0 \notin D(f)$ в) $0 \in E(f)$
3.Какие из следующих утверждений верны?
Вариант ответа:
а) $1 \in \{1,2,3\}$;   б) $1 \notin \{1,2,\}$;   в))$\emptyset \notin \{1,2,3\}$
4.Пусть А – множество букв слова «координата». Множество букв каких слов являются подмножеством множества А:
Вариант ответа:
а) крокодил   б) нитки   в)картина
5.Найдите пересечение множеств цифр, используемых в записи чисел 55288 и 82223.
Вариант ответа:
а) { 5,5,2,8,8,2,2,3}   б) {2,3,8 }   в) {5,2,8,3}
6.Найдите множество общих делителей чисел 12 и 48.
Вариант ответа:
а) {1,2,3,4,6,12}   б) {2,3,4,6,12}   в) {2,3,4,6}
7.Какое из следующих утверждений верно?
Вариант ответа:
а) $\{a,в\} \cap \{a\} = a$ б) $\{a\} \cap \{a\} = \{a\}$ в) $\{a,в\} \cap \{a\} = \{a,в\}$
8. Какое из следующих утверждений верно?
Вариант ответа:
а) $\{a,в\} \cup \{a\} = a$ б) $\{a\} \cup \{a\} = \{a\}$ в) $\{a,в\} \cup \{a\} = \{a,в\}$
9.Найдите помножества множества А = {2,4,6}.
Вариант ответа:
а) {4,2},{2}, {6}, {4}, {2,4,6} , {4,6}, {2,6}   б) {4,2},{2}, {6}, {4}, {2,4,6}
в) {4,2}
10.Найдите $A \cap B \cap C$, если А = {-2,-1, 0,1,2,3}; В = {-1,0,1,2,3,4,5}; С={0,1,2,3,4,-1,-2,-3} .
Вариант ответа:
а) {-2,-1,0,1,2,3}   б) {-1,0,1,2,4,3}   в) {-1,0,1,2,3}
11.Найдите $A \cup B \cup C$, если А = {-2,-1, 0,1,2,}; В = {-1,0,1,2,3,5}; С={0,1,2,3,4,-1,-2,}.
Вариант ответа:
а) {-2,-1, 0,1,2,3,4,5};   б) {-2,-1, 0,1,2,3}   в) {0,1,2,3,4,5}
12.Найдите пересечение числовых отрезков [2; 7] и [4; 9] .
Вариант ответа:
а) [2; 9]   б) [4; 7]   в) [2,4]
13.Найдите объединение числовых отрезков [2; 7] и [4; 9].
Вариант ответа:
а) [2; 9]   б) [4; 7]   в) [2,4]

Раздел 2 Графы

2.1 Основные понятия и определения теории графов

Первая работа по теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру (1736г).

Термин граф впервые ввёл 1936г Венгерский математик Денеш Кениг. Графами были названы схемы, состоящие из точек и соединяющие эти точки отрезков прямых или кривых.

Граф (от греческого $\gamma\rho\alpha\varphi\omega$ – пишу) есть непустое множество вершин V = $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$и набор E = $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ неупорядоченных и упорядоченных пар вершин вида (v, w). Изображения графов представлено на рисунке 19.

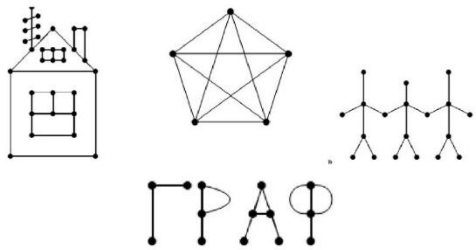


Рисунок 19 – Примеры графов

Обычно граф обозначают как $G(V,E)$; количество вершин и ребер обозначается, соответственно, $n(G)$ и $m(G)$.

Неупорядоченная пара вершин называется *ребром* $\{v,w\}$, упорядоченная пара - *дугой* (v,w).

Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным (обозначается G). Граф, содержащий только дуги - ориентированным (или орграфом) (обозначается $\vec{G}$). Ориентированный и неориентированный графы представлены на рисунке 20.

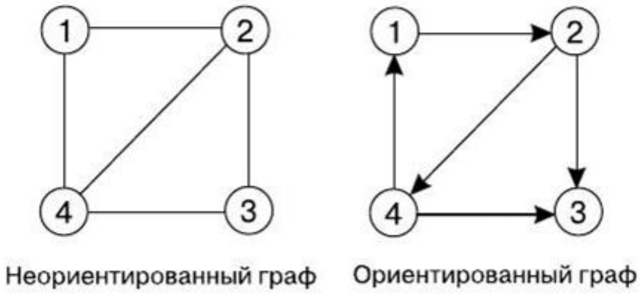


Рисунок 20– Примеры неориентированного и ориентированного графов

Пара вершин может быть соединена двумя или более рёбрами (или, соответственно, дугами одного направления), такие рёбра (или дуги) называются *кратными*. Дуга (или ребро) может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, в этом случае соответствующая дуга (или ребро) называется *петлёй*. Изображение петли в графе представлено на рисунке 21.

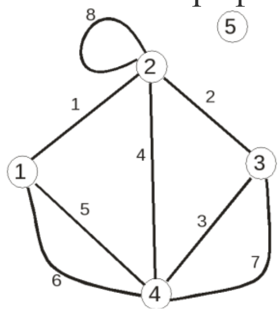


Рисунок 21–Петля в графе

Граф без кратных рёбер и петель называется *простым графом*, изображение на рисунке 22.

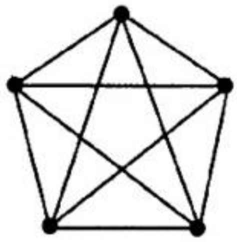


Рисунок 22 –Простой граф

Граф, все *n* вершин которого являются изолированными, называется *нулевым* (*пустым*), обозначается O_n, изображение на рисунке 23.

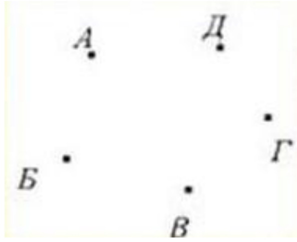


Рисунок 23–Нулевой граф

Простой граф, любые две вершины которого являются смежными, называется *полным*. Полный граф с *n* вершинами обозначается K_n. Изображение полного графа представлено на рисунке 24.

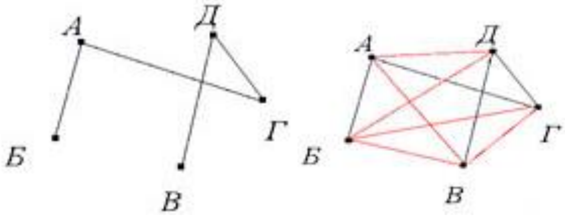


Рисунок 24 – Полный граф

Граф называется *взвешенным* (рисунок 23), если его вершины или ребра характеризуются некоторой дополнительной информацией – весами вершин или ребер. Изображение взвешенного графа представлено на рисунке 25.

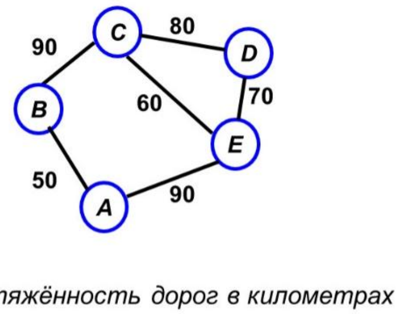


Рисунок 25 –Взвешенныйграф

2.2 Смежность, инцидентность, степени

Вершины, соединённые ребром или дугой, называются *смежными*.

Рёбра, имеющие общую вершину, тоже называются *смежными*.

Ребро (или дуга) и любая из его вершин называются *инцидентными*.

Говорят, что ребро $\{v,w\}$ *соединяет* вершины v и w. Для орграфов: дуга (v,w) *начинается* в вершине v (*исходит* из вершины v) и *заканчивается* в вершине w (*заходит* в вершину w), или *идет* из вершины v в вершину w.

Степенью вершины v графа G называется число $\deg v$ рёбер графа G, инцидентных вершине v, при этом петли учитываются дважды. Изображения четной и нечетной степени вершины графа представлены на рисунке 26.

Рисунок 26 – Степень верщины графа (слева нечетная, справа четная)

Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 - *тупиковой* (висячей, концевой).

Для орграфа: *полустепенью исхода* (*захода*) вершины v орграфа $\vec{G}$ называется число $\deg_+ v$ ($\deg_- v$) дуг орграфа, исходящих из вершины v (заходящих в вершину v), при этом каждая петля, инцидентная вершине v , учитывается как в $\deg_+ v$, так и в $\deg_- v$.

Теорема 1. (Теорема о рукопожатиях) Сумма степеней всех вершин графа G равна удвоенному числу его рёбер, то есть: $\sum_{v \in V} deg v = 2m(G)$ (число пожатых рук всегда четно.)

Для орграфа $\sum_{v \in V} deg_- v = \sum_{v \in V} deg_+ v = m(G)$.

Доказательство следует из тех соображений, что каждое ребро вносит в сумму вклад 2.

Следствие. В каждом графе число вершин нечётной степени чётно.

2.3 Способы задания графов

Граф можно задать рисунком, списком вершин и ребер, матрицей смежности, матрицей инцидентности. В данном пособии представлены первые два способа, остальные будут рассмотрены в дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики».

2.4 Подграфы. Операции на графах

Подграфом графа $G(V,E)$ называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер исходного графа $G(V,E)$ (рисунок 27).

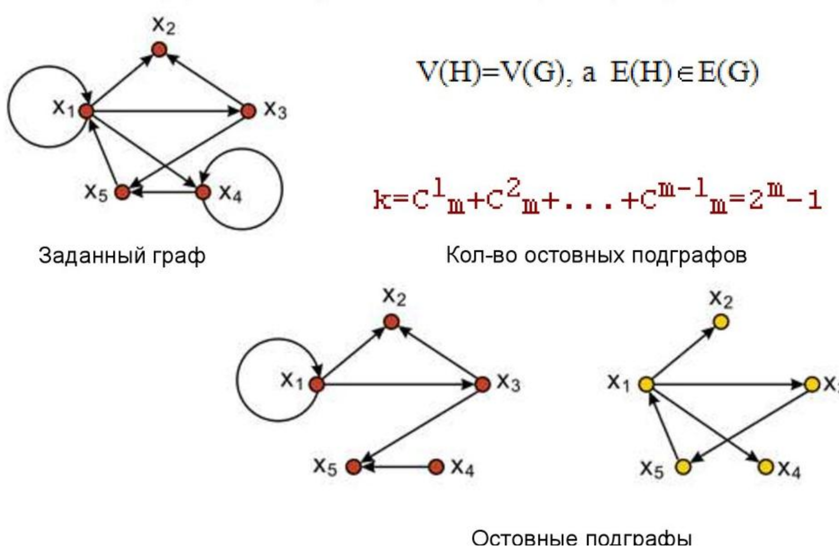


Рисунок 27 – Остовный подграф (фактор, часть графа)

Удаление или *добавление ребра* представлено на рисунке 28.

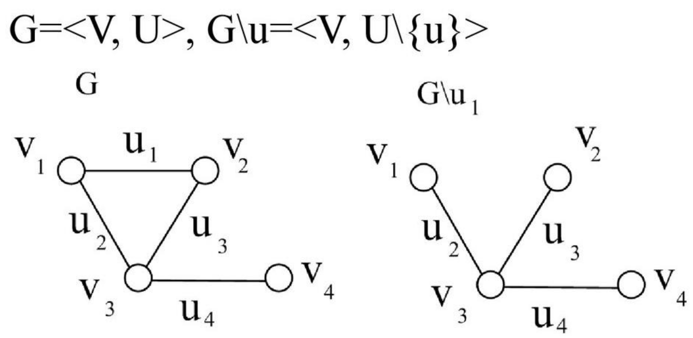


Рисунок 28– Удаление ребра

Удаление вершины: из множества вершин удаляется выбранная вершину, а из множества ребер все инцидентные ей ребра, представлено на рисунке 29.

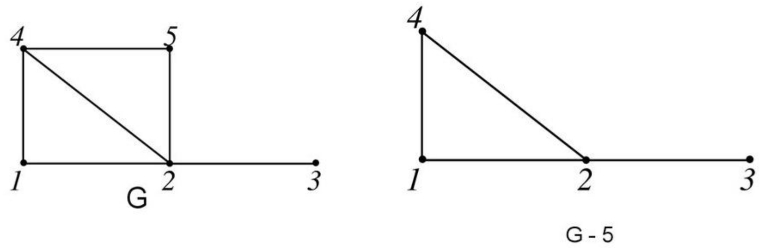


Рисунок 29– Удаление вершины

Стягивание ребра: отождествляются (стягиваются) вершины инцидентные выбранному ребру, представлено на рисунке 30.

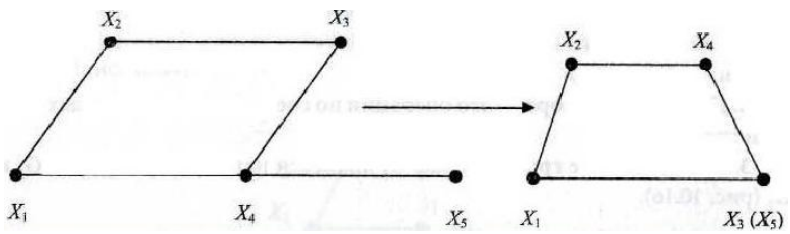


Рисунок 30 – Стягивание ребра

Добавление вершины (разбиение ребра): выбирается некоторое ребро (u,v) из множества ребер и удаляется; в множество вершин добавляется новая вершину w, а в множество ребер добавляются новые ребра (u,w) и (w,v).

Сводная таблица операций на графах, рассмотренных выше, представлена на рисунке 31.

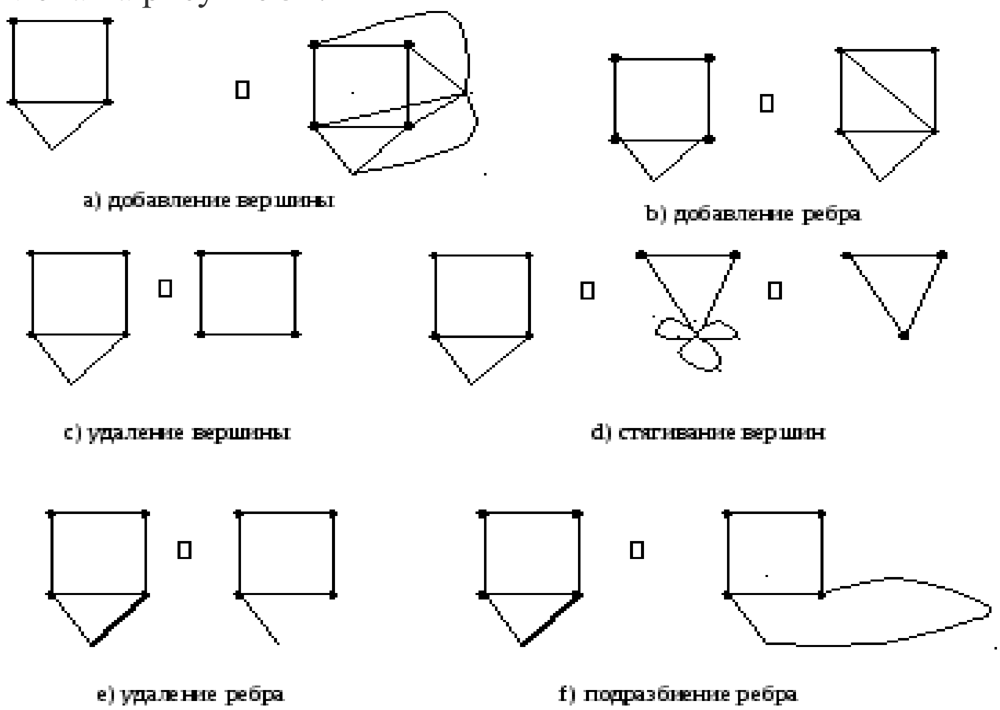


Рисунок 31 – Сводная таблица операций над графами

Объединением графов G_1 (V_1,E_1) и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Примеры объединения графов представлены на рисунках 31 и 32.

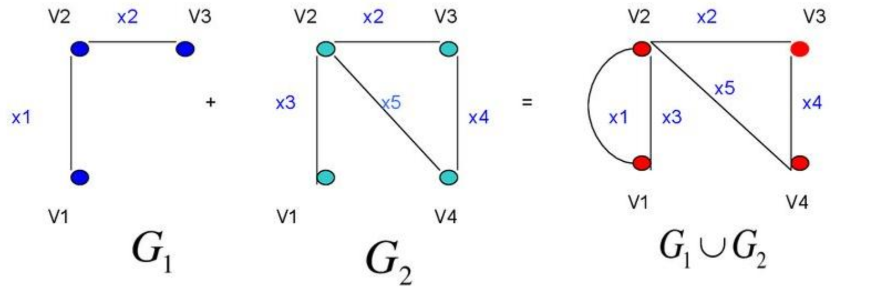


Рисунок 31– Объединение простых графов

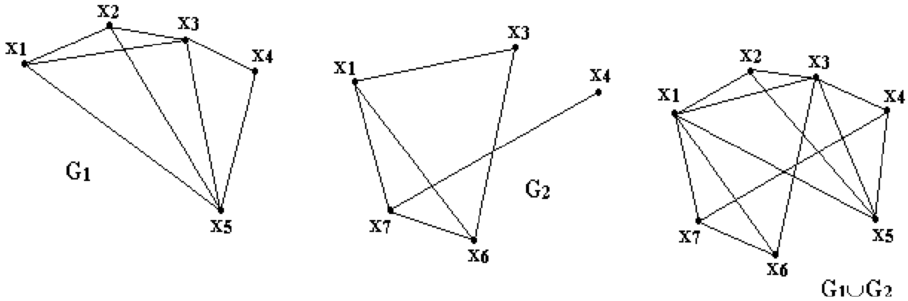


Рисунок 32 – Объединение сложных графов

Пересечением графов G_1 (V_1,E_1) и $G_2(V_2,\ E_2)$ ($\neq\varnothing$) называется граф $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2)$. Пересечение графов представлено на рисунке 31.

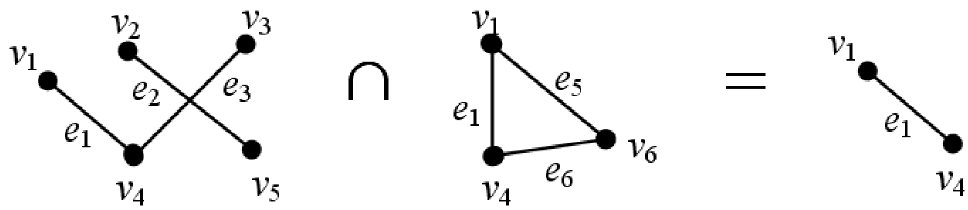


Рисунок 33 –Пересечение графов

Определение *соединения* графов представлена на рисунке 34.

О.2.5. **Соединением** графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 + G_2$ с множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер е, состоящим из всех ребер, принадлежащих графам G_1 и G_2, и всех ребер, соединяющих каждую вершину графа G_1 с каждой вершиной графа G_2, т.е.

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1 \text{ и } v_2 \in V_2\}.$$

Рисунок 34 –Определение соединения графов

Графическое изображение соединения графов представлено на рисунке 35.

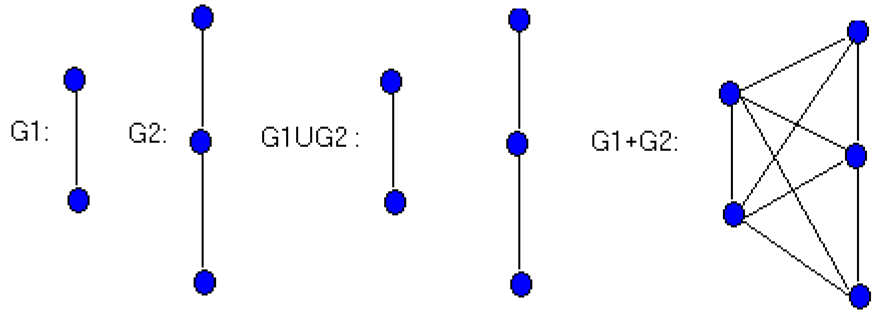


Рисунок 35 –Изображение соединения графов

Определение и изображение *кольцевой суммы* графов представлено на рисунке 36.

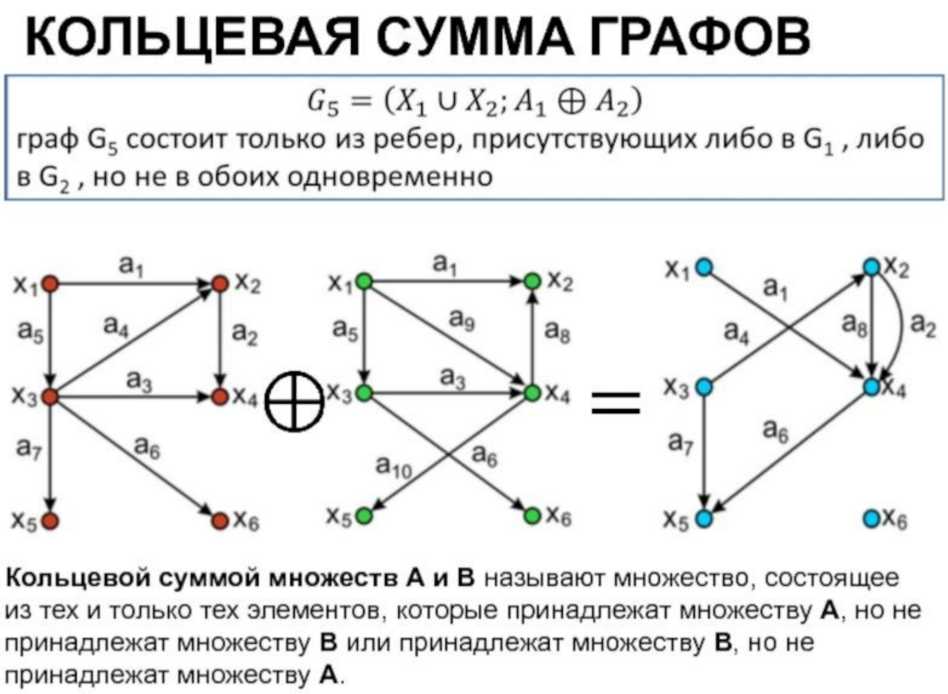


Рисунок 36 – Определение и изображение кольцевой суммы графов

2.5 Связность. Компоненты связности. Маршруты и пути

Маршрут в графе - это последовательность вершин и рёбер $v_0e_1v_1e_2,\ldots,v_{n-1}e_nv_n$, где любые два «соседа» инцидентны. Рёбра и вершины в маршруте могут повторяться. Если начальная и конечная вершины совпадают, то маршрут называется *замкнутым*. Если все вершины и рёбра маршрута различны, то он называется *цепью*. Замкнутая цепь - это *цикл*. *Длина маршрута* равна числу входящих в него рёбер.

Граф $G(V,E)$ называется *связным*, если для любых его вершин существует соединяющий их маршрут. *Компонентой связности* называется максимальный связный подграф графа $G(V,E)$. Число компонент связности графа обозначается $k(G)$.

Ориентированный граф $G(V,\vec{E})$ называется *сильно связным*, если для любых его вершин u и v существуем путь из u в v и путь из v в u.

В этом случае говорят, что вершины u и v достижимы друг из друга.

Если для любых двух вершин u и v графа $G(V,\vec{E})$ существует маршрут из u в v или из v в u, то граф называется *связным* или *односторонне связным*. Графическое изображения связных и несвязных графов представлено на рисунке 37.

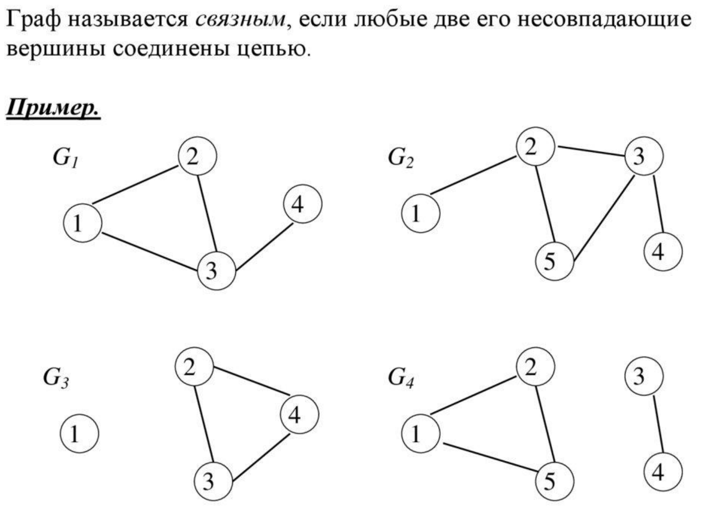


Рисунок 37 –Связные и несвязные графы

Вершина, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется *точкой сочленения*. Ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности, называется *перешейком* (*мостом*).

2.6 Эйлеровы и гамильтоновы графы

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он проходит через каждое ребро графа ровно один раз. Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 2. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда граф связный и все вершины имеют четную степень.

Теорема 3. Ориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он сильно связный и для любой его вершины имеет место равенство: $\deg_+ v = \deg_- v$.

Изображение эйлеровых цепи и цикла представлено на рисунке 38.

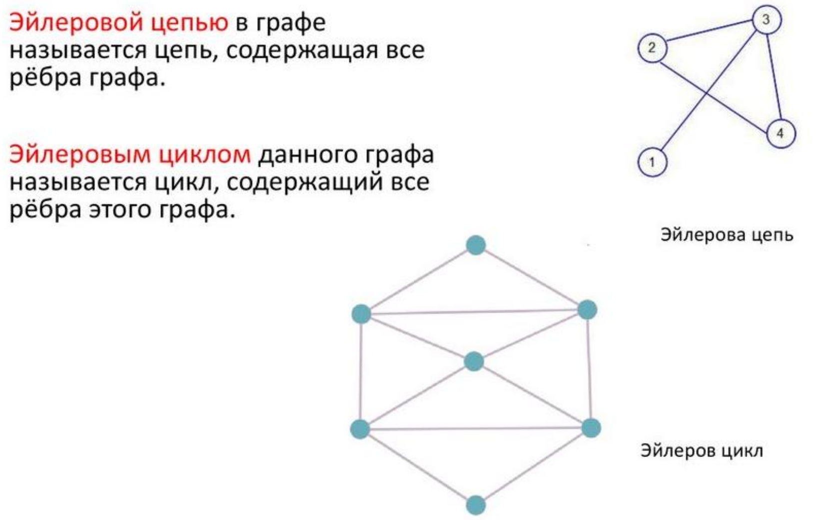


Рисунок 38 – Изображение эйлеровых цепи и цикла

Свое название эйлеровы графы получили в честь Л.Эйлера, который первым рассмотрел такие графы в 1736 году в своей знаменитой работе о кенигсбергских мостах. Этой работой Эйлер, по существу, положил начало новому разделу математики - теории графов.

Задача о кенигсбергских мостах состояла в следующем. На реке Прегель в Кенигсберге было два острова, соединенных между собой и с берегами семью мостами, как показано на рисунке 39.

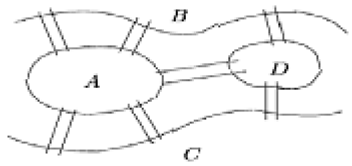


Рисунок 39 – Изображение эйлеровых цепи и цикла

Можно ли, начиная с некоторого места суши, обойти все мосты ровно по одному разу и вернуться в начальную точку? Эйлер предложил рассмотреть следующий граф:

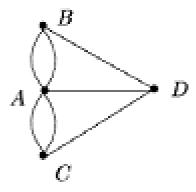


Рисунок 40 – Мосты и острова в виде графа

Решение этой задачи сводится к поиску эйлеровой цепи в данном графе. Однако, как показывает приведенная теорема, в указанном графе нет эйлеровых цепей. Ответ Эйлера на вопрос задачи состоит в следующем. Если бы у этой задачи было положительное решение, то в получившемся графе существовал бы замкнутый путь, проходящий по рёбрам и содержащий каждое ребро только один раз. Если существует такой путь, то у каждой вершины должно быть только чётное число рёбер. Но в получившемся графе есть вершины, у которых нечётное число рёбер. Поэтому задача не имеет положительного решения.

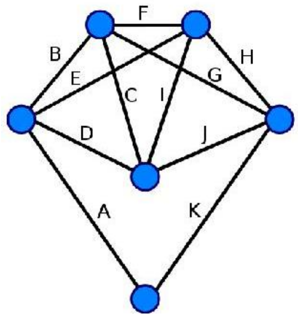


Рисунок 41 - Полуэйлеров граф (содержащий эйлеров путь(цикл))

Цикл в графе называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую вершину графа ровно один раз. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

Указанные названия циклов связаны с именем Уильяма Гамильтона, который в 1859 году предложил следующую игру головоломку:

Требуется, переходя по очереди от одной вершины додекаэдра к другой вершине по его ребру, обойти все 20 вершин по одному разу и вернуться в начальную вершину.

Придумано еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Ниже приведены формулировки двух таких задач.

1. Кампанию из нескольких человек требуется рассадить за круглым столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые.

Очевидно, для решения этой задачи нужно найти гамильтонов цикл в графе знакомств компании.

2. (Задача о шахматном коне.) Можно ли, начиная с произвольного поля шахматной доски, обойти конем последовательно все 64 поля по одному разу и вернуться в исходное поле?

Несмотря на внешнее сходство задач об эйлеровых и гамильтоновых циклах, оказалось, что эффективных критериев существования гамильтоновых циклов (в отличии от эйлеровых) не существует.

2.7 Деревья и лес

Связный граф без циклов называется *деревом*.

Граф без циклов называется *лесом*.

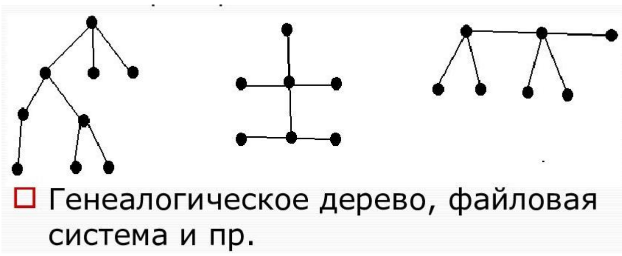


Рисунок 42 – Изображение деревьев, леса

Теорема 4. *$T(V,E)$ - дерево тогда и только тогда, когда $T(V,E)$ - связный граф и $|E|=|V|$ - 1.*

Теорема 5. *В любом дереве имеется не менее двух висячих вершин.*

В 1847 г. Кирхгоф разработал теорию деревьев для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, позволяющую найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в каждом контуре электрической цепи. Абстрагируясь от электрических схем и цепей, которые содержат сопротивления, конденсаторы, индуктивности и т.д., он рассматривал соответствующие комбинаторные структуры, содержащие только вершины и связи (рёбра или дуги), причём для связей не нужно учитывать, каким типам электрических элементов они соответствуют. Таким образом, Кирхгоф заменил каждую электрическую цепь соответствующим графом и показал, что для решения системы уравнений необязательно рассматривать в отдельности каждый цикл графа электрической цепи.

Кэли в 1858 году, занимаясь чисто практическими задачами органической химии, открыл важный класс графов, называемых деревьями. Он стремился перечислить изомеры насыщенных углеводородов с данным числом атомов. Задача формулировалась абстрактно: найти число всех деревьев с p вершинами, каждое из которых имеет вершины со степенями 1 и 4. Ему не удалось сразу решить эту задачу, и он стал изменять ее формулировку таким образом, чтобы можно было решить новую задачу о перечислении:

1) корневых деревьев (в которых выделена одна из вершин);
2) всех деревьев;
3) деревьев, у которых степени вершин не превышают 4;
4) деревьев, у которых степени вершин равны 1 и 4(постанока задачи из химии).

2.8 Цикломатическое число графа. Построение остовного дерева связного графа

Остовным деревом связного графа $G(V,E)$ называется любой его подграф, содержащий все вершины G и являющийся деревом.

На рисунке 43 приведены два графа G и по одному из их остовных деревьев T.

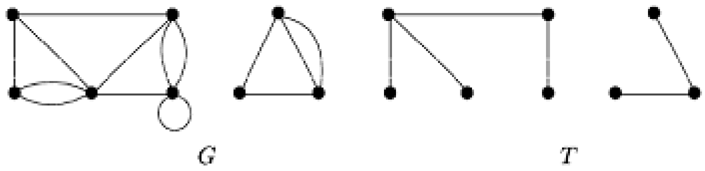


Рисунок 43 – Изображение двух графов G и по одному из их остовных деревьев T.

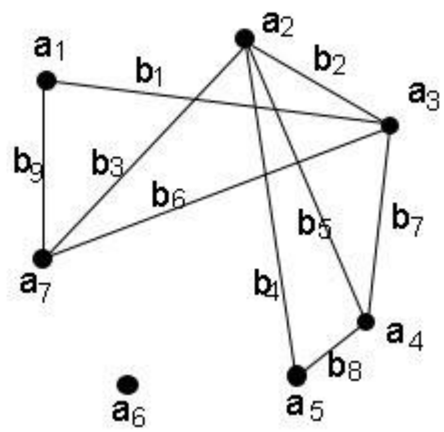
Число ребер, которое необходимо удалить для получения остова, называется *цикломатическим числом* графа G и обозначается $\gamma(G)$.

Теорема 6. *Цикломатическое числом графа* $G(V,E)$ *не зависит от последовательности удаления ребер и имеет место формула:*

$\gamma(G) = |E|| - |V| + k(G)$,

где $k(G)$ *- число компонент связности.*

2.9 Применение теории графов к решению задач



Задача1. Пусть A - множество чисел 1, 2, 3: $A = \{1, 2, 3\}$. Построить граф для отображения отношения "<" ("меньше") на этом множестве.
Решение. Очевидно, что числа 1, 2, 3 следует представить в виде вершин графа. Тогда каждую пару вершин должно соединять одно ребро. В решении этой задачи, используются основные понятия теории графов, такие как как ориентированные и неориентированные графы. Неориентированные графы - такие, рёбра которых не имели направления т. е. порядок двух концов ребра не существенен. Можно утверждать, что «человек номер 1» знаком с «человеком номер 2» в той же мере, как и «человек номер 2» с «человеком номер 1». В этом примере одно число меньше другого, но не наоборот. Поэтому соответствующее ребро графа должно иметь направление, показывающее, какое всё же число меньше другого. То есть, порядок концов ребра существенен. Такой граф (с рёбрами, имеющими направление) называется ориентированным графом или орграфом.

Итак, в множестве A число 1 меньше числа 2 и числа 3, а число 2 меньше числа 3. Этот факт отображается рёбрами, имеющими направление, что показывается стрелками. Получается следующий граф, представленный на рисунке 44.

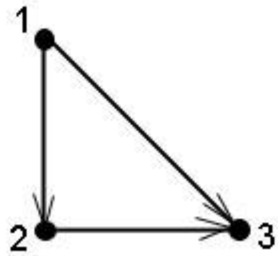


Рисунок 44 – Изображение графа к задаче 1

Задача 2**.** Пусть A - множество чисел 2, 4, 6, 14: $A = \{2, 4, 6, 14\}$. Построить граф для отображения отношения "делится нацело на" на этом множестве.

Решение. В этом примере часть рёбер будут иметь направление, а некоторые не будут, то есть имеется *смешанный граф*. Здесь присутствуют отношения на множестве: 4 делится нацело на 2, 6 делится нацело на 2, 14 делится нацело на 2, и ещё каждое число из этого множества делится нацело на само себя. Это отношение, то есть когда число делится нацело на само себя, отображается в виде рёбер, которые соединяют вершину саму с собой, т.е. петлей. В данном случае нет необходимости давать направление петле. Таким образом, в этой задаче три обычных направленных ребра и четыре петли. Получается следующий граф, представленный на рисунке 45.

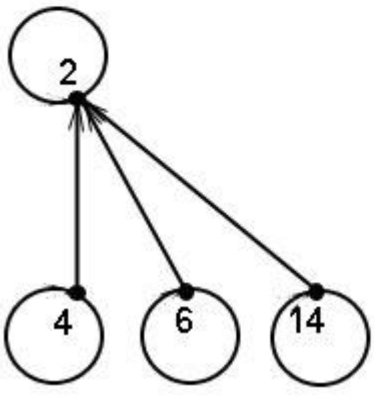


Рисунок 45 – Изображение графа к задаче 2

Задача 3. Пусть даны множества $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Построить граф для отображения отношения "декартово произведение множеств".

Решение. Как известно из определения *декартова произведения множеств*, в нём нет упорядоченных наборов из элементов одного и того же множества.

То есть в это задаче нельзя соединять греческие буквы с греческими и латинские с латинскими. Этот факт отображается в виде *двудольного графа,* то есть такого, в котором вершины разделены на две части так, что вершины, принадлежащие одной и той же части, не соединены между собой. Получается следующий граф:

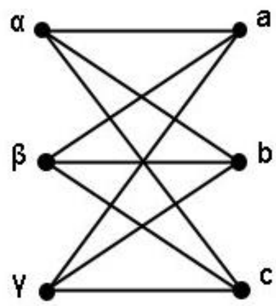


Рисунок 46 – Изображение графа к задаче 3

Задача 4. В агентстве по недвижимости работают менеджеры Игорь, Сергей и Пётр. Обслуживаются объекты O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7, O8. Построить граф для отображения отношений "Игорь работает с объектами O4, O7", "Сергей работает с объектами O1, O2, O3, O5, O6", "Пётр работает с объектом O8".

Решение. Граф, отображающий данные отношения, будет так же двудольным, так как менеджер не работает с менеджером и объект не работает с объектом. Однако, в отличии от предыдущего примера, граф будет ориентированным. В самом деле, например, Игорь работает с объектом O4, но не объект O4 работает с Игорем. Часто, когда такое свойство отношений очевидно, необходимость давать рёбрам направления может показаться лишним действием. Но всё же, и это вытекает из строгого характера математики, если отношение носит односторонний характер, то давать направления рёбрам нужно. В приложениях отношений эта строгость окупается, например, в программах, предназначенных для планирования, где тоже применяются графы и маршрут по вершинам и рёбрам должен проходить строго в заданном направлении. Итак, получается следующий ориентированный двудольный граф:

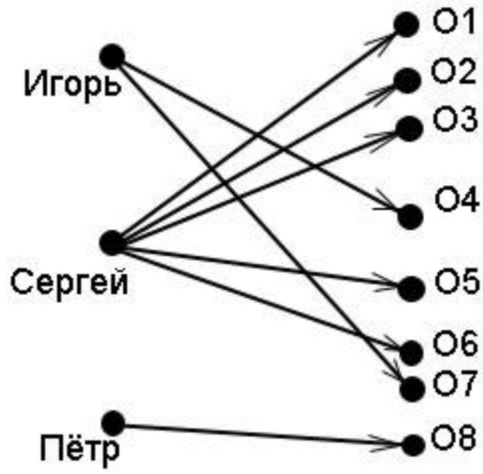


Рисунок 47 – Изображение графа к задаче 4

Задача 5. Пусть задано множество $C = \{2, 3, 5, 6, 15, 18\}$. Построить граф, реализующий отношение, определяющее все пары чисел a и b из множества C, у которых при делении второго элемента на первый получается частное, которое является целым числом больше 1.
Решение. Граф, отображающий данные отношения, будет ориентированным, так как в условии есть упоминание о втором и первом элементе, то есть, ребро будет направлено от первого элемента ко второму. Из этого однозначно понятно, какой элемент является первым, а какой вторым. В ориентированном рёбра называются дугами.

В этом графе будет 7 дуг: $e_1 = (3, 15)$, $e_2 = (3, 18)$, $e_3 = (5, 15)$, $e_4 = (3, 6)$, $e_5 = (2, 18)$, $e_6 = (6, 18)$, $e_7 = (2, 6)$. Рёбра (дуги) графа просто пронумерованы, но порядковые номера - не единственное, что можно приписать дуге. Дуге можно приписать также «весы» означающие, например, стоимость пересылки груза из одного пункта в другой. Получается следующий ориентированный граф:

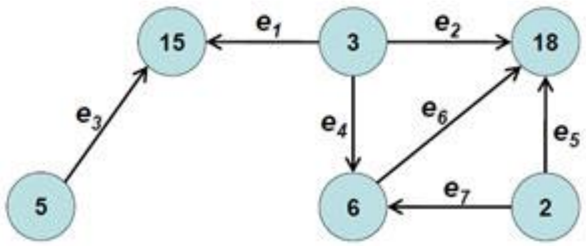


Рисунок 48 – Изображение графа к задаче 5

Так как теория графов не учитывает специфическую природу множеств и с помощью одного и того же графа можно задать отношения на множествах с самым разным содержанием. То есть, от этого самого содержания при моделировании задачи можно абстрагироваться. Следующая задача иллюстрирует это замечательное свойство теории графов.

Задача 6. На кусочке шахматной доски размером 3 X 3 размещены два белых коня и два чёрных коня так, как показано на рисунке 49.

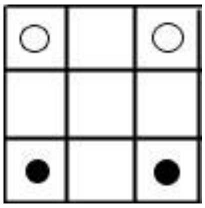


Рисунок 49 – Изображение графа к условию задачи 6

Можно ли переместить коней в состояние, которое изображено на следующем рисунке 50, не забывая, что две фигуры не могут находиться на одной клетке?

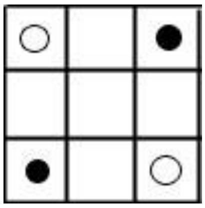


Рисунок 50 – Искомое изображение графа задачи 6

Решение. В конструируемом графе пары вершин будут связаны отношением "ход коня". То есть, одна вершина - та, из которой конь ушёл, а другая - та, в которую пришёл, а промежуточная клетка буквы "г" будет за пределами этого отношения. Получается граф, изображенный на рисунке 51.

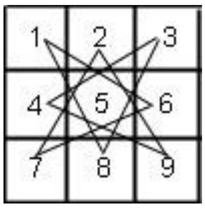


Рисунок 51 – Изображение возможного графа к задаче 6

Конструкция получилась громоздкой. В ней видны клетки шахматной доски, а многие рёбра графа пересекаются. Нельзя ли абстрагироваться от физического вида шахматной доски и вообразить отношения проще? Оказывается, можно. В новом графе соседними вершинами будут те, которые связаны отношением "ход коня", а не соседние по шахматной доске, как на рисунке 52 .

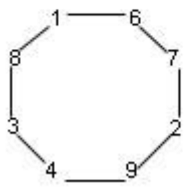


Рисунок 52 – Изображение упрощенного графа к задаче 6

Ответ на вопрос этой задачи - отрицательный. В начальном состоянии между двумя белыми конями нет чёрного коня, а в конечном состоянии этот чёрный конь должен быть. Рёбра графа размещены так, что два находящихся рядом коня не могут перепрыгнуть друг через друга.

Задача 7. Задача о волке, козе и капусте. На одном берегу реки находятся человек (Ч), лодка, волк (В), коза (Кз) и капуста (Кп). В лодке одновременно могут находиться человек и не более одного из перевозимых объектов. Человек должен перевезти на другой берег все объекты, соблюдая условие: нельзя оставлять без присмотра волка вместе с козой и козу вместе с капустой.

Решение. В конструируемом графе вершины - конфигурации, а рёбра - отношение "связь одним плаваньем лодки" между конфигурациями. Конфигурация означает расположение объектов на первоначальном берегу и на противоположном берегу. Каждая конфигурация отображается в виде $(A|B)$, где A - объекты, находящиеся на первоначальном берегу, а B - объекты, находящиеся на противоположном берегу. Первоначальная конфигурация, таким образом, - $(ЧВКпКз|)$. Например, после переправки на другой берег козы конфигурация будет $(ВКп|ЧКз)$. Конечная конфигурация всегда $(|ЧВКпКз)$. Теперь можно построить граф, зная уже, что означают вершины и рёбра:

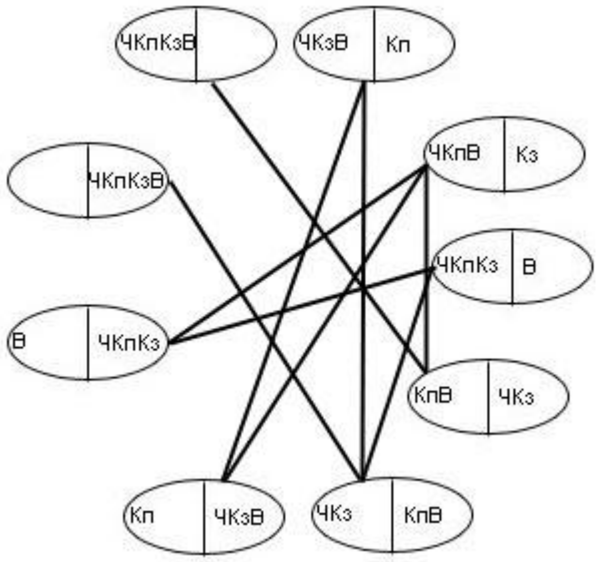


Рисунок 53 – Изображение общего графа к задаче 7

Вершины графа размещаются так, чтобы рёбра не пересекались, а соседними были вершины, которые связаны отношением на графе. Тогда увидеть отношения будет намного проще, как представлено на рисунке 54.

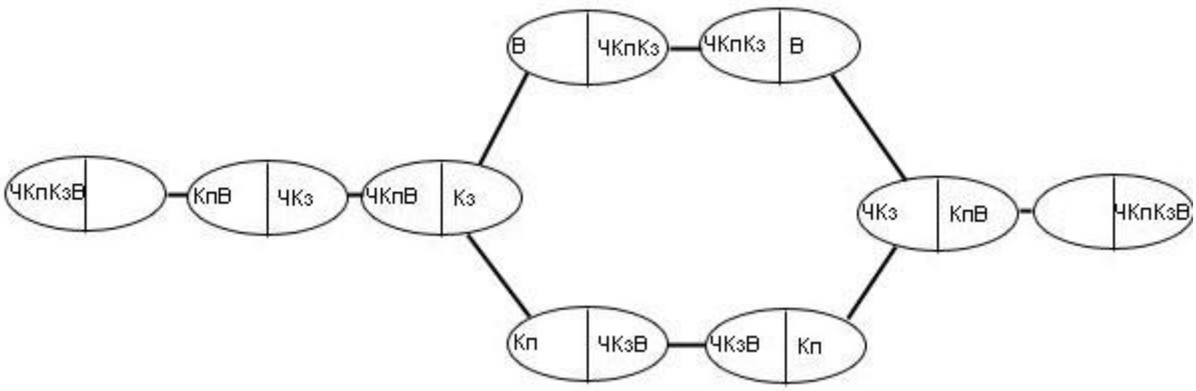


Рисунок 54 – Изображение конечного графа к задаче 7

Очевидно, существуют два различных непрерывных маршрута из начальной конфигурации в конечную. Поэтому задача имеет два различных решения (и оба правильные).

2.10 Теория графов и важнейшие современные прикладные задачи

На основе теории графов разработаны методы решения прикладных задач, в которых в виде графов моделируются весьма сложные системы. В этих моделях узлы содержат отдельные компоненты, а рёбра отображают связи между компонентами. Обычно для моделирования транспортных сетей, систем массового обслуживания, в сетевом планировании используются взвешенные графы. Графы – деревья применяются, например, для построения деревьев – решений (служат для анализа рисков, анализа возможных приобретений и убытков в условиях неопределенности). С применением теории графов разработаны многочисленные математические модели для решения задач в конкретных предметных областях.

2.10.1 Графы и задача о потоках

Постановка задачи. Имеется система водопроводных труб, представленная графом на рисунке 55.

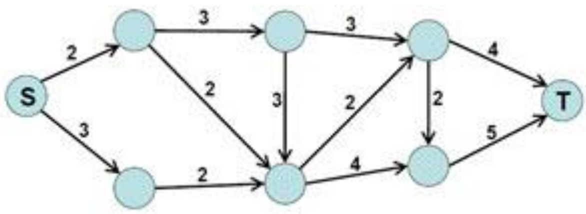


Рисунок 55 – Изображение системы водопроводных труб

Каждая дуга графа отображает трубу. Числа над дугами (весы) – пропускная способность труб. Узлы – места соединения труб. Вода течет по трубам только в одном направлении. Узел S – источник воды., узел T - сток. Требуется максимизировать объем воды, протекающей от источника к стоку. Для решения задачи о потоках можно воспользоваться методом Форда-Фалкерсона. Идея метода: поиск максимального потока производится по шагам. В начале работы алгоритма поток полагается равным нулю. На каждом последующем шаге значение потока увеличивается, для чего ищется дополняющий путь, по которому поступает дополнительный поток. Эти шаги повторяются до тех пор, пока существуют дополнительные пути. Задача успешно применяется в различных распределённых системах: система электроснабжения, коммуникационная сеть, система железных дорог и других.

2.10.2 Графы и сетевое планирование

В задачах сетевого планирования сложных процессов, состоящих из множества работ, часть которых выполняется параллельно, а часть последовательно, широкое применение получили взвешенные графы, известные под названием сети ПЕРТ (PERT - Program (Project) Evaluation and Review Technique - техника оценки и анализа программ (проектов), которая используется при управлении проектами. Эта сеть – взвешенный ориентированный граф, в котором каждая дуга представляет работу (действие, операцию), а вес дуги – время, требуемое для ее выполнения.

Если в сети есть дуги (a, b) и (b, c), то работа, представленная дугой (a, b), должна быть завершена до начала выполнения работы, представленной дугой (b, c). Каждая вершина $(v$i) представляет момент времени, к которому должны быть завершены все работы, задаваемые дугами, оканчивающимися в вершине $(v$i).

В таком графе одна вершина, не имеющая предшественников, определяет момент времени начала работ; одна вершина, не имеющая последователей, соответствует моменту времени завершения комплекса работ.

Путь максимальной длины между этими вершинами графа (из начала в конец процесса выполнения работ), называется критическим путём. Для сокращения времени выполнения всего комплекса работ необходимо найти работы, лежащие на критическом пути, и уменьшить их продолжительность за счёт, например, привлечения дополнительных исполнителей, механизмов, новых технологий.

Виды графов могут определяться общими принципами их построения (таковы, например, двудольный граф и эйлеров граф), а могут зависеть от тех или иных свойств вершин или рёбер (например, ориентированный и неориентированный граф, обыкновенный граф).

2.10.3 Граф - дерево

Всем известно понятие «родословное дерево» и каждый может изобразить в такой форме свои родственные отношения. Каталог файлов на диске, также как и библиотечный каталог — примеры информационных

моделей в форме дерева. Особым видом графа является дерево. Данная форма модели применяется тогда, когда элементы моделируемого объекта находятся в состоянии какого-либо подчинения и соподчинения, когда есть отношение иерархичности. Модель управления предприятием (школой, театральным коллективом и т. д.) очень удобно представлять в виде дерева.
Вопрос: можно ли поместить слона в компьютер? Ответ: можно, если слона смоделировать в виде графа, в котором вершинами являются части его тела, а рёбра соединяют те части тела, которые соединены в слоне как биологическом объекте. При этом получившийся граф должен быть представлен в памяти компьютера в понятном компьютеру виде.

Метод дерева решений применяется в задачах классификации и прогнозирования, когда решения приходится принимать в условиях риска, неопределённости и исход событий зависит от вероятностей. На каждое решение влияют какие-то определённые факторы, и у каждого решения есть свои последствия, которым присущ вероятностный характер. В этих условиях процесс принятия решений является последовательным и *метод дерева решений* предполагает определять, какие действия следует предпринять в каждой вершине дерева.

Дерево решений - математическая модель, которая задаёт процесс принятия решений так, что будут отображены каждое возможное решение, предшествующие и последующие этим решениям события или другие решения и последствия каждого конечного решения.

Дерево игры очень похоже на дерево решений.

Теория игр вообще занимается попыткой выразить особенности столкновения интересов через действия, которые имеют место в салонных играх. Правила любой салонной игры устанавливают последовательность вполне определённых ходов, причём каждый ход для данного игрока соответствует выбору одной из множества альтернатив. В игре нужно учитывать все ходы, предшествующие данному ходу, и все возможные ходы, следующие за ним. Таким образом, значение каждого хода в игре зависит от других ходов. Если создать отвлечённое представление всех ходов игры и указать, какие выборы привели к каждому ходу, то можно узнать отвлечённую связь каждого хода со всеми другими ходами, которые повлияли на него или на которые он может повлиять.

2.10.4 Граф – математическая модель

Математические модели создаются с целью лучшего понимания изучаемого явления. Достаточно сложные системы невозможно анализировать без помощи упрощённых моделей. Исследование системы с перенесением его свойств на модель называется моделированием. Математическое моделирование позволяет абстрагироваться от физических и прочих специфических свойств объекта. Математическая модель - это упрощённое и самодостаточное в понятийном плане отображение реальности. Математическая модель - задание системы или явления любого происхождения и любой природы в виде математических объектов и взаимосвязей. Математическая модель - приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

2.10.4.1 Виды математических моделей в виде графа

1. Блок-схема компьютерной программы (вершины - команды, рёбра - переходы между команды), используемая для разработки и тестирования самой программы.

2. Граф подпрограмм (вершины - подпрограммы, рёбра - порядок вызова подпрограмм), используемый для проектирования и анализа компьютерных программ.

3. Граф структуры данных (вершины - данные или простейшие типы данных, рёбра - отношения между данными), используемый для проектирования и оптимизации структур данных.

4. Граф зависимости команд машинного кода (вершины - команды, рёбра - зависимости между командами), используемый в оптимизационном компилировании и конвейеризации работы процессора.

5. Граф процессов операционной системы (вершины - процессы операционной системы, рёбра - акты генерирования процессов), используемый в моделировании работы операционной системы.

6. Граф конечного автомата (вершины - состояния автомата, рёбра - переходы), используемый в исследовании конечных автоматов и языков и в инженерии программного обеспечения.

7. Граф утверждений математической теории (вершины - утверждения, рёбра - отношения логического следования), используемый для доказательства математических заключений и анализа математических теорий.

8. Функциональный граф (вершины - элементы множества, рёбра - отношения логического следования), имеющий широкое использование в математике.

9. Граф величин-зависимостей (вершины - численные величины и взаимосвязи между ними, рёбра - отношения вовлечённости величины), используемый в решении различных математических задач.

10. Граф метрики (вершины - любые физические или нефизические объекты или их множества, рёбра - геометрическая, структурная, функциональная или эволюционная близость этих объектов), используемый для анализа больших множеств.

11. Дерево решений (вершины - критические состояния, рёбра - решения), используемый в принятии решений в экономике, управлении, диагностике инженерных систем.

12. Системный граф (вершины - компоненты системы, рёбра - взаимодействие компонент), используемый в проектировании и анализе систем.

13. Граф обратных связей (вершины - параметры какого-либо процесса, ориентированные рёбра с весами "+" или "-" - зависимость изменений параметров, соответствующих вершинам), используемый в исследованиях изменений составных частей процессов или объектов.

14. Граф причинно-следственных связей (вершины - состояния какой-либо системы, ориентированные рёбра - причинно-следственные связи), используемый в исследованиях больших систем и сложных процессов.

15. Граф конфликтов (вершины - состояния какой-либо системы, рёбра - конфликты между состояниями), используемый в анализе систем.

16. Граф игры (вершины - игровые состояния, рёбра - разрешённые правилами игры переходы между состояниями (ходы)), используемый в разработке победных стратегий в играх.

17. Компьютерная сеть (вершины - компьютеры или коммуникационные узлы, рёбра - линии связи), используемая в проектировании и анализе компьютерных сетей.

18. Социальный граф (вершины - люди или множества людей, рёбра - отношения знакомства, экономические отношения или другие отношения), используемый в анализе общества и планировании развития.

19. Организационный граф (вершины - люди или множества людей, рёбра - отношения, характеризующие организации, например, частные фирмы, иерархии), используемый в создании организаций и управлении ими.

20. Граф проекта (вершины - работы или состояния проекта, рёбра - отношения между работами или работы, соединяющие состояния), используемый в руководстве проектами.

21. Генеалогическое древо (вершины - люди, рёбра - отношение "родители-дети"), используемый в личных исследованиях.

22. Граф экономических агентов (вершины - экономические агенты - люди, фирмы и др., рёбра - экономические отношения), используемый в экономических исследованиях и планировании.

23. Макроэкономический граф финансового потока (вершины - отрасли экономики, рёбра - финансовые потоки), используемый в экономических исследованиях и планировании.

24. Граф дорог (вершины - города, рёбра - дороги), используемый в развитии транспортной сети.

25. Граф улиц (вершины - перекрёстки, рёбра - улицы), используемый в анализе и планировании потока городского транспорта.

26. Граф электрической цепи (вершины - электромагнитно-активные элементы, рёбра - провода и контакты), используемый в построении и анализе электрических счем.

27. Цепь питания (вершины - породы животных, рёбра - отношения питания), используемый в анализе биосистем.

28. Дерево эволюции (вершины - породы или популяции, рёбра - отношения эволюционного происхождения), используемый в биологии.

29. Граф химических реакций (вершины - векторы количества химических веществ, рёбра - химические реакции), используемый в анализе химических реакций.

30. Граф предшественников химического вещества (вершины - химические вещества, полученные в процессе производства, рёбра - изменения веществ-предшественников в процессе производства), используемый в химической промышленности.

31. Граф реакционной способности химических веществ (вершины - химические вещества, рёбра - способности к реакции), используемый в анализе сложных химических реакций.

32. Граф взрывоопасности (вершины - химические вещества, рёбра - возможности взрывной реакции между ними), используемый для нужд безопасности труда.

33. Граф помех радиосвязи (вершины - радиостанции, рёбра - взаимное перекрытие полос радиоволн), используемый в планировании радиосвязи.

34. Политический граф (вершины - государства, рёбра - границы), используемый в геополитике.

35. Граф кровеносных сосудов (вершины - узлы кровеносных сосудов, рёбра - кровеносные сосуды), используемый в медицине.

36. Граф нейронов (вершины - нейроны, рёбра - места соприкосновения нейронов), используемый в медицине.

37. Граф приготовления кулинарного изделия (вершины - состояния готовности кулинарного изделия, рёбра - переходы между состояниями в процессе приготовлении), используемый в кулинарии.

2.11 Задачи для самостоятельного решения

1. В железнодорожной сети 15 станций, где каждая станция соединена железной дорогой не менее, чем с семью другими. Доказать, что из любой станции можно проехать до любой другой либо напрямую, либо через одну промежуточную станцию.

2. В стране N 100 вокзалов. От любого вокзала до любого другого можно проехать. Через один из вокзалов хотят закрыть проезд так, чтобы между всеми остальными был возможен проезд. Доказать, что такой вокзал найдется.

3. В стране Z каждые 2 города соединены железными дорогами с односторонним движением. Доказать, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более, чем по двум железнодорожным путям.

4. В сети железных дорог на каждом перекрестке сходятся четное число железных дорог. Известно, что с любого железнодорожного пути этой сети можно проехать на любой другой. Доказать, что все пути этой сети можно объехать, побывав на каждой станции по одному разу.

5. На карте выбраны пять городов. Среди них из любых трех найдутся два, соединенные железной дорогой, а два- несоединенные. Доказать:1)

Каждый город соединен железной дорогой непосредственно только с двумя другими.2) Выехав, из любого города, можно объехать остальные, побывав в каждом по разу и вернуться назад.

6. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1,2,3.4,5,6,7,8,9. Путешественник обнаружил, что два города соединены железной дорогой в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на три. Можно ли доехать из города 1 в город 9?

7. В школе в классе учится тридцать человек. Может ли быть так, что в этом классе девять человек имеют по три друга, одиннадцать - по четыре друга, а десять- по пять друзей?

8. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист объехал все острова, проехав по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:

1) Не с него начал и не на нем закончил?

2) С него начал, но не нем закончил?

3)С него начал и на нем закончил?

9. В обеденный перерыв члены бригады разговорились о том, кто сколько газет читает. Выяснилось, что каждый выписывает и читает две и только две газеты, каждую газету читает пять человек, и любая комбинация читается одним человеком. Сколько различных газет выписывают члены бригады? Сколько человек в бригаде?

10. Шесть учеников школ участвуют в круговом шахматном турнире. Доказать, что среди них найдутся три участника, которые уже провели все встречи между собой или еще не сыграли друг с другом ни одной партии?

11. На сайте сотрудников некоторого предприятия ведется активная переписка, в которой участвуют пять человек. Доказать, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые все переписываются между собой.

12. На банкет, посвященному дню рождения ОАО «ООО», приехало множество людей из различных уголков страны. Один из гостей сказал: « Здесь не найдется девяти человек таких, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими». Прав ли он?

13. Один из ребят, ученик школы, сказал: «А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками!» «Не может быть этого», - ответил ученик этой же школы, победитель олимпиады. Почему он так ответил?

14. В олимпиаде по математике была задача: Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найти пять последних цифр последовательности.

15. В Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят-железнодорожников из Москвы, Волгограда, Новгорода, Перми, Томска: Юра, Толя, Алеша, Коля и Витя. Москвич сидел между Томичем и Витей, житель Волгограда- между Юрой и Толей, а напротив него сидел пермяк и

Алеша. Коля никогда не был в Волгограде, Юра не бывал в Москве и Томске, а Томич с Толей регулярно переписываются. Определить, кто в каком городе живет.

16. В детском саду в одной из групп 28 детей. Каждая девочка дружит с четырьмя мальчиками, а каждый мальчик- с тремя девочками. Сколько в группе девочек и сколько мальчиков?

17. Ранним утром машинисты Михаил, Иван, Алексей обменялись приветствиями каждый с каждым. Сколько всего было приветствий. Решить задачу с помощью графа.

18. В поезде ехали три друга: Коля, Андрей и Саша. Известно, что в купе №1 и 2 ехал не Коля. Андрей ехал не в купе №1. В каком купе ехал каждый из друзей?

19. Из города А в город Б ведут две железные дороги, из города Б в городок В -тоже две железные дороги и из города А в город В – тоже две дороги. Нарисовать схему и сосчитать все возможные пути из города А в город В.

2.12 Вопросы для самоконтроля по разделу 2 Графы

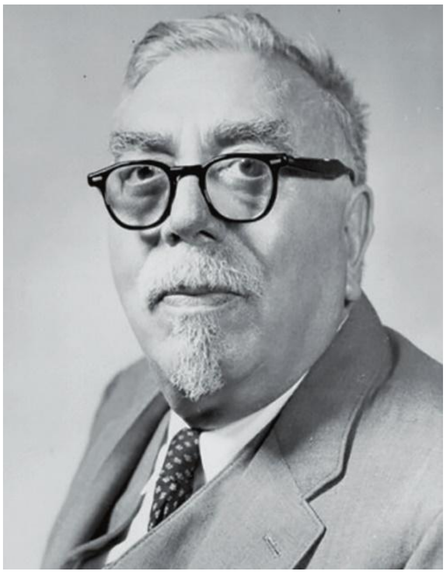
1. Что такое граф?
2. Сформулируйте понятие ориентированного, неориентированного графов.
3. Что называется петлей в графе?
4.Изобразите пустой граф.
5. Изобразите нулевой граф.
6. Дайте понятие полного графа.
7. Какой граф называется взвешенным?
8.Что такое подграф?
9. Что называется объединением графов?
10. Что называется пересечением графов?
11. Что называется соединением графов?
12. Что называется кольцевой суммой графов?
13. Что такое маршрут в графе?
14. Что такое цепь в графе?
15. Постройте свое генеалогическое дерево.

3 Биографическая справка

БОЛЬЦАНО, БЕРНАРД (5.10.1781-18.12.1848) - чешский математик, философ и логик.

При жизни Больцано напечатал только пять небольших математических сочинений и ряд философских трудов, вышедших анонимно. Большой математический труд Больцано "Учение о функциях", написанный в 1830, увидел свет только через 100 лет. В нем, в частности, Б. (за 30 лет до К. Вейерштрасса) строит пример непрерывной кривой, не имеющей касательной ни в одной точке. Бернард установил современное понятие сходимости рядов и за несколько лет до выхода в свет "Алгебраического анализа" О .Л. Коши пользовался критерием сходимости, именуемым обычно критерием Коши. Теорему, устанавливающую, что всякое бесконечное множество чисел, заключенных в замкнутом интервале, имеет в нем по меньшей мере одну предельную точку, Больцано упоминает за много лет до того, как ее сформулировал К. Т. В. Вейерштрасс. Уточнив понятия предела и непрерывности, он впервые строго доказал теорему о том, что непрерывная функция принимает любое промежуточное значение, лежащее между двумя ее разными значениями. В "Парадоксах бесконечного" (издано в 1851), написанных Больцано в последний год жизни, содержится определение бесконечного множества как равномощного своей правильной части, здесь Больцано явился предшественником Г. Кантора - творца теории множеств. В начале 30-х годов 19 в. Больцано сделал попытку построения теорий действительных чисел, которая после некоторых уточнений совпадает с теорией Г. Кантора. В классическом анализе и теории функций известен принцип выбора Больцано, лемма Больцано - Вейерштрасса об ограниченной последовательности и др.

ВИНЕР, НОРБЕРТ (Wiener, Norbert) (1894–1964), американский математик.



Мальчик был вундеркиндом: в возрасте трех лет он начал читать и писать, семи лет читал Дарвина и Данте, в одиннадцать окончил среднюю школу, в четырнадцать – Тафтс-колледж. Учился в Гарвардском университете, в 17 лет стал магистром искусств, в 18 – доктором философии по специальности «математическая логика». Первую математическую работу Винер опубликовал в 19 лет. В 1932 получил звание профессора МТИ. В 1945–1947 Винер заинтересовался системами с обратной связью и проблемами передачи, хранения и переработки информации. Новую науку – общую теорию управления и связи – он назвал кибернетикой. В 1948 вышла книга Винера *Кибернетика*, живо воспринятая мировым научным сообществом. Под влиянием высказанных в ней идей возникло немало научных направлений и появилась масса научных работ.

ГЕДЕЛЬ, КУРТ (Родился 28 апреля 1906 в Брно. Умер в Принстоне 14 января 1978.)

Австрийский математик. В 1924 году поступил в Венский университет, в 1930 защитил докторскую диссертацию по математике. В 1933– 1938 – приват-доцент Венского университета; в 1940 эмигрировал в США. С 1953 и до конца жизни – профессор Принстонского института перспективных исследований. Диссертация Гёделя была посвящена проблеме полноты. В1930-е годы были получены некоторые результаты о полноте различных аксиоматических систем. Так, Гильберт построил искусственную систему, охватывающую часть арифметики, доказал ее полноту и непротиворечивость. Гёдель в своей диссертации доказал полноту исчисления предикатов первой ступени, и это дало надежду математикам на то, что им удастся доказать непротиворечивость и полноту всей математики. Однако уже в 1931 тот же Гёдель доказал теорему о неполноте, нанесшую сокрушительный удар по этим надеждам.

В то время Давид Гильберт и другие великие ученые пытались свести всю математику к системе аксиом. Но Гедель доказал, что это не совсем реально. Работа Геделя произвела эффект разорвавшейся бомбы. Она заставила фон Неймана прервать курс лекций в Геттингене, а Гильберта - прекратить работу над своей программой.

Согласно теореме Геделя о неполноте, любая процедура доказательства истинных утверждений элементарной теории чисел обречена на неполноту. Следовательно, внутренняя непротиворечивость любой математической теории не может быть доказана иначе, как с помощью обращения к другой теории, использующей более сильные допущения, а значит, менее надежной.

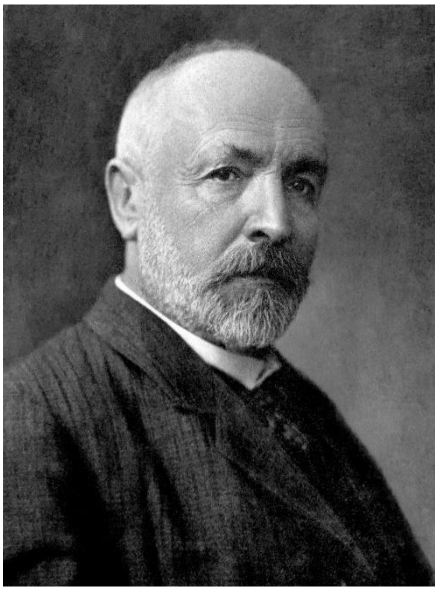
Методы, использованные Гёделем при доказательстве теоремы о неполноте, сыграли в дальнейшем важную роль в теории вычислительных машин.

Гёдель внес важный вклад в теорию множеств. Два принципа – аксиома выбора и континуум-гипотеза – на протяжении десятилетий не поддавались доказательству, но интерес к ним не ослабевал: слишком привлекательны были их логические следствия. Гёдель доказал (1938), что присоединение этих принципов к обычным аксиомам теории множеств не приводит к противоречию.

ДЕДЕКИНД, РИХАРД ЮЛИУС ВИЛЬГЕЛЬМ (Dedekind Richard) (6.10.1831-12.2.1916) - немецкий математик, член Берлинской Академии Наук (1880г.).

Работал в Цюрихском университете, с 1862г. - профессор Высшей технической школы в Браупшвейге. Основные труды по теории алгебраических чисел. Изложил их в "Одиннадцатом дополнении" к "Лекциям по теории чисел" Дирихле. В трудах Дедекинда заложены основы современной алгебры, изучающей произвольные поля, кольца, группы, структуры и модули. В частности, ввел понятие кольца и (независимо от Е. И. Золотарева) дал современное общее определение идеала. В ходе работ по теории идеалов Дедекинд пришел к рассмотрению понятия упорядоченного множества в более общей форме, чем у Г. Кантора. Одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел. Сформулировал (1888г.) систему аксиом арифметики (ее обычно называют аксиомами Пеано), содержащую, в частности, точную формулировку принципа полной математической индукции. Ввел в математику в самом общем виде теоретико-множественное понятие отображения. С именем Дедекинда связаны многочисленные математические утверждения и термины: кольцо, поле, структуры, сечения, функции, теоремы, принцип взаимности.

КАНТОР, ГЕОРГ ФЕРДИНАНД ЛЮДВИГ ФИЛИПП (Родился: 3 марта 1845 в Санкт-Петербурге, Россия. Умер: 6 января 1918 в Галле, Германия).



Отец Георга Кантора Вальдемар Кантор работал оптовым агентом в Санкт-Петербурге, а позже брокером на Фондовой бирже Санкт-Петербурга. Он родился в Дании и был человеком неравнодушным к культуре и искусству. Мать Георга, Мария Анна Бохм, была русской и увлекалась музыкой. И конечно же, Георг унаследовал немалые музыкальные и художественные дарования от своих родителей, став выдающимся виолончелистом.

После начальных занятий с домашним учителем, Кантор стал посещать школу в Санкт-Петербурге, затем, когда ему исполнилось 11 лет, его семья уехала в Германию. Однако, Кантор: *вспоминал свои детские годы в России с большой ностальгией, и никогда не чувствовал себя легко в Германии, хотя* *прожил там всю оставшуюся жизнь и, по-видимому, никогда не писал на русском языке, который знал.*

Сначала они жили в Вьезбадене, где Кантор стал посещать гимназию, а потом они переехали во Франкфурт, где он стал учиться в Realschule в Дармштадте и жить на пансионе. Realschule он закончил в 1860 с отличием, в котором было указано на особые способности в математике, особенно в геометрии. В 1862 году он поступил в политехнический институт в Цурихе. Отец хотел, чтобы Кантор стал ... *светилом технического "мира"*. Но Кантору удалось получить отцовское разрешение на изучение математики в Университете. Его обучение в Цурихе, однако, прекратилось из-за смерти отца в июне 1863 года. Кантор перевелся в Университет в Берлине, где он подружился с Германом Шварцом, который учился с ним в одной группе. Кантор посещал лекции Вейерштрасса , Каммера, и Кронеккера. В 1867 году он завершает свою диссерта*цию по теории чисел De aequationibus secondi gradus indeterminatis*. После переезда в Холл направление исследований Кантора сменилось от теории чисел к анализу. Это случилось благодаря Гейну, который предложил Кантору доказать единственность представления функции в виде тригонометрического ряда. Это была трудная задача, которую пытались решить многие математики, такие как Дирихле, Липшиц, Риман, и безуспешно. Кантор решил эту задачу, доказав единственность представления в апреле 1870.

В 1873 году Кантор доказал счетность множества рациональных чисел. В декабре 1873 года он доказал, что действительные числа не являются счетными и опубликовал это в своем труде в 1874 году.

Следующий вопрос, который его заинтересовал, это можно ли установить взаимно однозначное соответствие между единичным квадратом и отрезком единичной длины. В письме Дедекинду от 5 января 1874 года он писал: - Может ли поверхность (скажем, квадрат вместе со своей границей) быть единственным образом преобразованным в линию (скажем, прямолинейный сегмент вместе с конечными точками (отрезок)) да так, что у каждой точки квадрата будет свой образ на отрезке и наоборот? Я думаю, что ответ на этот вопрос будет не так легко найти, несмотря на тот факт, что ответ кажется понятным "НЕТ", и доказательство кажется почти ненужным.

1874 год был очень важным для личной жизни Кантора. Он был помолвлен с Валли Гуттманн, подругой его сестры. Они поженились 9 августа 1874 года и провели свой медовый месяц в Интерлейкен в Швейцарии, где Кантор провел много времени в математических дискуссиях с Дедекиндом.

Кантор продолжил переписку с Дедекиндом. В 1877 в письме к Дедекинду он приводит доказательство, что существует взаимно однозначное соответствие точек числового интервала (0,1) и точек p-мерного пространства. Кантор был удивлен собственному открытию и написал : Я вижу, но я не верю!

Конечно, этот факт имел свои следствия в геометрии и теории размерности пространств. Основной труд о размерности, который Кантор представил на рассмотрение в Crelle's журнал в 1877 году был подвергнут сомнениям Кронеккером, и был опубликован после вмешательства Дедекинда. Кантор очень обиделся на противостояние Кронеккера и никогда больше не предоставлял на рассмотрение дальнейшие труды в этот журнал.

Труд о размерности, который появился в Crelle's журнале в 1878 году сделал концепцию взаимно однозначного соответствия общепринятой. Между 1879 и 1884 годами Кантор опубликовал серию из 6 трудов в Mathematische Annalen с целью представить основной вводный курс в теорию множеств.

Пятый труд из этой серии Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre был также опубликован как отдельная монография, что было очень важным по нескольким причинам. В первую очередь, Кантор осознал, что развитая им теория множеств не получала широкого признания среди математиков, на которое он надеялся.

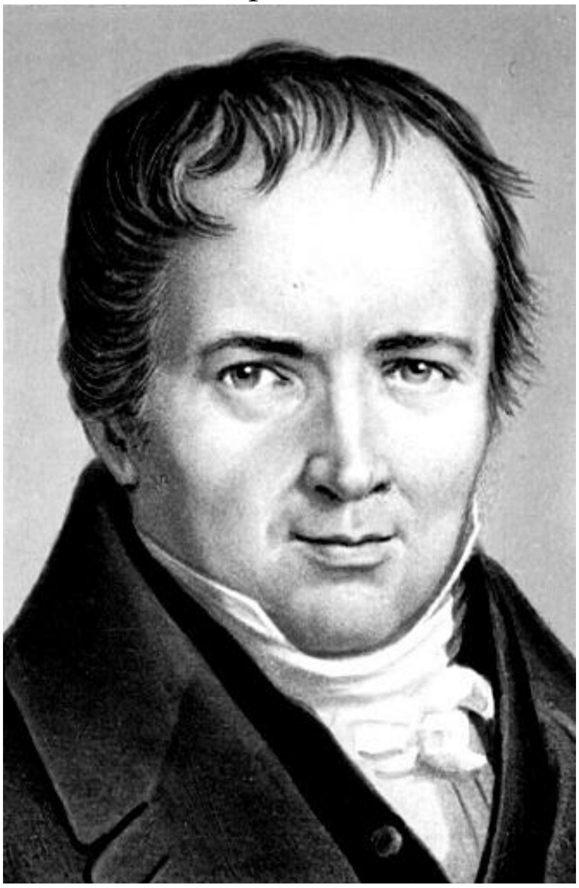
В конце мая 1884 года у Кантора был первый приступ депрессии. Казалось, что этот упадок был из-за его творческих переживаний. В этот период Кантор размышлял над доказательством континуум-гипотезы о том, что порядок бесконечного множества действительных чисел следующий за порядком натуральных чисел. Его беспокоило, что он не может ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу. Одно время он думал, что доказал ложность данного утверждения, но затем понял, что ошибался. Затем ему казалось, что он установил истинность данного утверждения, но вновь находил ошибку в своих рассуждениях.

Кантор был избран президентом Deutsche Mathematiker-Vereinigung на первом собрании в 1891 году и продержался на этом посту до 1893 года. Его последние труды по теории множеств появились 1895 и 1897 годах, снова в Mathematische Annalen и были прекрасными исследованиями трансфинитивной арифметики.

В 1897 Кантор посетил первый Международный Конгресс Математиков в Цюрихе. На Конгрессе Кантор встретил Дедекинда и они возобновили дружбу. Ко времени Конгресса Кантор обнаружил первый из парадоксов в теории множеств и написал Гильберту в 1896, объясняя парадокс ему. На конгрессе работы Кантора были поддержаны многими выдающимися математиками того времени. Гурвиц открыто выражал большое восхищение Кантором и объявил его одним из тех, благодаря кому теория функций была существенно обогащена. Жак Адамар выразил мнение, что понятия теории множеств являются важным аппаратом, необходимым для дальнейшего развития математики. Именно на этом конгрессе Давид Гильберт произнес свою знаменитую фразу: “Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного Кантором”.

Кантор удалился от дел в 1913 и провел свои последние годы больным. Он умер от сердечного приступа. Гильберт описал работы Кантора как «Самое прекрасное произведение математического гения и одного из высших достижений вполне интеллектуальной человеческой деятельности».

ПУАССОН, СИМЕОН ДЕНИ (Poisson, Simeon-Denis) (1781–1840), французский математик, механик и физик.



В 17 лет Пуассон поступил в Политехническую школу в Париже, в 1809 он стал профессором Парижского университета. Пуассона интересовали применения математики к механике и физике, которые привели его к открытиям в чистой математике. В 1811 он вывел получившее широкое применение уравнение, связывающее электрический потенциал с плотностью пространственного распределения заряда (уравнение Пуассона). Занимаясь теорией азартных игр, ввел одно из важнейших распределений вероятностей случайных величин (распределение Пуассона) и доказал теорему Пуассона, являющуюся частным случаем закона больших чисел. О том, насколько плодотворной и многосторонней была его деятельность, можно судить по таким терминам, как «скобки Пуассона» (теория дифференциальных уравнений), «коэффициент Пуассона» (теория упругости), «интеграл Пуассона» (интегральное исчисление) и т.д., фигурирующих в учебниках по математике, механике, физике.

Заключение

Область применения теории множеств и теории графов широка. Теория множеств используется, например, в теории вероятностей при изучении событий и операций над событиями. Операции над событиями, по сути, то же самое, что и операции над множествами. Теория графов не учитывает конкретную природу множеств *A* и *B*. Существует большое количество самых разных конкретных задач, при решении которых можно временно забыть о специфическом содержании множеств и их элементов. Эта специфика никак не сказывается на ходе решения задачи, независимо от её трудности! Например, при решении вопроса о том, можно ли из точки *a* добраться до точки *e*, двигаясь только по соединяющим точки линиям, неважно, имеется дело с людьми, городами, числами и т.д. Но, когда задача решена, получается решение, верное для любого содержания, которое было смоделировано в виде графа. Не удивительно поэтому, что теория графов - один из самых востребованных инструментов при создании искусственного интеллекта: ведь искусственный интеллект может обсудить с собеседником и вопросы любви, и вопросы музыки или спорта, и вопросы решения различных задач, причем делает это без всякого перехода (переключения), без которого в подобных случаях не обойтись человеку. В связи с широким применением графов в программировании и информационных технологиях вообще возникает вопрос о представлении графа в виде структуры данных. Различные способы представления графов в памяти компьютера отличаются объёмом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций над графами.

Список использованных источников

Основные источники

1 Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.- 368 с.

2 Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.- 455 с.

3 Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.- 416 с.

Дополнительные источники

4 Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М.: Наука. 1965.

5Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит. 2004. – 256 с.

Интернет – ресурсы:

6 http: // www.math test.ru.

7 http: // www.webmath.ru.

8 http: // e - scince.ru.

6 http: // mathem lib.ru

Приложение А

Гамильтонов граф

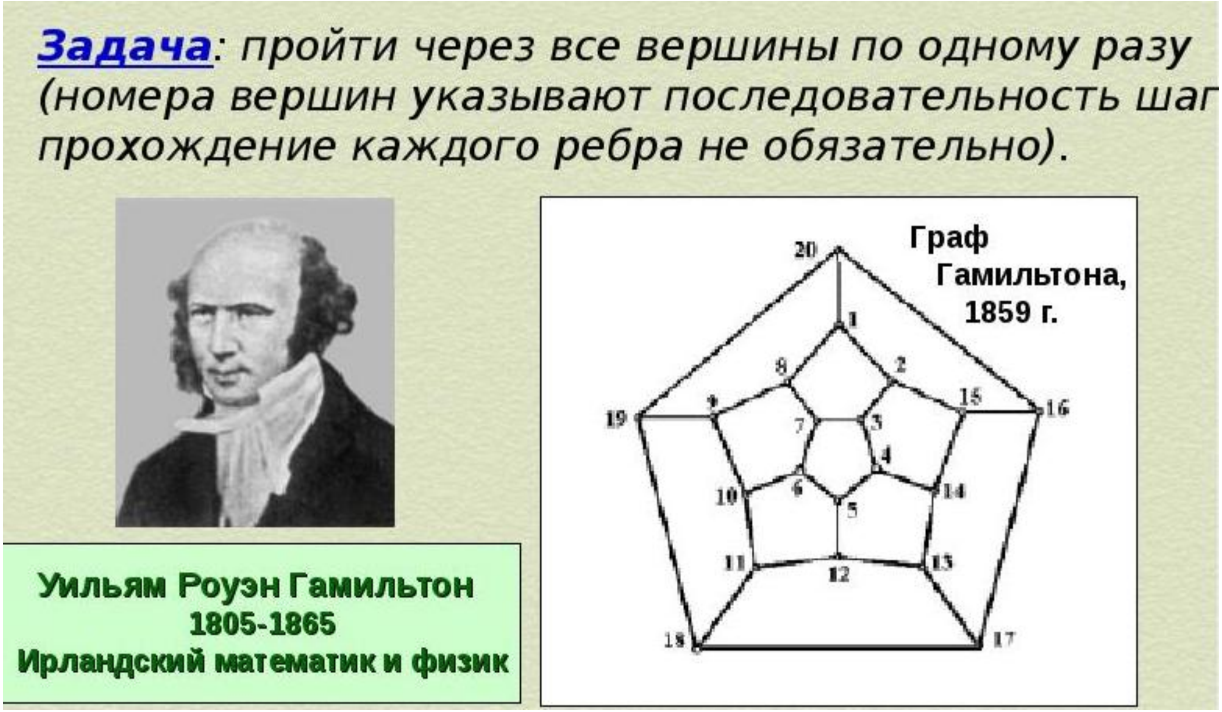


Рисунок А.1 – Граф Гамильтона

Приложение Б

Графы – деревья

Рисунок Б.1 – Структура Российской Федерации

Рисунок Б.2 – Геометрические объекты

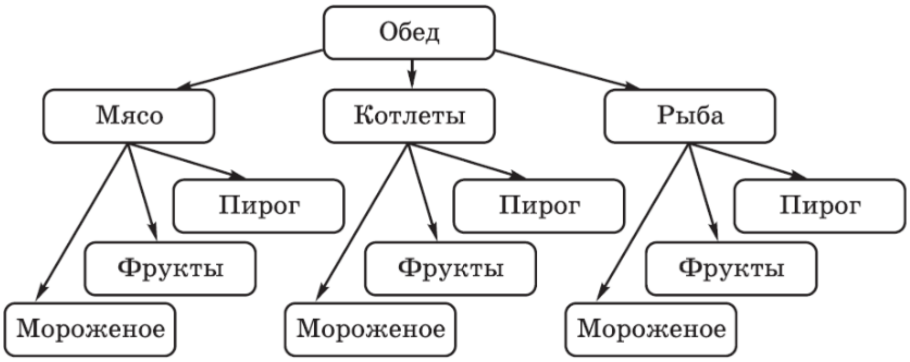


Рисунок Б.3 – Состав обеда

Приложение В
Графы в информатике и программировании

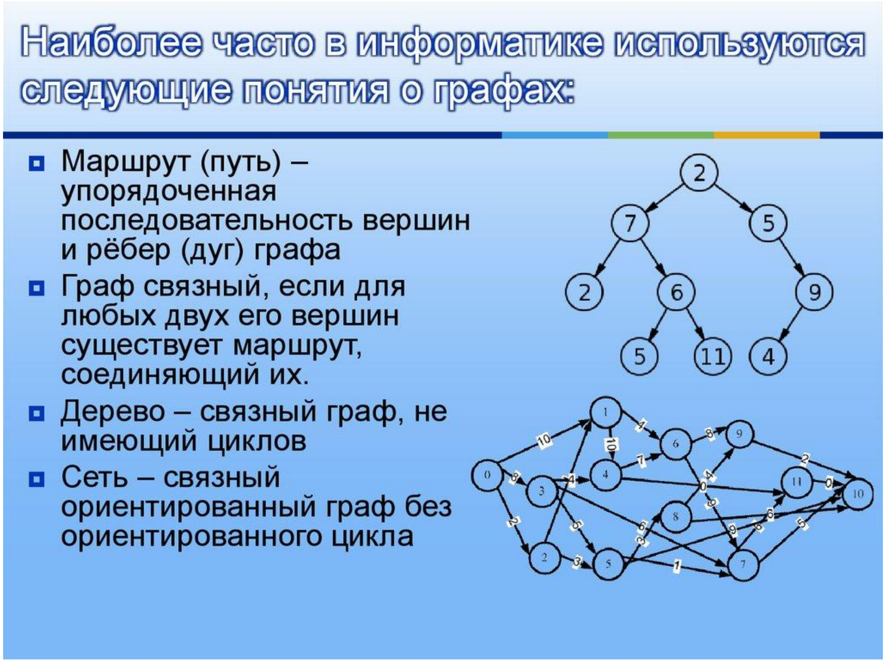


Рисунок В.1 – Графы в информатике

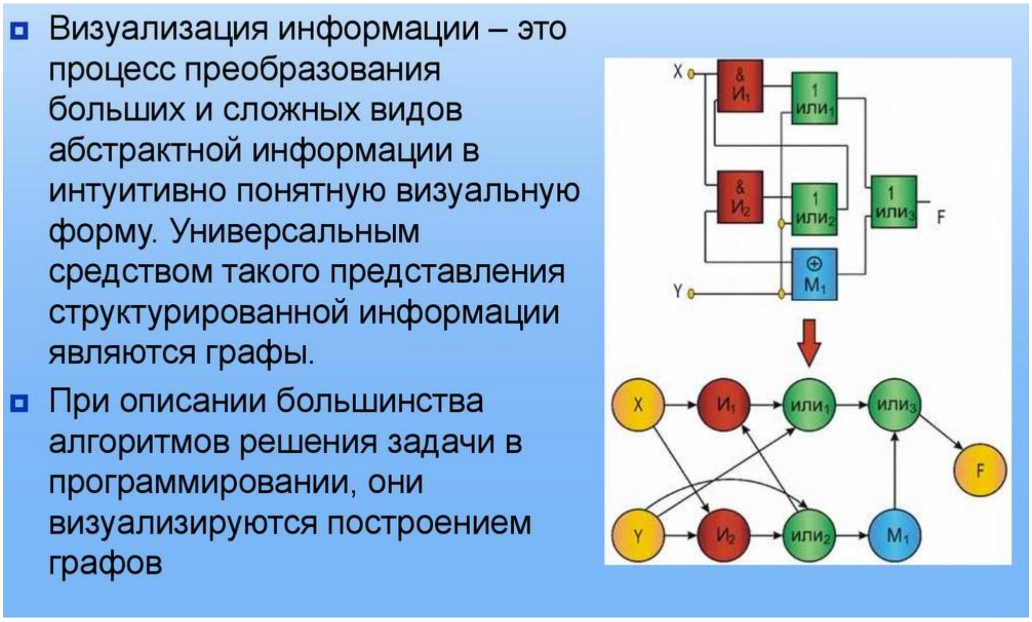


Рисунок В.2 – Графы в программировании

Приложение Г

Теория графов в теории раскрасок и информации

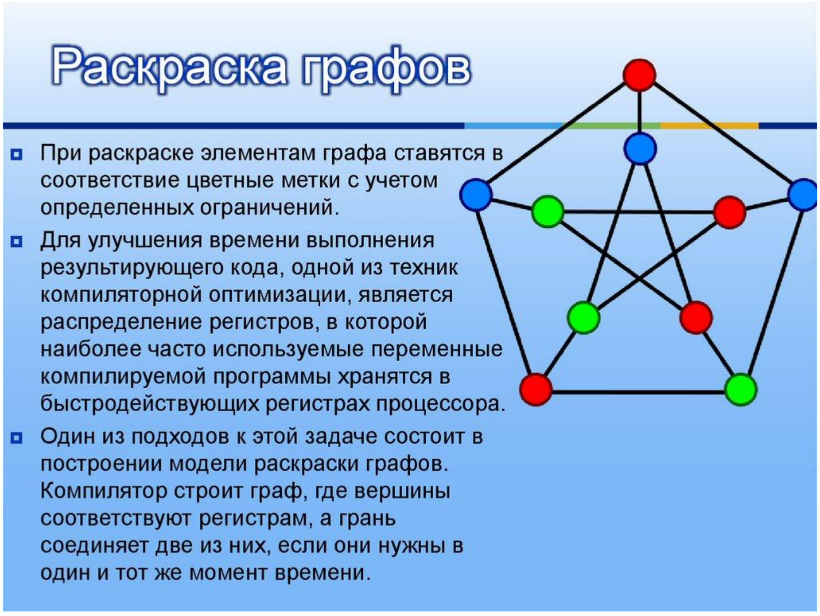


Рисунок Г.1 – Раскраска графов

Рисунок Г.2 – Графы в теории информации

Приложение Д

Сетевые модели

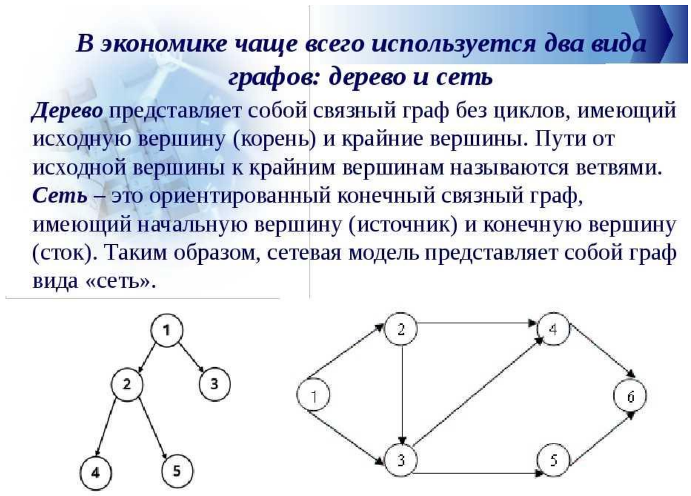


Рисунок Д.1 – Сетевая модель в экономике

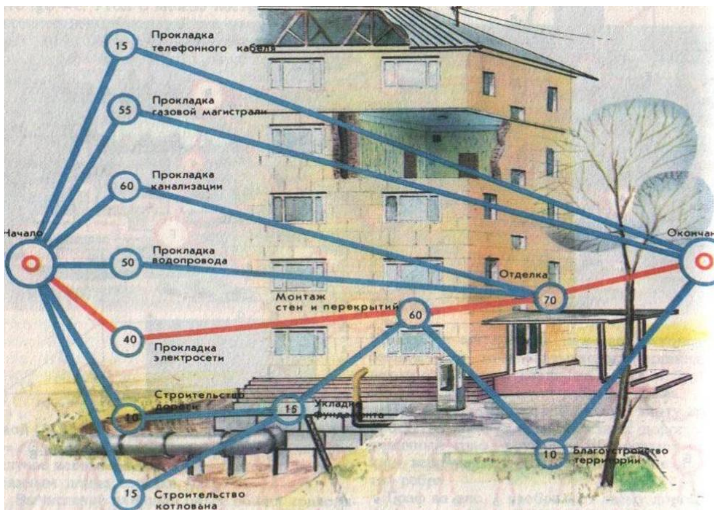


Рисунок Д.2 – Сетевая модель в строительстве

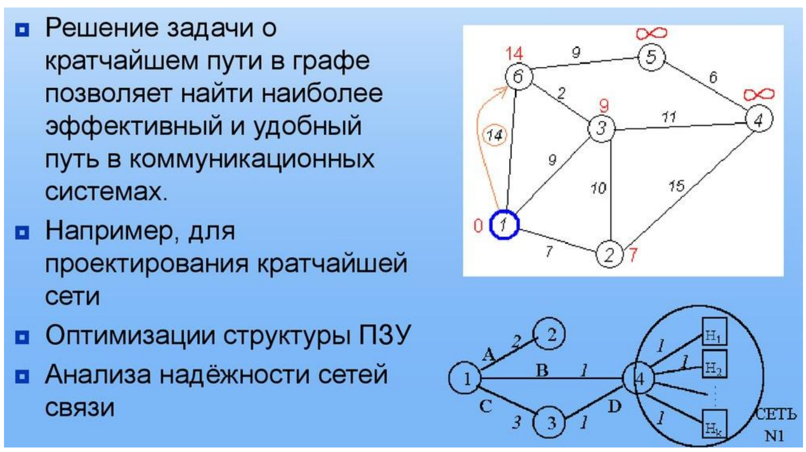


Рисунок Д.3 – Сетевая модель в различных системах

Приложение Е

Графы в реальной жизни

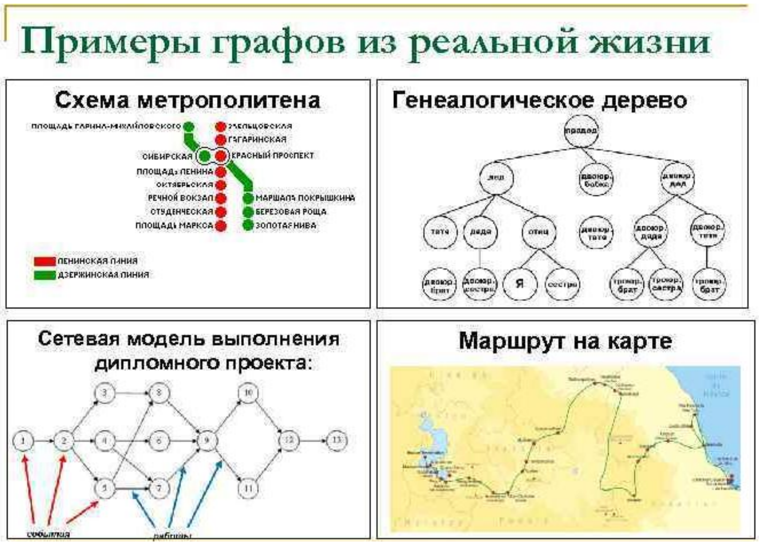


Рисунок Е.1 – Примеры графов в реальной жизни

Рисунок Е.2 – Графы в биологии

С помощью графов упрощается решение математических задач, головоломок, задач на смекалку.

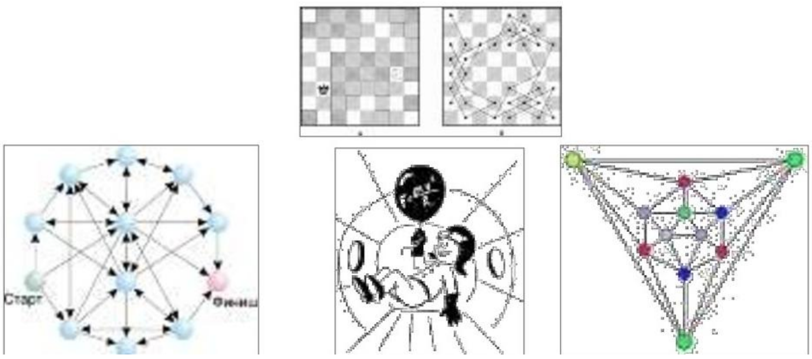


Рисунок Е.3 – Графы в головоломках