МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ

ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

основные теоретические сведения и
методические указания к выполнению практических работ
для студентов всех форм обучения

Братск 2023

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

« » 2023 г. ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»___________ __2023 г. №_____

Содержание

Введение

Еще первобытный вождь понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Ошибочно было бы думать, что такие древние полководцы, как Александр Македонский или Дмитрий Донской, готовясь к сражению, рассчитывали только на доблесть и искусство воинов.

Несомненно, они на основании наблюдений и опыта военного руководства умели как-то оценить вероятность своего возвращения со щитом или на щите, знали, когда принимать бой, когда уклониться от него. Они не были рабами случая, но вместе с тем они были еще очень далеки от теории вероятности.

Позднее, с опытом, человек все чаще стал взвешивать случайные события, классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности. Вот простейший опыт – подбрасывание монеты. Выпадение герба или цифры , конечно, чисто случайное явление. Но при многократном подбрасывании обычной монеты можно заметить, что появление герба происходит примерно в половине случаев.

Кто и когда впервые проделал опыт с монетой, неизвестно. Французский естествоиспытатель Ж.Л.Бюффон (1707 – 1788) в восемнадцатом столетии 4040 раз подбрасывал монету – герб выпал 2048 раз. Математик К.Пирсон в начале двадцатого столетия подбрасывал ее 24 000 раз – герб выпал 12 012 раз. В середине двадцатого столетия американские экспериментаторы повторили опыт. При 10 000 подбрасываний герб выпал 4979 раз. Значит, результаты бросаний монеты, хотя каждое из них и является случайным событием, при неоднократном повторении подвластны объективному закону.

Наиболее интересные для начинающих задачи теории вероятностей возникли в области азартных игр. Этому, по-видимому, способствовало наличие таких «наглядных пособий», как монета или игральная кость. Формированию основ теории вероятностей способствовали также выяснение длительности жизни, подсчет населения, практика страхования. При этом следует отметить, что выдающиеся ученые, решая различные задачи азартных игр, предвидели фундаментальную роль науки, изучающей случайные явления.

Большое значение в становлении теории вероятностей как математической науки имели работы Я.Бернулли, А.Муавра, П.Лапласа, К.Гаусса, С.Пуассона. С середины19 века и до двадцатых годов 20 века развитие теории вероятностей связано в основном с именами русских ученых: П.Л.Чебышева, А.А.Маркова, А.М.Ляпунова и других. Неоценимый вклад в развитие теории вероятностей внесли советские ученые А.Н.Колмогоров, А.Я. Хинчин, Б.В.Гнеденко, Н.В.Смирнов.

В настоящее время теория вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, а ее методы находят широкое применение в различных отраслях науки, народного хозяйства.

Наука о случайных явлениях завоевала и завоевывает все новые области применения. Теперь немыслимо успешное развитие теории массового обслуживания, теории информации, теории управления, теории надежности. физики, геодезии, астрономии, экономики и других разделов науки без четких представлений о случайных явлениях (событиях) и их закономерностей, основы которых изложены в данном методическом пособии.

Пособие содержит сведения по комбинаторике, основам теории вероятностей предназначено в помощь студентам всех форм обучения, изучающим как саму дисциплину, так и ее разделы; а также и преподавателям, преподающим разделы дисциплины или дисциплину.

Раздел 1. Элементы комбинаторики

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть комбинаторными, а раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой. Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машинах и других разделах науки и техники.

Комбинации или соединения - это группы элементов, объединенные каким либо свойством или признаком. Соединения бывают трех видов: размещения, перестановки и сочетания. При этом соединения могут быть с повторениями и без повторений. Рассмотрим соединения без повторений.

1.1 Понятие n-факториала

Определение 1. Произведение первых n натуральных чисел называется n-факториалом и обозначается n!:

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots(n-1)\cdot n \qquad (1)$$

Принято считать, что:

$$0! = 1 \qquad (2)$$

Пример1. Упростить выражения:

а) $\frac{(n+1)!}{n!}$ **; б)** $\frac{(n+1)!}{n}$ **; в)** $\frac{n!}{(n-1)!}$ **; г)** $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ **; д)** $\frac{(2x-1)!}{(2x)!}$ **; е)** $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Решение: используя определение n!, можно записать:

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\Lambda\cdot(n-1)\cdot n = (n-1)!\cdot n = (n-2)!\cdot(n-1)\cdot n;$$

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1) = (n-1)!\cdot n\cdot(n+1);$$

$$(n+2)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\Lambda\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = n!\cdot(n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= (n+1)!\cdot(n+2) = (n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

а) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n!(n+1)}{n!} = n+1$

б) $\frac{(n+1)!}{n}$

Решение: используем определение n!:

$$\frac{(n+1)!}{n} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\Lambda\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{n} = (n-1)!\cdot(n+1);$$

в) $\frac{n!}{(n-1)!}$**;**

Решение: используем определение n!:
$$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!}=n\,;$$

г) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$**;**

Решение: используем определение n!:
$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\,;$$

д) $\frac{(2x-1)!}{(2x)!}$**;**

Решение: используем определение n!:
$$\frac{(2x-1)!}{(2x)!}=\frac{(2x-1)!}{(2x-1)!\cdot 2x}=\frac{1}{2x}$$

е) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$**;**

Решение:
$(n+2)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n(n+1)\cdot(n+2)=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$, тогда
$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(n-1)!}=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

1.2 Размещения

Определение 2. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по m ($0\le m\le n$) элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов данного множества.

Из определения следует, что размещения из n элементов по m элементов – это все m-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов (входящим элементом) или порядком их следования (порядком расположения элементов).

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m и вычисляют по формуле:
$$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1) \qquad (3)$$
или
$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!} \qquad (4)$$

Например, $A_5^2=5\cdot 4=20$, $A_7^3=7\cdot 6\cdot 5=210$.

1.3 Перестановки

Определение 3. Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n. Из определения перестановок следует

$$P_n = A_n^m = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

т.е.

$$P_n = n! \qquad (5)$$

Например:

$2! = 1\cdot 2 = 2;\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6,\ 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24,\ 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

1.4 Сочетания

Определение 4. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m (0≤m≤n) элементов называется любое подмножество, содержащее m различных элементов данного множества.

Следовательно, сочетания из n элементов по m элементов – это все m-элементные подмножества n-элементного подмножества. Причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и вычисляют по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_ь} = \ldots = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \qquad (6)$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} \qquad (7)$$

Например, $C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$; $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$.

Числа C_n^m обладают некоторыми интересными и важными свойствами. Отметим два таких.

Первое свойство описывается равенством:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^m в тех случаях, когда $m > \frac{n}{2}$, например, $C_{15}^{12} = C_{15}^3 = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$.

Второе свойство:

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m, (m < n).$$

Оно позволяет последовательно находить числа C_n^m. В самом деле, положив n = 1, m = 1, получим $C_2^1 = C_1^1 + C_1^0 = 2$; затем положив n = 2, а m = 0 или m = 1, будем иметь:

$C_3^1 = C_2^1 + C_2^0 = 2 + 1 = 3,$

$C_3^2 = C_2^2 + C_2^1 = 1 + 2 = 3.$

Далее, если n = 3, то при m = 0, 1, 2 соответственно получаем:

$C_4^1 = C_3^1 + C_3^0 = 3 + 1 = 4,$

$C_4^2 = C_3^2 + C_3^1 = 3 + 3 = 6$, и т.д.

Если все числа C_n^m расположить в виде следующей треугольной таблицы:

$$C_0^0$$

$$C_1^0\ C_1^1$$

$$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$$

$$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$$

то в начале и в конце каждой строки будут стоять единицы, а остальные места могут быть легко заполнены с помощью второго свойства сочетаний, которое показывает, что на любом месте (кроме крайних) в любой строке стоит число, равное сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Описанная таблица называется треугольником Паскаля. Первые восемь строк треугольника Паскаля выглядят следующим образом:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Продолжите таблицу дальше самостоятельно по двенадцатую строку (числа треугольника Паскаля потребуются в дальнейших вычислениях).

1.5 Бином Ньютона

Числа, стоящие в третьей и четвертой строках треугольника Паскаля, появляются при возведении двучлена (бинома) $a+b$ в квадрат и в куб. Хорошо известные формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3$$

содержат коэффициенты, соответствующие числам в строках треугольника Паскаля (сравните!). Более подробные рассуждения Вы можете прочитать в учебнике.

Для произвольных чисел a и b справедлива формула:

$$(a+b)^n = C_n^0\ a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \dots + C_n^k\, a^{n-k} b^k + C_n^n b^n. \quad (8)$$

Используя знак суммы, формулу Ньютона можно записать короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k} b^k \quad (9)$$

Формула носит имя великого английского физика и математика Исаака Ньютона. Правая часть ее называется разложением натуральной степени бинома. Коэффициенты C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

Свойства формулы Ньютона:

1.Правая часть формулы содержит $n + 1$ слагаемых.

2.Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k\ a^{n-k} b^k$, для удобства его обозначают T_k.

3. Показатели степени при a в каждом члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, а показатели при b - на единицу больше. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.

4.Биномиальные коэффициенты разложения суть числа, стоящие в *(n+1)–й* строке треугольника Паскаля. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от нулевого члена и от n–го члена разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

1.6 Упражнения по разделу «Элементы комбинаторики»

1.6.1 Примеры на применение понятий n-факториала, размещения, перестановки, сочетания

Пример 2. Решить уравнения, применяя формулы комбинаторики.

а) $6 \cdot C_n^{n-3} = 11 \cdot A_{n-1}^2$**;**

Решение.

$$6\cdot\frac{n!}{(n(n-3))!\cdot(n-3)!}=11\cdot(n-1)\cdot(n-2)$$

$$6\cdot\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=11\cdot(n-1)\cdot(n-2)$$

$$\frac{6\cdot(n-3)!\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{6\cdot(n-3)!}=11\cdot(n-1)\cdot(n-2)$$

n=11

Ответ: n=11

б) $\frac{1}{5}\cdot C_{x+3}^{x-1}=\frac{11}{12}\cdot A_{x=1}^{2}$**;**

Решение.

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+3)!}{(x-1)!\cdot(x+3-(x-1))!}=\frac{11}{12}\cdot\frac{(x+1)!}{(x+1-2)!}$$

$$12\cdot\frac{(x+3)!}{(x-1)!\cdot 4!}=55\cdot\frac{(x+1)!}{(x-1)!}$$

$$\frac{12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(x+1)!\cdot(x+2)\cdot(x+3)=55\cdot(x+1)!$$

(x+2)(x+3)=110

$$x^2+5x+6-110=0\rightarrow x^2+5x-104=0$$

Отсюда: x_1=8; x_2=-13 – не подходит по смыслу

Ответ: x=8

в) $A_x^4\cdot P_{x-4}=42\cdot P_{x-2}$**;**

Решение.

$$A_x^4=\frac{x!}{(x-4)!};P_{x-4}=(x-4)!;P_{x-2}=(x-2)!$$

$$\frac{x!}{(x-4)!}\cdot(x-4)!=42\cdot(x-2)!$$

Получаем уравнение:

$$x!=42\cdot(x-2)!$$

$$x!=(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x$$

$$(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x=42\cdot(x-2)!$$

$$(x-1)\cdot x=42$$

$$x^2-x-42=0$$

Отсюда: x_1=7, x_2=-6- не подходит по смыслу

Ответ: x=7

г) $2\frac{2}{3}\cdot C_{x+1}^{5}=A_{x}^{3}$

Решение.

$$2\frac{2}{3}C_{x+1}^{5}=A_{x}^{3}$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{(x+1)!}{5!\cdot(x+1-5)!}=\frac{x!}{(x-3)!}$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{(x+1)!}{120\cdot(x-4)!}=\frac{x!}{(x-3)!}$$

$$\frac{x!\cdot(x+1)}{(x-4)!}=\frac{45\cdot x!}{(x-4)!\cdot(x-3)}$$

$$x+1=\frac{45}{x-3}$$

(x+1)(x-3)=45

x^2 - 2x – 3 – 45 =0

x^2 – 2x – 48 =0

Отсюда, x_1 = 8, x_2 = -6 – не подходит по смыслу

Ответ: x = 8

1.6.2 Примеры на применение формулы бинома Ньютона

Пример 3. Возвести в седьмую степень двучлен x+1.

Решение.

Пусть a=x, b=1, n=7, то по формуле бинома Ньютона.

$$(x+1)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{7-x}=C_7^0x^7+C_7^1x^6+C_7^2x^5+C_7^3x^4+C_7^4x^3+C_7^5x^2+C_7^6x^1+$$

$$+C_7^7x^0=x^7+7\cdot x^6+\frac{7\cdot 6}{2}\cdot x^5+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}\cdot x^4+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}\cdot x^3+\frac{7\cdot 6}{2}\cdot x^2+7x+$$

$$+1=x^7+7\cdot x^6+21\cdot x^5+35\cdot x^4+35\cdot x^3+21\cdot x^2+7\cdot x+1$$

Пример 4. Возвести в пятую степень двучлен x-y.

Решение.

Пусть a=x, b=1 ,n=5, тогда:

$$(x-y)^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\Lambda\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot x^{k-5}\cdot(-y)^k=$$

$$x^5=5x^4\cdot(-y)+\frac{5\cdot4}{2}\cdot x^3\cdot(-y)^2+\frac{5\cdot4}{2}\cdot x^2\cdot(-y)^3+5x\cdot(-y)^{40}+(-y)^5=$$

$$x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$$

Пример 5. Найти девятый член разложения для степени бинома $\left(\frac{1}{x}-x\right)^{12}$.

Решение.

Имеем:

$$T_9=C_{12}^9\left(\frac{1}{x}\right)^3x^9=C_{12}^3x^6=\frac{12\cdot11\cdot10}{2\cdot3}\cdot x^6=220x^6$$

Пример 6. Найти номер члена разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20}$, который не зависит от t.

Решение.

Запишем k-тый член разложения:

$$T_k=C_{20}^k\cdot(\sqrt[3]{t})^{20-k}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)^k=(-1)^k\cdot t^{\frac{20-k}{3}-k}.$$

Для независимости T_k от t необходимо и достаточно, чтобы показатель степени у t был равен 0:

$\frac{20-k}{3}-k=0$, т.е. k=5.

Следовательно, пятый член разложения не зависит от t.

Пример 7. Найти сумму всех биномиальных коэффициентов.

Решение.

Пусть a=1, b=1, то формула разложения бинома, будет иметь вид:

$$(1+n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.$$

Таким образом, $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\Lambda+C_n^n=2^n$

Замечание. Смысл последнего равенства заключается в следующем. Так как C_n^k- это число все подмножеств n-элемента множества, содержащих k-элементов, то сумма $C_n^0 = C_n^1 + \Lambda + C_n^n$, дает, очевидно, число всех подмножеств n-элементного множества.

Следовательно, число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, ровно 2^n.

1.6.3 Решение задач практического содержания
Указания к решению задач

При решении задач практического содержания научитесь различать виды соединений. Если в задаче нет выборки элементов, то есть соединения отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то следует рассматривать перестановки. Если в задаче есть выборка и порядок расположения элементов выборки важен, то следует рассматривать размещения. Если в задаче есть выборка и порядок расположения элементов выборки не важен, то следует рассматривать сочетания.

Задача1. Сколькими способами можно распределить три путевки в группе из двадцати человек, если:

а) путевки одинаковые?

б) путевки разные?

Решение.

а) Поскольку есть выборка и путевки одинаковые (порядок распределения не важен), то количество способов распределения равно:

$$N = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Ответ: 1140 способами.

б) Поскольку есть выборка и путевки разные, то количество способов распределения трех путевок среди 20 человек равно:

$$N = A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

Ответ: 6840 способами.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить семь книг на полке?

Решение.

Поскольку выборки нет, то книги просто переставляются. Поэтому количество способов равно числу перестановок из семи элементов, т.е.

$N = P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Ответ: 5040 способами.

Задача 3. Сколькими способами можно расставить семь книг на полке, чтобы две определенные книги стояли рядом?

Решение.

Представим себе, что две определенные книги связаны вместе. Тогда число возможных способов расположения связки на полке равно числу перестановок из шести элементов (связка, плюс остальные пять книг), т.е. $P_6=6!$. Внутри связки две книги можно переставлять $P_2 = 2!$ раз. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждой из P_6 комбинаций. Поэтому количество способов будет равно:

$$N = P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = 1440$$

Ответ: 1440 способами.

Задача 4.Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что в каждом числе цифры не повторяются?

Решение.

Здесь выбирают три цифры из пяти. Поскольку порядок расположения цифр в числе важен, то количество способов будет равно:

$$N = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ответ: 60.

Задача 5.Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр: 0, 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что в каждом числе цифры не повторяются?

Решение.

Общее количество чисел будет равно числу перестановок из шести элементов, т.е. $P_6=6!$

Но нуль не может находиться на первом месте в числе, поэтому общее количество чисел будет равно:

$$N = P_6 - P_5 = 6! - 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 600$$

Ответ: 600.

Задача 6.В коробке находятся 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно вынуть 4 шара, чтобы:

а)все шары оказались белыми?

б)все шары оказались черными?

в)один шар оказался белым, а три черными?

г)два шара оказались белыми, а два шара черными?

Решение.

а) Всего в коробке 10 белых шаров. Поскольку порядок выбора не важен, то 4 шара из 10 можно выбрать:

$$N = C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210 \text{ способами}$$

Ответ: 210 способами.

б) Рассуждая аналогично, и используя свойство $C_n^m = C_n^{n-m}$, получаем:

$$N = C_5^4 = C_5^1 = 5$$

Ответ: 5 способами

в) Один белый шар из 10 можно выбрать:

$N_1 = C_{10}^1 = 10$ способами.

Три черных шара можно выбрать:

$N_2 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ способами.

Каждая комбинация из белых шаров сочетается с каждой комбинацией из черных шаров, поэтому общее количество способов (комбинаций) равно:

$$N = N_1 \cdot N_2 = 10 \cdot 10 = 100$$

Ответ: 100 способами.

г) Рассуждая аналогично, получаем:

$$N_1 = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

$$N_2 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

$$N = N_1 \cdot N_2 = 45 \cdot 10 = 450$$

Ответ: 450 способами.

Задача7.Сколько диагоналей имеет выпуклый девятнадцатиугольник?

Решение.

Диагональ многоугольника является отрезком, соединяющим две вершины (точки) многоугольника, не принадлежащими одной стороне. Порядок расположения точек у диагонали неважен. Учитывая, что стороны многоугольника не являются диагоналями, получаем, что количество диагоналей 19-угольника равно:

$$N = C_{19}^2 - 19 = \frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2} - 19 = 152$$

Ответ: 152 диагонали.

Задача 8. В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно рассадить 5 человек, при условии, что они должны ехать:

а)в разных вагонах?

б)два человека во втором, а остальные в разных?

Решение.

а) Поскольку порядок размещения пяти человек по двенадцати вагонам не указан, то искомое количество способов равно:

$$N = C_{12}^{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

Ответ: 792 способами.

б) $N_1 = 10$, т.к. выбираются два человека из пяти, т. е

$N_2 = C_{11}^{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, т.к. три пассажира распределяются по 11 вагонам.

$N = N_1 \cdot N_2$.

$N = 1 \cdot 330 = 330$.

Ответ: 330 способами.

Задача 9. Сколько различных дробей можно составить из чисел: 2, 7, 9, 11, 17?

Решение.

Дробь состоит из двух чисел (одно число является числителем, другое - знаменателем). Порядок расположения чисел важен, поэтому:

$$N = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 10. Сколько трехцветных флагов, состоящих из вертикальных полос можно составить из семи кусков ткани разного цвета?

Решение.

Порядок расположения цветов в каждом флаге важен, поэтому

$$N = A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Ответ: 210.

1.7 Вопросы для самоконтроля по разделу «Элементы комбинаторики»

1.Что изучает комбинаторика?

2.Назовите известные соединения в комбинаторике. Приведите примеры на каждый вид соединения.

3.Как называются соединения по m элементов, взятых из группы в m элементов, каждое из которых отличается от другого либо хотя бы одним элементом, либо порядком их расположения?

4. Как называются соединения по m элементов, взятых из группы в m элементов, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом?

5.Какие задачи решаются с помощью формул комбинаторики?

6.Если выполняются соотношения n>2, m<n, то какое число больше A_n^m или C_n^m?

7. Как называются соединения по n элементов, каждое из которых отличается от другого порядком их расположения?

8.В каких задачах используются перестановки?

9.Запишите формулу бинома Ньютона. Где она применяется?

10. Как можно найти любой член разложения в биноме Ньютона?

11. Сколько слагаемых содержит бином Ньютона?

12. Чему равна сумма всех коэффициентов в формуле бинома Ньютона?

Раздел 2. Случайные события

2.1 События и их виды

Под испытанием (опытом) будем понимать процесс, включающий в себя определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных исходов. Исходом опыта может быть результат наблюдения, измерения, оценки. Событием называется результат единичной операции, или испытания.

Можно наблюдать события (явления), которые обязательно произойдут, если будет осуществлена определенная совокупность условий. Такие события принято называть достоверными. Например, если нагреть в сосуде воду до температуры 100℃ при нормальном атмосферном давлении, то обязательно наступит процесс кипения воды. Если в коробке находятся только цветные шары и из коробки наудачу извлечен шар, то событие «извлечен цветной шар» произойдет обязательно.

Событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий, называется невозможным событием. Например, если в ящике имеются только стандартные детали и из ящика наудачу извлечена деталь, то невозможным будет событие « извлечена не стандартная деталь».

Все явления окружающей нас действительности можно рассматривать с точки зрения вероятности их наступления. Когда студент идет на экзамен, вероятность получения им хорошей оценки зависит от нескольких причин: подготовленности студента, удачно выбранного билета, самочувствия, настроя. Экономиста может интересовать вероятность того, что цены на товар не вырастут, если не снизится объем его производства, или вероятность того, что застрахованный автомобиль не попадет в аварию. События, которые при осуществлении определенной совокупности условий могут произойти, а могут и не произойти, называются случайными. Например, опыт – «брошена монета», «появление герба» - случайное событие; опыт – «произведен выстрел по мишени» , «попадание» - случайное событие; опыт- «брошена игральная кость», «выпадение четырех очков» - случайное событие.

Случайные события обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C, … Достоверное событие будем обозначать буквой U, невозможное – V.

Случайное событие может состоять из нескольких элементарных событий. Элементарным событием называется единичный, отдельный исход испытания.

2.2 Виды случайных событий

Определение 5. Несколько событий называются **совместными**, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Например, при бросании трех монет выпадение цифры на одной из них не исключает появления цифры на других монетах. При бросании игральной кости появление двух очков и появление четного числа очков – совместные события.

Определение 6. Несколько событий называются **несовместными**, если в результате эксперимента наступление одного из них исключает появление других.

Например, при выборе одной детали события «деталь стандартная» и «деталь нестандартная» несовместные.

Определение 7. События называются **единственно возможными**, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Например, покупатель подходит к киоску, где продаются газеты и журналы. Обязательно произойдет одно из событий: «покупатель купит газету», «покупатель купит журнал», « покупатель не купит ни газету, ни журнал».

Определение 8. События называются **равновозможными**, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Например, при бросании игральной кости появление каждой из ее граней – события равновозможные; выпадение одного из секторов рулетки не более вероятно, чем выпадение другого сектора.

Определение 9. Два единственно возможных и несовместных события называются **противоположными**.

Например, покупка и продажа определенного вида товара есть события противоположные. Попадание в цель и промах при одном выстреле являются противоположными событиями.

Определение 10. Совокупность всех единственно возможных и несовместных событий называется **полной группой событий**.

Например, полную группу событий при сдаче экзамена одним из студентов составляют события: « получение оценки «отлично»», «получение оценки «хорошо»», «получение оценки «удовлетворительно»», «получение оценки «неудовлетворительно»».

2.3 Операции над событиями

Над событиями можно производить различные операции (действия), получая при этом другие события.

Определение 11. Если при всяком испытании, при котором происходит событие А, происходит и событие В, то событие А называется частным случаем события В.

Говорят также, что А влечет за собой В и пишут:

$A \subset B$ (A вложено в B), или $B \supset A$ (рисунок 1).

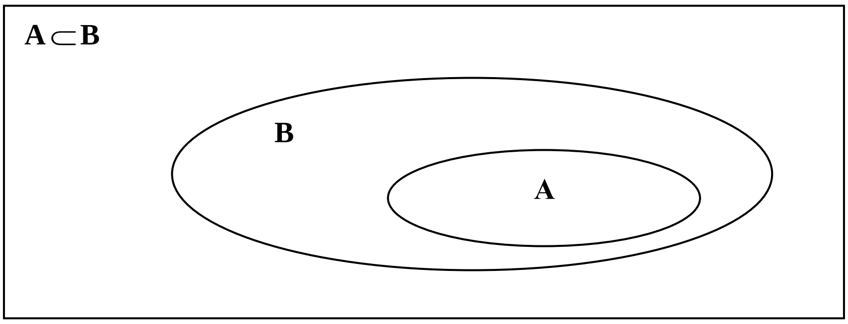


Рисунок 1 - Событие А – частный случай события В

Например, событие А состоит в появлении двух очков при бросании игральной кости, а событие В состоит появлении четного числа очков, т. е. $B = \{2;4;6\}$. Тогда событие А есть частный случай события В, так как 2 – четное число. Можно записать $A \subset B$.

Определение 12. Если событие А влечет за собой событие В, а В влечет за собой А, то эти события называются равносильными.

Из того, что $A \subset B$ и B следует А=В.

Определение 13. Событие, состоящее в совместном появлении обоих событий и А и В, называется произведением (пересечением $A \cap B$) этих событий $A \cdot B$ (рисунок 2).

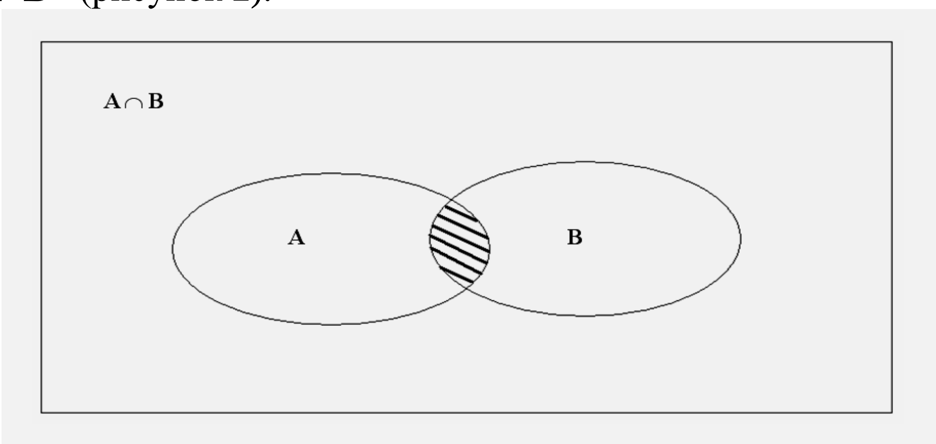


Рисунок 2 - Пересечение (произведение) событий

Пример 8. Пусть событие А состоит в выпадении четного числа очков при бросании игральной кости, тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 2, 4 и 6 очков: $A = \{2;4;6\}$. Событие В состоит в выпадении числа очков больше 3 при бросании игральной кости.

Тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 4, 5 и 6 очков: $B = \{4;5;6\}$.

Тогда пересечением или произведением событий А и В будет событие, состоящее в выпадении четного числа очков, большего 3: $A \cdot B = \{4;6\}$.

Замечание. Если два события А и В несовместны, то их совместное наступление невозможно, тогда: А· В = Ø.

Определение 14. Событие, состоящее в наступлении или события А или события В (хотя бы одного из этих событий, по крайней мере одного из этих событий), называется их суммой (объединением $A \cup B$) и обозначается А+В (рисунок 3).

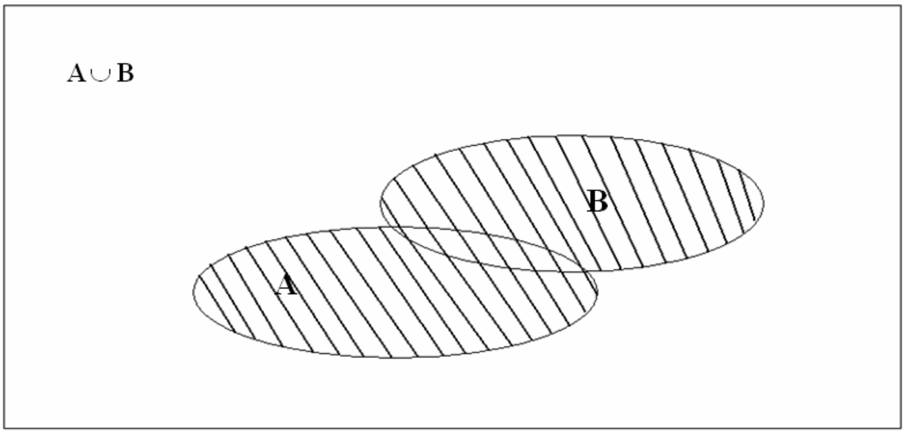


Рисунок 3 - Объединение (сумма) событий

Пример 9. Пусть событие А состоит в выпадении четного числа очков при бросании игральной кости, тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 2, 4 и 6 очков: $A = \{2;4;6\}$. Событие В состоит в выпадении числа очков больше 3 при бросании игральной кости.

Тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 4, 5 и 6 очков: $B = \{4;5;6\}$.

Тогда суммой событий А и В будет событие, состоящее в выпадении хотя бы одного из них – либо числа очков большего 3, либо четного числа очков: $A + B = \{2;4;5;6\}$.

Определение 15. Событие, состоящее в том, что событие A не происходит, называется противоположным событию A и обозначается $\bar{A}$ (рисунок 4).

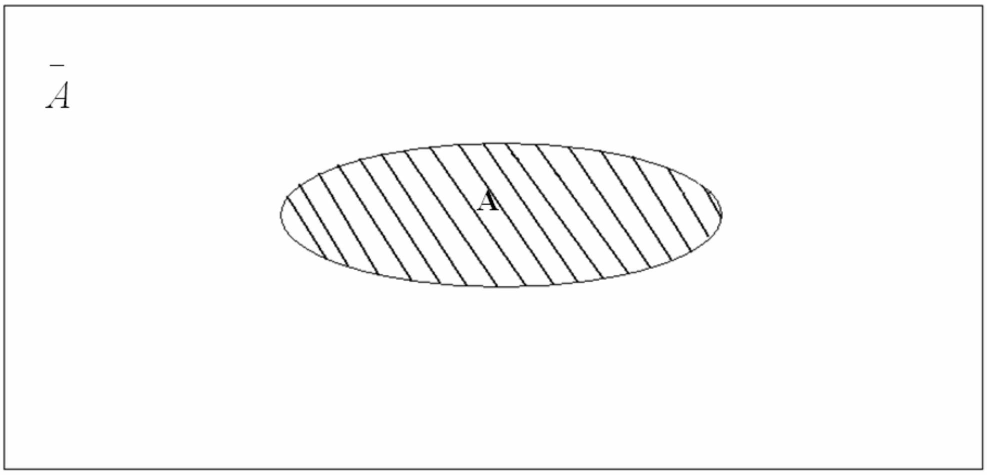


Рисунок 4 - Противоположные события

Пример 10. Пусть событие A состоит в выпадении четного числа очков при бросании игральной кости, тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 2, 4 и 6 очков: $A = \{2;4;6\}$. Тогда событие $\bar{A}$ состоит в выпадении нечетного числа очков и его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 1, 3,и 5 очков: $\overline{A} = \{1;3;5\}$.

Определение 16. Событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит, называется разностью событий A и B и обозначается через A–B. Можно обойтись без этого обозначения, так как из определения следует, что $A - B = A \cdot \overline{B}$ (рисунок 5).

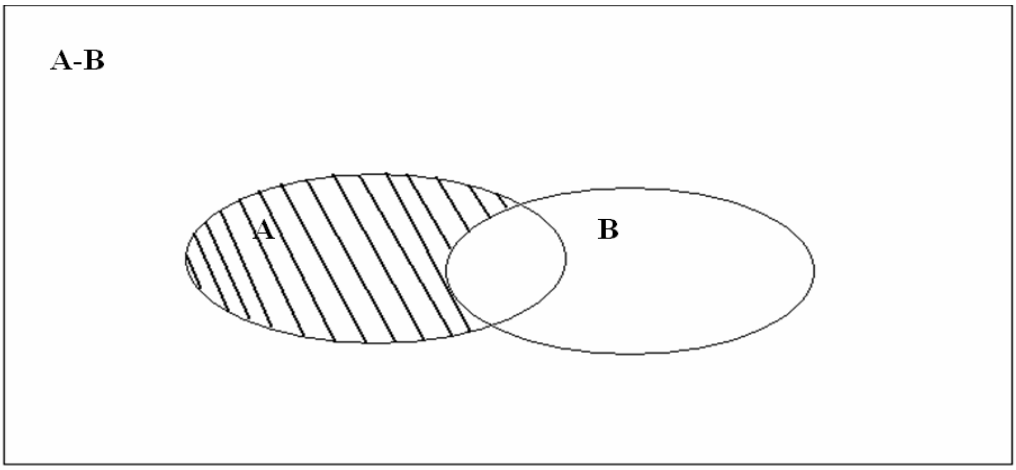


Рисунок 5 - Разность событий A и B

Пример 11. Пусть событие A состоит в выпадении четного числа очков при бросании игральной кости, тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 2, 4 и 6 очков: $A = \{2;4;6\}$. Событие В состоит в выпадении числа очков больше 3 при бросании игральной кости. Тогда его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 4, 5 и 6 очков: $B = \{4;5;6\}$.

Тогда $\overline{B}$ - событие, состоящее в выпадении числа очков не больше 3, и его наступлению благоприятствуют элементарные события, состоящие в выпадении 1, 2 и 3 очков: $\overline{B} = \{1;2;3\}$. Разностью событий А и В будет событие, состоящее в том, что выполняется событие А и не выполняется Событие В. Его наступлению благоприятствуют элементарное событие, состоящее в выпадении 2 очков: А – В = 2.

Определения суммы и произведения событий распространяются и на большее число событий:

А + В + …+N - есть событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (или А, или В,…,или N);

А· В· … ·N – есть событие, состоящее в совместном наступлении всех событий (и А, и В, …, и N).

Условившись обозначать наступление события знаком «+», а не наступление – знаком «-», сумму и произведение двух событий, а также противоположное событие можно определить следующими столбцами:

Таблица 1

A	B	A+B
+	+	+
+	-	+
-	+	+
-	-	-

Таблица 2

A	B	AB
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	-

Таблица 3

A	$\overline{A}$
+	-
-	+

2.4 Свойства операций над событиями

U – достоверное событие, V – невозможное событие.

1. A+A=A
2. A+B=B+A
3. A ·B=B ·A
4. A+V=A
5. A · V = V
6. A+U=U
7. A ·U=U
8 .(A+B)+C=A+(B+C)
9. (A·B) ·C=A·(B·C)
10. (A+B) ·C=AC+B·C

2.5 Решение задач по разделу «Случайные события»

Указания к решению задач. При решении задач к разделу «Случайные события» необходимо знать виды событий, виды случайных событий, операции над событиями.

Порядок решения задач:

• обозначить события;
• определить вид событий;
• определить вид операции над событиями;
• записать искомое событие текстом, если это требуется по условию задачи.

Задача 11. Пусть A_1 и A_2 – случайные элементарные события, образующие полную группу.

Запишите с помощью операций сложения, умножения и отрицания следующие события:

а) **A – «произошло одно и только одно из этих событий»;**

б) **B – «произошли оба события»;**

в) **C – «оба события не произошли»;**

г) **D – «произошло хотя бы одно из этих событий».**

Решение.

а) событие A состоит в том, что если первое событие наступило, то второе не наступило, и наоборот, если второе событие наступило, то первое не наступило, поэтому:

$$A = A_1 \cdot \overline{A}_2 + A_2 \cdot \overline{A}_1.$$

б) событие B состоит в том, что произошли (наступили) оба события, поэтому:

$$B = A_1 \cdot A_2.$$

в) событие C состоит в том, что не произошли (не наступили) оба события, поэтому:

$$C = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2.$$

г) событие D состоит в том, что произошло или первое событие или второе событие, поэтому:

$$D = A_1 + A_2.$$

Задача 12. Пусть A, B и C – случайные события, выраженные элементарными событиями одного и того же пространства элементарных событий. Запишите такие события:

а) **D_1 - произошло только A;**

б) **D_2 - произошло одно и только одно из данных событий;**

в) **D_3 - произошли два и только два из данных событий;**

г) **D_4 - произошли все три события;**

д) **D_5 - произошло хотя бы одно из данных событий;**

е) **D_6 - произошло не более двух событий.**

Решение.

Эта задача похожа на предыдущую, поэтому используйте ее решение и рассуждения.

а) Произошло только А (В и С не произошли), поэтому:

$D_1 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}.$

б) одно из указанных событий произошло, а два других не произошли – перебираются все возможные варианты:

$D_2 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.$

(Если произошло А, то В и С не произошли, или В произошло, а А и С не произошли, или С произошло, а А и В не произошли).

в) проводя аналогичные рассуждения, получаем:

$D_3 = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot C \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \cdot C$

г) $D_4 = A \cdot B \cdot C$;

д) $D_5 = A + B + C$;

е) $D_6 = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{A} \cdot \bar{C} + C \cdot \bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot C \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ $= = \overline{ABC}$

Задача 13. Бросают игральную кость. Событие А – появление нечетного числа очков, В – не появление 3 очков, С – не появление 5 очков. В чем состоят события: а) А·В·С; б) А·В; в) $\overline{ACB}$ **?**

Решение.

а) Событие А·В·С состоит в появлении нечетного числа очков, не равного 3 и не равного 5, значит, А·В·С – «выпало 1 очко».

б) Выпало нечетное число, не равное 3, значит, А· В – «выпало или 1 очко, или 5 очков».

в) $\overline{ACB}$ - «выпало четное число (любое)».

Задача 14. В электрическую цепь последовательно включены два элемента *a* и *b*.

Событие А – «выход из строя элемента *a*», событие В – «выход из строя элемента *b*».

Записать события: С – «цепь работает», $\overline{C}$ **- «цепь не работает».**

Решение.

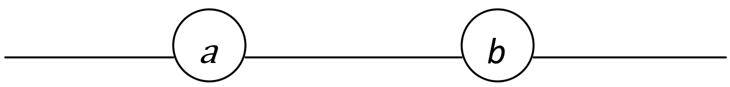


Рисунок 6 – Электрическая цепь № 1

Так как элементы подключены последовательно, то для работы цепи должны работать все элементы, поэтому событие С можно записать следующим образом:

$C = A \cdot B$.

Цепь не работает, если не работает хотя бы один элемент, поэтому событие $\overline{C}$ можно представить следующим образом:

$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}$

Задача 15. В электрическую цепь параллельно включены два элемента *a* и *b*.

Событие А – «выход из строя элемента *a*», событие В – «выход из строя элемента *b*».

Записать события: С – «цепь работает», $\overline{C}$ - «цепь не работает».

Решение.

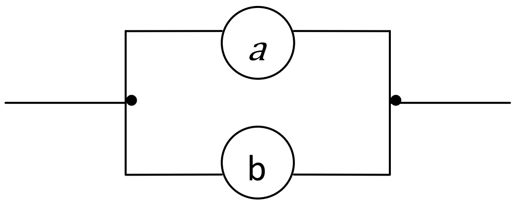


Рисунок 7 – Электрическая цепь № 2

Так как элементы подключены параллельно, то для того, чтобы цепь не работала должны не работать все элементы, поэтому событие $\overline{C}$ можно записать следующим образом:

$\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Цепь работает, если работает хотя бы один элемент, поэтому событие С можно представить следующим образом:

$C = A + B$.

Задача 16. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 8. Выход из строя элемента *a* – событие $\overline{A}$, элемента c_i - событие $\overline{C_i}$, элемента b_k- событие $\overline{B_k}$.

Запишите события D и $\overline{D}$, если D – «разрыв цепи».

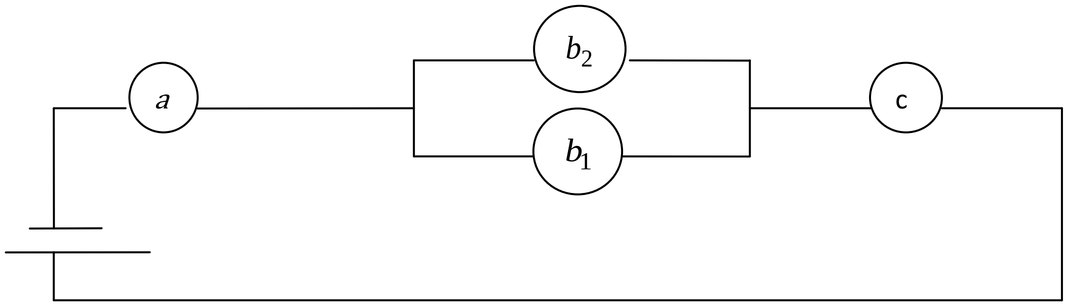


Рисунок 8 – Электрическая цепь № 3

Решение.

Разобьем цепь на три блока: блок А состоит их одного элемента *a*; блок В состоит из двух элементов b_1 и b_2, соединенных параллельно; блок С состоит из одного элемента с.

Обозначим события: событие A_1 - «блок А работает»; событие A_2 - «блок В работает»; событие A_3 - «блок С работает».

Тогда событие $\overline{D} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Блок A_2 работает, если работает хотя бы один элемент, поэтому A_2=B_1+B_2.

Тогда событие $\overline{D} = A \cdot (B_1 \cdot B_2) \cdot C$.

Событие D состоит в том, что хотя бы один блок не работает, т.е. $D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$

Блок В не работает, если откажут оба элемента, поэтому $A_2 = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2$.

Учитывая, что $\overline{A}_1 = \overline{A}$, $\overline{A}_3 = \overline{C}$.

Тогда событие $D = \overline{A} + \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 + \overline{C}$.

2.6 Вопросы для самоконтроля по разделу «Случайные события»

1.Дайте понятие события. Приведите примеры.

2.Какое событие называется достоверным? Приведите примеры.

3. Какое событие называется невозможным? Приведите примеры.

4. Какое событие называется случайным? Приведите примеры.

5. Какое событие называется элементарным? Приведите примеры.

6. Какое событие называется составным? Приведите примеры.

7.Дайте определение суммы (объединения) событий. Приведите примеры.

8. Дайте определение произведения (пересечения) событий. Приведите примеры.

9. Дайте определение противоположных событий. Приведите примеры.

10.Перечислите виды случайных событий.

11.Какие случайные события называются совместными? Приведите примеры.

12. Какие случайные события называются несовместными? Приведите примеры.

13. Какие случайные события называются единственно возможными? Приведите примеры.

14.Какие случайные события называются равновозможными? Приведите примеры.

15.Какая группа случайных событий называется полной? Приведите примеры.

2.7 Тест № 1 для самоконтроля по разделу «Случайные события»

1.Какие из предложенных событий являются совместными?

а) Опыт – бросание монеты.

События: А- выпала цифра; В – выпал герб.

в) Опыт – бросание игральной кости.

События: А – выпадение единицы; В – выпадение тройки; С – выпадение четного числа очков.

с) Опыт – бросание двух монет.

События: А – хотя бы на одной монете выпадет герб; В – на обеих монетах выпадет герб.

d) Опыт – два выстрела по мишени.

События: А – есть хотя бы одно попадание; В – ни одного попадания.

2.Какие из предложенных событий являются несовместными?

а) Опыт – бросание двух монет.

События: А – хотя бы на одной монете выпадет герб; В – выпал герб на обеих монетах.

в) Опыт – бросание игральной кости.

События: А – выпадение шестерки; В – выпадение четного числа очков.

с) Опыт – сдача экзамена.

События: А – получение оценки «3» на экзамене; В – получение оценки ниже «5».

d) Опыт – два выстрела по мишени.

События: А – есть хотя бы одно попадание; В – ни одного попадания.

3. Какие из предложенных событий А и В являются противоположными?

а) А - хотя бы одно попадание при двух выстрелах, В – ни одного попадания при двух выстрелах;

в) А – выпадение тройки при бросании игральной кости, В - выпадение двойки при бросании игральной кости;

c) А – получение оценки «5» на экзамене, В - получение оценки «2» на экзамене;

d) А – выигрыш по одному из двух лотерейных билетов, В - выигрыш по обоим из двух лотерейных билетов.

4.Какие из предложенных событий образуют полную группу событий?

а) А - два попадания при двух выстрелах, В – одно попадание при двух выстрелах. С – ни одного попадания при двух выстрелах;

в) А – выпадение единицы при бросании игральной кости, В - выпадение двойки при бросании игральной кости, С – выпадение тройки при бросании игральной кости, D - выпадение четверки при бросании игральной кости;

c) А – получение оценки «5» на экзамене, В - получение оценки «4» на экзамене;

d) А – выигрыш по первому из двух лотерейных билетов, В - проигрыш по второму из двух лотерейных билетов.

5.Что понимают под суммой двух несовместных событий А и В?

а) Совместное появление событий А и В.
в) Появление хотя бы одного из событий А и В.
с) Появление либо события А, либо события В.

6.Что понимают под произведением двух событий А и В?

а) Совместное появление событий А и В.
в) Появление хотя бы одного из событий А и В.
с) Появление либо события А, либо события В.

7.Опыт состоит в том, что бросают две монеты. Событие А – выпал хотя бы один герб. Событие В – выпала хотя бы одна цифра. Какому из перечисленных событий будет равно произведение событий А и В?

а) Не выпало ни одного герба.
в) Выпал один герб и одна цифра.
с) Выпало два герба.

8.Опыт состоит в том, что бросают две монеты – медную и серебряную. Событие А – выпал герб на медной монете. Событие В – выпал герб на серебряной монете . Какому из перечисленных событий будет равна сумма событий А и В?

а) Не выпало ни одного герба.
в) Выпал один герб.

c) Выпали цифры на обеих монетах.

2.8 Задачи для самостоятельного решения по разделу «Случайные события»

Задача 17. Найти сумму событий:

1) испытание – два выстрела по мишени; события: А – «попадание с первого выстрела», В - «попадание со второго выстрела»;

2) испытание – бросание игральной кости; события: А - «появление одного очка», В - «появление двух очков», С - «появление трех очков»;

3) испытание – приобретение лотерейных билетов; события: А – «выигрыш 10 рублей», В - «выигрыш 20 рублей», С - «выигрыш 25 рублей».

Задача 18. Найти произведение событий:

1) испытание – два выстрела по мишени; события: А – «попадание с первого выстрела», В - «попадание со второго выстрела»;

2) испытание – бросание игральной кости; события: А - «непоявление трех очков», В - «непоявление пяти очков», С - «появление четного числа очков».

Задача 19. Назовите противоположные события для событий:

А – «выпадение двух гербов при бросании двух монет»;

В – «появление белого шара, если опыт состоит в извлечении одного шара из урны, в которой имеются белые, черные и красные шары»;

С – «пять попаданий при пяти выстрелах»;

D – «не более трех попаданий при пяти выстрелах»;

Е – «хотя бы одно попадание при пяти выстрелах».

Раздел 3. Вероятности случайных событий

Вероятностью события принято считать количественную меру неопределенности наступления этого события. Производя достаточно большое количество опытов или испытаний, можно определить, как часто появляется событие, и вычислить вероятность его наступления. В некоторых случаях можно определить вероятность до опыта.

3.1 Классическое и статистическое определение вероятности

Обозначим число благоприятствующих событию A исходов через m, а число всех возможных исходов – n.

Определение 17 (классическое определение вероятности). Отношение числа исходов m, благоприятствующих появлению события A, к общему числу исходов n называется вероятностью события A:

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{10}$$

Определение 18 (статистическое определение вероятности). Отношение числа исходов m^*, в которых событие A уже появилось, к общему числу исходов n называется частотой события:

$$P^*(A)=\frac{m^*}{n} \tag{11}$$

3.2 Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице, т.е.

$$P(U) = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(V) = 0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1,т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Свойство 4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Например, если вероятность извлечения туза из колоды, состоящей из 36 карт, равна 4/36 = 1/9, то вероятность извлечения карты, не являющейся тузом, равна 1 – 1/9 = 8/9.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для каждого события А при неизменных условиях вероятность Р (А) – есть некоторое постоянное число, заключенное между нулем и единицей. Иногда вероятность выражают в процентах: Р (А)·100% - есть средний процент числа появлений события А. Чем больше вероятность события, тем чаще оно наступает, и, наоборот, чем меньше вероятность события, тем реже оно наступает.

Наоборот, когда вероятность равна 0 или очень мала, то событие наступает крайне редко; о таком событии говорят, что оно практически невозможно. Насколько мала, должна быть вероятность события, чтобы практически можно было считать его невозможным? Общего ответа здесь дать нельзя, так как все зависит от того, насколько важно это событие. Если, например, вероятность того, что электрическая лампочка окажется испорченной, равна 0,01, то с этим можно примириться. Но если 0,01 – есть вероятность того, что в банке консервов образуется сильный яд ботулин, то с этим примириться нельзя, так как примерно в одном случае из ста будет происходить отравление людей и человеческие жизни окажутся под угрозой.

3.3 Задачи, решаемые по определениям вероятности

Указания к решению задач. При решении задач на классическое определение вероятностей необходимо:

• обозначить событие;

•выяснить, простое событие или составное;

• если событие простое, то подсчитать общее количество элементарных исходов n, число исходов m, благоприятствующих событию, и подставить найденные величины в формулу классического определения вероятности;

• если событие составное, то разложить его на элементарные; выяснить вид операции над событиями ; подсчитать общее количество элементарных исходов n; число исходов m, благоприятствующих событию, и подставить найденные величины в формулу классического определения вероятности;

Задача 20. Найти частоту появления герба, если монету подбросили 4 040раз, герб при этом выпал 2 048 раз.

Решение.

Здесь n = 4 040, m^* = 2 048.

$$P^*(A) = \frac{2048}{4040} = 0{,}507.$$

Ответ: $P^*(A) = 0{,}507$.

Задача 21. В ящике 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

Решение.

Обозначим событие А - {наудачу вынутый белый шар}. В этом случае m=4, n=11.

Поэтому $P(A)=\frac{4}{11}$.

Ответ: $P(A)=\frac{4}{11}$.

Задача 22. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, …, 100. Из урны наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

Решение.

Здесь событие А – {номер вынутого шара содержит цифру 5}. В этом случае n=100, m=19. (Это количество чисел, в записи которых есть цифра 5: 5, 15, 25, 35, 45, 50,51,52,53,54,55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85, 95).

Поэтому $P(A)=\frac{19}{100}$.

Ответ: $P(A)=\frac{19}{100}$.

Задача 23. Найти вероятность того, что при одном подбрасывании монеты выпадет цифра.

Решение.

Событие А – {выпадение цифры}. Здесь n=2 (две стороны монеты), m=1. Поэтому $P(A)=\frac{1}{2}$.

Ответ: $P(A)=0{,}5$.

Задача 24. Найти вероятность того, что при одном подбрасывании двух монет хотя бы один раз выпадет цифра.

Решение.

Событие А – {хотя бы раз выпадет цифра}. Здесь n=4 (по две стороны у каждой монеты), m= 3 (ЦГ, ГЦ, ЦЦ, ГГ). Поэтому $P(A)=\frac{3}{4}$.

Ответ: 0,75.

Задача 25. Из урны, в которой находиться 7 красных, 8 желтых и 5 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным; б) желтым; в) черным; г) зеленым.

Решение.

Обозначим события А – {красный шар}, В – {желтый шар}, С – {черный шар}, Д – {зеленый шар}. Здесь n=20 (общее количество шаров в урне).

а) m=1 (количество красных шаров). $P(A)=\dfrac{7}{20}=0{,}35$.

б) m=8 (количество желтых шаров). $P(A)=\dfrac{8}{20}=0{,}4$.

в) m=0 (количество черных шаров). $P(A)=\dfrac{0}{20}=0$.

г) m=5 (количество зеленых шаров). $P(A)=\dfrac{5}{20}=0{,}25$.

Ответ: а) 0,35; б) 0,4; в) 0; г) 0,25.

Задача 26. Брошена игральная кость. Найти вероятность следующих событий: А – {выпало 3 очка}, В – {выпало нечетное количество очков}.

Решение.

а) Здесь m=1 (на одной грани 3 очка), n=6 (общее количество граней игральной кости) → $P(A)=\dfrac{1}{6}$.

б) Здесь n=3 (на трех гранях нечетное количество очков 1, 3, 5), n=6. Поэтому $P(A)=\dfrac{3}{6}=0.5$.

Ответ: а)1/6; б) 0,5.

Задача 27. Брошены две игральные кости. Найти вероятность события А – {сумма выпавших очков равна 8, разность -2}.

Решение.

Составляем вспомогательную таблицу (таблица 4) по принципу шахматной доски.

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3					X	
4						
5			X			
6						

Очевидно, что общее количество исходов n =36. Отметим крестиками те клетки, в которых находятся исходы, благоприятствующие событию А, т.е. сумма чисел равна 8, разность – 2. Таких клеток две, т.е. m=2.

Тогда $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Ответ:1/18.

Задача 28. Даны натуральные числа 1, 2, 3, …, 50. Найти вероятность следующих событий: А – {наугад выбранное число делится на 3}; В – {наугад выбранное число при делении на 5 дает в остатке 1};

Решение.

Общее число исходов (чисел) n=50.

а) событию А благоприятствуют числа, делящиеся на 3, т.е. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 01, 33, 36, 39, 42, 45, 48.

Значит, m=16. Тогда $P(A) = \frac{16}{50} = 0{,}32$.

б) событию В благоприятствуют числа 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, т.е. m=9.

Тогда $P(B) = \frac{9}{50} = 0{,}18$.

Ответ: а) 0,32; б)0,18.

Задача 29. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Какова вероятность того, что он набрал нужный номер?

Решение.

Здесь m=1 (одна цифра), n=10 (общее количество цифр).

Тогда P=0,1.

Ответ: 0,1.

При решении следующих задач используются элементы комбинаторики, поэтому повторите указания к решению задач по элементам комбинаторики.

Задача 30. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу. Какова вероятность, что он набрал нужный номер?

Решение.

Обозначим событие А – {нужный номер}. Здесь m=1 (один нужный номер телефона). А общее количество исходов $n = A_{10}^{2} = 9 \cdot 10 = 90$ (т.к.

выбираются наугад забытые цифры из 10; порядок важен, поэтому используется размещения).

Тогда $P(A) = \frac{1}{90}$.

Ответ: 1/90.

Задача 31. На пяти карточках написаны буквы а, д, к, л, о. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «лодка»?

Решение.

Число всех возможных исходов испытаний в данном случае равно числу перестановок из пяти букв, т.е. P_5= 5!= 1-2-3-4-5 = 120.

Из них лишь одна образует слово «лодка». Поэтому здесь m = 1, n= 120.

$$P(A) = \frac{1}{120} \approx 0{,}008.$$

Ответ: 0,008.

Задача 32. Лифт в пятиэтажном доме отправляется с тремя пассажирами.

Найти вероятности событий: А - {все выйдут на одном этаже}, В - {все выйдут на разных этажах}, С - {на каждом этаже выйдет не более одного пассажира}, предполагая, что все возможные способы распределения пассажиров по этажам равновероятны.

Решение.

Каждый пассажир имеет четыре возможности для выхода из лифта (на втором, третьем, четвертом, пятом этажах). Следовательно, для трех пассажиров имеется $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ возможностей выйти из лифта. Поэтому общее количество исходов $n = 4^3 = 64$. Найдем m для каждого из событий и подсчитаем вероятности.

а) Для события А m= 4 (всего разных этажей четыре).

Поэтому $P(A) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$.

б) Для события В m равно числу сочетаний из четырех по три (по разным этажам распределяются три пассажира в любом порядке), т.е. $m=C^3_4=C^1_4=4$.

Поэтому $P(B) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$.

в) Для события С имеется $4 \cdot 3 \cdot 2$ благоприятствующих случая, поскольку по условию на каждом этаже должно выйти не более одного пассажира, т.е. если первый пассажир может выйти на каждом из четырех этажей, то для второго остаются выходы на каждом из трех этажей, для третьего - на каждом из двух этажей.

Поэтому $P(C) = \frac{24}{4^3} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$.

Ответ: 1/16; 1/16; 3/8.

Задача 33. Десять различных книг расставлены на полке наудачу. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

Решение.

Событие А - {три определенные книги рядом}. Представим себе, что три определенные книги связаны вместе. Тогда число возможных способов расположения связки на полке равно числу перестановок из 8 элементов (связка плюс остальные 7 книг), т.е. $P_8 = 8!$ Внутри связки 3 книги можно переставлять $P_3 = 3!$ раз. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждой из P_8 комбинаций. Поэтому $m = P_8 P_3$ Число n возможных случаев, очевидно, равно $P_{10} = 10!$ Таким образом:

$$P(A) = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{8! \cdot 3!}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{3!}{9 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: 1/15.

Задача 34 (о выборке). В урне *а* белых и *в* черных шаров. Из урны наугад вынимают *k* шаров.

Найти вероятность того, что среди них будет *l* белых, а следовательно *к-l* черных (*l*<*a*, *k – l* <*в*).

Решение.

Событие А - {среди взятых k шаров будет l белых и k - l черных}. Общее число исходов $n = C_{a+b}^{k}$ (порядок выбора шаров не важен). Очевидно, что число способов, которыми можно выбрать l белых из a , равно C_a^l, а число способов, которыми можно к ним "довыбирать" k-l черных шаров, равно $C_в^{k-c}$. Каждая комбинация белых шаров может сочетаться с каждой комбинацией черных, поэтому $m = C_a^l \cdot C_в^{k-c}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_a^l \cdot C_b^{k-l}}{C_{a+b}^k}$$

Задача 35. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 стандартных.

Решение.

Нетрудно заметить сходство между этой задачей и предыдущей. Здесь в качестве «урны» фигурирует партия деталей, среди которых 7 стандартных («белые шары») и 5 нестандартных («черные шары»), а роль вынимаемых шаров играет контрольная партия из шести деталей. Поэтому искомую вероятность находим по формуле (2) для случая a =7, b =5, κ=6, l=4.

$$P(A)=\frac{C_7^4 C_5^2}{C_{12}^6}=\frac{\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}}{\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}=\frac{25}{66}.$$

Ответ: 25/66.

Задача 36. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

Решение.

Рассуждая аналогично предыдущей задаче, имеем a = 90, b = 10, κ= 10, l=10. По формуле (2) получаем $P=\frac{C_{90}^{10}\cdot C_{10}^{0}}{C_{100}^{10}}=\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=0{,}33.$

Ответ: 0,33.

3.4 Теоремы сложения вероятностей

Вероятностью суммы двух событий называют вероятность события, состоящего в наступлении или события А. или события В, или двух этих событий вместе.

3.4.1 Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 1.Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (12)$$

<u>*Следствие.*</u> Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2)+...+P(A_n) \qquad (13)$$

Пример 12. Определите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет либо 5, либо 6 очков.

Решение.

Обозначим события: А – «выпадет 5 очков», В - «выпадет 6 очков». Нужно найти вероятность события А+В. События А и В несовместны, поэтому Р(А+В) = Р(А) + Р(В).

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}.$$

Тогда $P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Ответ: 1/3.

3.4.2 Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{14}$$

Для трех совместных событий:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \tag{15}$$

Пример 13. В фирме 500 работников, 300 из них имеют высшее образование, а 400 – среднее специальное образование, у 250 сотрудников и высшее, и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное, или высшее образование, или то и другое?

Решение.

Обозначим события: А – «случайно выбранный работник имеет среднее специальное образование», В - «случайно выбранный работник имеет высшее образование». АВ – «случайно выбранный работник имеет среднее специальное или высшее образование».

Р(А) = 300/500= 0,6; Р(В) = 400/500 = 0.8; Р(АВ) = 250/500 = 0,5.

Учитывая, что А и В – совместные события, вычисляем искомую вероятность по формуле Р(А+В) = Р(А) +Р(В) – Р(АВ):

Р(А+В) = 0,6+0,8-0,5=0,9.

Ответ: 0,9.

3.5 Теоремы умножения вероятностей

Под произведением двух или нескольких событий понимают их совместное наступление или наступление и одного события, и другого, и третьего одновременно. Произведение двух событий состоит из тех элементарных событий, которые благоприятствуют и первому, и второму событию, т.е. принадлежат их пересечению: $A \cdot B = A \cap B$. Вероятность произведения событий зависит от того, являются ли эти события зависимыми или независимыми.

Определение 19. События A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие. Вероятности независимых событий называются безусловными.

Теорема 3. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \bullet P(B) \qquad (16)$$

В частности, вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P\,(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (17)$$

Пример 14. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, из второго орудия – 0,7. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле обоими орудиями.

Решение.

Обозначим события: A – «попадание в цель при стрельбе из первого орудия», B – «попадание в цель при стрельбе из второго орудия», C – «попадание в цель при стрельбе из обоих орудий».

Тогда $C = A \cdot B$, где A и B – независимые события.

$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

Ответ: 0,56.

Рассмотрим случай, когда события A и B зависимые.

Определение 20. События называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от появления или непоявления другого.

Если события зависимые, то вероятность каждого из них зависит от того, произошло или нет другое событие. Вероятность события $P(B)$, вычисленная в предположении, что событие A уже осуществилось, называется условной вероятностью и обозначается $P(B/A)$.

Теорема 4. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \qquad (18)$$

или

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (19)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1\cdot A_2 \ldots A_{n-1}) \quad (20)$$

Пример 15. В коробке лежат 20 компьютерных чипов, 4 из которых бракованные. Необходимо определить вероятность того, что дважды наудачу вытаскивая из коробки чип, мы обнаруживаем, что он бракованный, при условии, что первый чип в коробку не возвращается.

Решение.

Обозначим события: A – «первый чип окажется бракованным»; B - «второй чип окажется бракованным».

Вероятность события A равна $P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

Определим вероятность совместного наступления и A и B, т.е. $A \cdot B$, учитывая, что вытащенный чип обратно не возвращается.

Событие B будет зависеть от того, какой чип был вынут первым. Если первым вынули бракованный чип, то в коробке осталось всего 3 бракованных чипа из 19 оставшихся и вероятность: $P(B/A)=3/19$.

Если же первым достали стандартный чип, то произошло событие $\bar{A}$ и в коробке осталось 4 бракованных чипа из 19 и вероятность: $P(B/\bar{A})=4/19$.

Событие, состоящее в том, что дважды наудачу вытаскивая из коробки чип, мы обнаруживаем, что он бракованный, соответствует наступлению и события A и события B, т.е. их совместному наступлению, или произведению $A \cdot B$.

События A и B зависимые, поэтому для расчета вероятности используем формулу

$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A) = 1/5\cdot 3/19 \approx 0{,}0316$.

Ответ: 0,0316.

Пример 16. При подготовке к экзамену студент выучил 40 вопросов из 50 вопросов программы. Экзаменационный билет содержит 3 разных вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса.

Решение.

Обозначим события:

A – «студент знает ответы на все 3 вопроса»;

A_1 - «студент знает ответ на первый вопрос»;

A_2 - «студент знает ответ на второй вопрос»;

A_3 - «студент знает ответ на третий вопрос».

События A_1, A_2, A_3 зависимы потому, что если студент знает ответ на первый вопрос, то при расчете вероятности того, что он знает ответ на следующий вопрос, остается 39 выученных вопросов из 49 возможных.

Искомое событие А состоит в совместном наступлении зависимых событий A_1, A_2, A_3 и его вероятность равна

$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2) = 40/50\cdot 39/49\cdot 38/48 = 0{,}504$.

Ответ: 0,504.

3.6 Вероятность появления хотя бы одного события

При вычислении вероятности наступления хотя бы одного события целесообразно решать задачи по формуле:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \qquad (21)$$

Обозначим событие А – «событие произошло хотя бы один раз». Тогда событие $\bar{A}$ – «событие не произошло ни разу»:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Пример 17. Найти вероятность того, что при одном подбрасывании двух монет хотя бы один раз выпадет герб.

Решение.

Первый способ. При одном подбрасывании двух монет возможны элементарные исходы: ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ. Очевидно, что герб появился в трех случаях из четырех. Поэтому искомая вероятность равна ¾ = 0,75.

Второй способ. Обозначим события: А – «хотя бы один раз выпадет герб», $\bar{A}$ – « герб не выпал ни разу», т. е выпали цифры на обеих монетах. Вероятность выпадения цифры равна 0,5 и тогда,

$P(\bar{A}) = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Следовательно, $P(A) = 1 – 0{,}25 = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

А представьте, если монет больше? Например, 10? Удобно ли перебирать все варианты выпадения и сколько на это будет потрачено времени?

Вероятность наступления события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ... A_n, независимых в совокупности, вероятности которых равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$ равна:

$$P(A) = 1 - (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\ldots\cdot(1-p_n).$$

Если вероятность события А равна p, то вероятность противоположного события $\bar{A}$ обозначают q. Тогда $p + q = 1$ ($q = 1 - p$).

Пример 18. Имеются 3 ящика, в которых находятся по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь будет стандартная.

Решение.

Обозначим события: А – «хотя бы одна деталь будет стандартная», A_1 – «из первого ящика вынута стандартная деталь», A_2 - «из второго ящика вынута стандартная деталь», A_3 - «из третьего ящика вынута стандартная деталь».

$P(A) = 1 – P(\bar{A})$, где $\bar{A}$ – «ни одной стандартной детали».

По условию $P(A_1) = 8/10 = 0,8$, $P(A_2) = 7/10 = 0,7$, $P(A_3) = 9/10 = 0,9$.

$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ и $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) =(1- 0,8) \cdot (1-0,7) \cdot (1-0,9) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006$. Тогда $P(A) = 1-0,006 = 0,994$.

Ответ: 0,994.

3.7 Вопросы для самоконтроля

1.Что называется вероятностью наступления случайного события?

2. Что такое относительная частота события?

3. Сформулируйте классическое определение вероятности.

4. В каких пределах изменяется вероятность?

5.Чему равна вероятность появления одного из нескольких несовместных событий?

6. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

7. Какие события называются независимыми?

8. Чему равна вероятность совместного появления двух независимых событий?

9. Чему равна вероятность совместного появления двух зависимых событий?

10. Какие случайные события называются зависимыми?

11.Как определяется произведение вероятностей наступления для трех зависимых событий?

12. От чего зависит формула вероятности суммы случайных событий?

13. От чего зависит формула вероятности произведения случайных событий?

14.Дайте определение условной вероятности события.

15.Как найти вероятность противоположного события?

16. Как найти вероятность наступления хотя бы одного события?

17. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

3.8 Тест № 2 для самоконтроля по разделу «Вероятности случайных событий»

1. По какой формуле можно вычислить вероятность совместного появления двух зависимых событий?

а) $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

б) $P(A) + P(B)$;

в) $P(A) \cdot P(B/A)$;

г) $P(A) \cdot P(B)$.

2. По какой формуле можно вычислить вероятность появления одного из двух несовместных событий?

а) $P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$;
б) $P(A) \cdot P(B)$;
в) $P(A) + P(B)$;
г) $P(A) \cdot P(B/A)$.

3. Известны вероятности событий A_1, A_2, A_3. Какая из вероятностей соответствует событию, состоящему в том, что произойдут все события?

а) $1- P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$;
б) $P(A_1 + A_2 + A_3)$;
в) $1 – P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)$;
г) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$.

4. Известны вероятности событий A_1, A_2, A_3. Какая из вероятностей соответствует событию, состоящему в том, что произойдет хотя бы одно событие?

а) $1- P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$;
б) $P(A_1 + A_2 + A_3) - 1$
в) $1 – P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)$;
с) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$.

5. Известны вероятности событий A_1, A_2, A_3. Какая из вероятностей соответствует событию, состоящему в том, что хотя бы одно событие не произойдет?

а) $1- P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$;
б) $P(A_1 + A_2 + A_3)$;
в) $1 – P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3)$;
с) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$.

3.9 Решение задач с применением теорем сложения и умножения

Указания к решению задач. При решении задач с применением теорем сложения и умножения необходимо:

• обозначить искомое событие;

• событие разложить на элементарные;

• выяснить вид операции над событиями ;

•если элементарные события складываются, то выяснить являются они совместными или несовместными;

• в случае несовместных событий применить теорему сложения для несовместных событий;

• в случае совместных событий применить теорему сложения для совместных событий или перейти к противоположному событию и применить формулу для вычисления вероятности противоположного события;

• если события умножаются, то выяснить, являются они зависимыми или независимыми;

• если события являются независимыми, то применить теорему умножения для независимых событий;

• если события являются зависимыми, то применить теорему умножения для зависимых событий.

Задача 37. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2.

Найти вероятность появления:

а) только одного из этих событий;

б) только события A_1;

в) хотя бы одного из этих событий.

Решение.

Введем обозначение событий:

A – появление только одного из этих событий;

B_1 – появилось только событие A_1;

B_2 – появилось только событие A_2;

C – появилось хотя бы одно из этих событий A_1 и A_2.

$B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$, $B_2 = A_2 \cdot \overline{A_1}$, $A = B_1 + B_2 \Rightarrow A = A_1\overline{A_2} + A_2\overline{A_1}$

События A_1 и A_2 независимы, события B_1 и B_2 несовместны, поэтому

а) $P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(A_2) \cdot P(\overline{A_1}) = p_1q_2 + p_2q_1$,

где $p_i+q_i=1$.

б)$P(B_1)=p_1q_2$

в)Обозначим $\overline{C}$ (событие, противоположное событию C) - не появилось ни одно из этих событий A_1 и A_2; $\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

Тогда $P(C)=1- P(\overline{C})= 1- (1 –p_1)\cdot(1- p_2)$.

Задача 38. В ящике 6 былых и 8 черных шаров. Из ящика вынули последовательно (один за другим) два шара (не возвращая вынутый шар в ящик).

Найти вероятность того, что:

а) оба шара белые;

б) шары разного цвета.

Решение.

Обозначим события:

A - появление белого шара при первом вынимании;

B - появление белого шара при втором вынимании;

C - появление черного шара при втором вынимании.

а) События A и B зависимые, поэтому

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 6/14 \cdot 5/13 = 15/91;$

б) События A и C зависимые, поэтому

$P(AC) = P(A) \cdot P(A/C) = 6/14 \cdot 8/13 = 24/91.$

Ответ: а) 15/91; б) 24/91.

3.10 Задачи для самостоятельного решения к разделу 3 «Вероятности случайных событий»

Задача 39. В электрическую цепь последовательно включены 3 элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны: 0,1; 0,05; 0,2. Найти вероятность того, что при включении цепи в сеть тока в цепи не будет.

Ответ: 0,316.

Задача 40. При покупке акций менеджер компании проводит анализ надежности банков, в результате которого выявляет, что надежности акций 3 обследованных банков равны: 70%, 80% и 95% соответственно. Определите вероятность следующих событий: A – «за год обанкротится хотя бы один из банков»; B – «обанкротятся все 3 банка»; C – «не обанкротится ни один банк».

Ответ: P(A) = 0,468; P(B) = 0,003; P(C) = 0,532.

Задача 41. В отделе работают 10 инженеров, 5 техников и 3 лаборанта. Среди сотрудников отдела случайным образом отбирают 5 человек для дежурства в праздничный день. Определите вероятность, что все 5 человек окажутся:

а) не техниками;

б) инженерами.

Ответ: а)0,15; б)0,03.

Задача 42. Известно, что в среднем один из 20 покупателей магазина «Современное видео» приобретает дорогостоящую аппаратуру. В течение первой половины дня магазин посетили 12 покупателей. Найдите вероятность, что за это время будет сделана хотя бы одна дорогая покупка.

Ответ: 0,46.

Задача 43. В колледже, по сведениям учебной части, 15% студентов учатся на «отлично». Случайным образом выбирают трех студентов. Найдите вероятности событий: A – «все выбранные студенты отличники»; B- «ни один из выбранных не является отличником»; C – «хотя бы один из выбранных студентов отличник».

Ответ: $P(A) = 0,0034$; $P(B) = 0,614$; $P(C) = 0,386$.

Раздел 4. Формула полной вероятности, формула Байеса, формула Бернулли

4.1 Формула полной вероятности

Следствием теорем сложения и умножения является важная формула, которая называется формулой полной вероятности.

Пусть имеются события H_1, H_2, H_3,…, H_n, образующие полную группу событий, и известны вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_i)$, …, $P(H_n)$ этих событий, причем, так как они несовместны:

$$\sum_{i-1}^{n} P(H_i) = 1$$

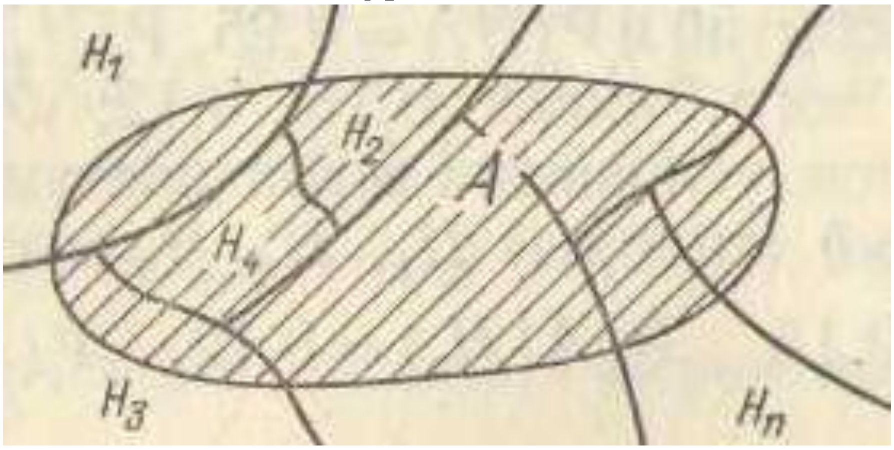


Рисунок 9 – Событие А и полная система событий H_1, H_2, H_3, …, H_n

Будем называть эти события гипотезами, если некоторое событие А может произойти или нет лишь вместе с одним из этих событий, и при этом известны условные вероятности наступления события А совместно с каждой из гипотез: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$,…, $P(A/H_i)$,…, $P(A/H_n)$.

Например, пусть событие А – «рост акций компании» может осуществиться только совместно с одной из гипотез: H_1 – «экономика страны на подъеме», H_2 - «экономика страны на спаде» и H_3 - «экономика страны стабильна », и при этом известны вероятности гипотез ($P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$) и условные вероятности события А при наступлении каждой гипотезы ($P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $P(A/H_3)$). Гипотезы H_1, H_2, H_3 несовместны и образуют полную группу событий, события AH_1, AH_2 и AH_3 попарно несовместны, а событие А зависит от наступления гипотез H_1, H_2 и H_3.

В этом случае вычислять вероятность наступления события А следует по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \qquad (21)$$

Вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез H_1, H_2, H_3, …, H_n на условные вероятности события А, при условии наступления соответствующей гипотезы.

Пример 19. В учебном пособии по физике имеется 45 задач к первому разделу, 30 задач ко второму разделу и 35 задач к третьему разделу дисциплины. Шансы студента правильно решить задачу из первого раздела оцениваются в 80%, из второго – в 65%, из третьего – в 85%. Студент наудачу открывает пособие. Определить вероятность того, что студент решит случайно выбранную задачу.

Решение.

Обозначим событие А – «студент решит случайно выбранную задачу».

Это может произойти совместно с одной из следующих гипотез:

H_1 – задача из первого раздела;

H_2 – задача из второго раздела;

H_3 – задача из третьего раздела.

Определим вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{45}{110}=\frac{9}{22}\approx 0{,}409;$$

$$P(H_2)=\frac{30}{110}=\frac{3}{11}\approx 0{,}273;$$

$$P(H_3)=\frac{35}{110}=\frac{7}{22}\approx 0{,}318;$$

$P(A/H_1) = 0{,}8$, $P(A/H_2) = 0{,}65$, $P(A/H_3) = 0{,}85$.

По формуле полной вероятности

$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=0{,}409\cdot 0{,}8+0{,}273\cdot 0{,}65+$ $+0{,}318\cdot 0{,}85=0{,}77495$.

Ответ: 0,77495.

По формуле полной вероятности можно вычислять, например, вероятность попадания на сборку стандартной детали из общей партии деталей, изготовленных на разных станках, если для каждого станка известны его доля в общем числе выпускаемых деталей, а также другие аналогичные задачи.

4.2 Формула Байеса

Современные методы управления различными процессами в экономике, экологии, медицине и других областях науки и производства непременно используют анализ окружающей действительности посредством математических методов, к которым относятся и вероятностные методы. Имея предварительные, априорные значения вероятностей интересующих исследователя событий, он проводит опыт или отбор данных из источников информации, таких выборки, отчеты и т.д., получая при этом дополнительную информацию об интересующем его событии.

Имея эту новую информацию, можно уточнить, пересчитать значения априорных вероятностей. Новые значения вероятностей для тех же интересующих нас событий будут уже апостериорными (послеопытными) вероятностями. Формула Байеса дает нам правило для вычисления таких вероятностей.

Если некоторое событие А может произойти лишь вместе с одной из гипотез H_1, H_2, H_3, …, H_n, образующих полную группу событий, и известны априорные вероятности каждой гипотезы $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_i)$, …, $P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А совместно с каждой из гипотез $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_i)$, …, $P(A/H_n)$, то проведя опыт или эксперимент, можно восстановить апостериорные вероятности гипотез при условии, что событие А произошло.

Для определения апостериорных условных вероятностей гипотез используется формула Байеса:

$$P(H_i /A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \tag{22}$$

где P(A) вычисляется по формуле полной вероятности.

По формуле Байеса вычисляется вероятность наступления *i–той* гипотезы, если событие А уже произошло. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на отвечающую ей условную вероятность события А, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события А.

В настоящее время формулы Байеса находят широкое применение при решении проблем управления, связанных с принятием административных решений, когда приходится сталкиваться с недостаточной информацией о закономерностях в экономике и промышленности. По мере накопления дополнительной информации производится корректировка решений. Например, одной из таких проблем является принятие окончательного решения при входном контроле партии деталей.

При этом возможны следующие варианты решений:

1)принять всю партию, запустив ее в производство;

2)проконтролировать каждое изделие в партии, заменяя или исправляя при этом дефектные изделия;

3)забраковать всю партию.

Использование формулы Байеса позволяет принять наилучшее решение.

Пример 20. Двадцать студентов сдают экзамен по математике. Шестеро из них подготовились отлично, восемь хорошо, четыре удовлетворительно, а двое совсем не подготовились – понадеялись, что все помнят. В билетах 50 вопросов, Отлично подготовившиеся студенты могут ответить на все 50 вопросов, хорошо – на 40, удовлетворительно – на 30 и неподготовившиеся – на 10 вопросов. Приглашенный студент ответил правильно на все три заданные ему вопроса. Найти вероятность того, что он отлично подготовился к экзамену.

Решение.

Обозначим события:

H_1 – «приглашен студент, подготовившийся отлично»;

H_2 – «приглашен студент, подготовившийся хорошо»;

H_3 – «приглашен студент, подготовившийся удовлетворительно»;

H_4 – «приглашен студент, не подготовившийся к экзамену»;

А – «приглашенный студент ответил правильно на все три заданные ему вопроса».

Имеем:

$P(H_1)=6/20=0{,}3$;

$P(H_2)=8/20=0{,}4$;

$P(H_3)=4/20=0{,}2$;

$P(H_4)=2/20=0{,}1$.

Находим условные вероятности:

$P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = \frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48} \approx 0{,}504$, $P(A/H_3) = \frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}\cdot\frac{28}{48} \approx 0{,}207$,

$P(A/H_4) = \frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{8}{48} \approx 0{,}006$.

Найдем P(A) по формуле полной вероятности:

$P(A) = 0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}504+0{,}2\cdot 0{,}207+0{,}1\cdot 0{,}006 = 0{,}5434$.

Согласно условию задачи требуется найти $P(H_1/A)$. По формуле Байеса получим:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}5434} = 0{,}552.$$

Искомая вероятность невелика. Поэтому для уточнения оценки желательно предложить студенту дополнительные вопросы.

Ответ: 0,552.

4.3 Формула Бернулли

Определение 21. Испытания называются независимыми относительно события А, если вероятность появления события А в каждом из этих испытаний не зависит от результата, полученного в других испытаниях.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдет событие А, равна p, а следовательно, вероятность того, что оно не произойдет, равна q. Требуется найти вероятность того, что при n последовательных испытаниях событие А произойдет m раз. Искомая вероятность обозначается $P_n(m)$ и находится по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \tag{23}$$

Пример 21. Вероятность того, что расход электроэнергии на предприятии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,85. Найти вероятность того, что в ближайшие 25 суток расход электроэнергии в течение 20 суток не превысит нормы.

Решение.

Здесь p = 0,85, q = 1-0,85 = 0,15, n = 25, m = 20. По формуле Бернулли имеем:

$$P_{25}(20) = C_{25}^{20} \cdot 0{,}85^{20} \cdot 0{,}15^{25-20} = C_{25}^{5} \cdot 0{,}85^{20} \cdot 0{,}15^{5} \approx 0{,}156.$$

Ответ: 0,156.

Следствия из формулы Бернулли.

Вероятность того, что событие наступит:

1) менее k раз:

$$P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

2) более k раз:

$$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

3) не менее k раз:

$$P_n(n \ge m \ge k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$

4) не более k раз:

$$P_n(0 \le m \le k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

4.4 Вопросы для самоконтроля по разделу 4

1.Какая группа случайных событий называется полной?

2.Приведите примеры полных групп событий.

3.Чему равна сумма вероятностей полной группы случайных событий?

4.Какие события называются гипотезами и почему?

5.Чему равна сумма вероятностей гипотез?

6.Приведите примеры случайных событий, которые осуществляются только совместно с какой-нибудь гипотезой.

7.Для каких случайных событий вероятность определяется по формуле полной вероятности?

8.Запишите формулу полной вероятности и поясните смысл ее слагаемых.

9.Приведите примеры событий, вероятность вычисляется по формуле полной вероятности.

10. Какие вероятности вычисляется по формуле Байеса?

11. Почему вероятности, вычисленные по формуле Байеса, называются апостериорными?

12. Приведите примеры использования апостериорных вероятностей.
13.В каких случаях применяется формула Бернулли?
14.Поясните смысл элементов формулы Бернулли.
15.Поясните смысл следствий из формулы Бернулли.

4.5 Решение задач по разделу 4

Задача 44. В учебных мастерских на станках *a, b* и *c* изготавливают соответственно 25%,35%,40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15%, 12% и 6%.

Найти вероятность того, что наугад взятая деталь небракованная.

Решение. Обозначим события:

A – «наугад взятая деталь небракованная»;

B_1 – «деталь изготовлена на станке *a*»;

B_2 – «деталь изготовлена на станке *b*»;

B_3 – «деталь изготовлена на станке *c*».

События B_1, B_2 ,B_3 образуют полную группу, по условию вероятности наступления этих событий равны:

$P(B_1)=0{,}25$; $P(B_2)=0{,}35$; $P(B_3)=0{,}4$.

Процент изготовления небракованных деталей составляет соответственно 85%, 88%, 94%. Поэтому условные вероятности событий A при условии событий (гипотез) B_1, B_2, B_3 соответственно равны:

$P(A/B_1)=0{,}85$, $P(A/B_2)=0{,}88$, $P(A/B_3)=0{,}94$.

По формуле полной вероятности находим:

$P(A) = 0{,}25\cdot 0{,}85 + 0{,}35\cdot 0{,}88 + 0{,}4\cdot 0{,}94 = 0{,}8965$.

Ответ: 0,8965.

Задача 45. Используя условия *задачи 44*, найдем вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной и изготовлена на станке *b*.

Решение.

Обозначим события:

A – «наудачу выбранная деталь бракованная»;

B_1 – «деталь изготовлена на станке *a*»,

B_2 – «деталь изготовлена на станке *b*»;

B_3 – «деталь изготовлена на станке *c*».

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности.

$P(B_1)=1- 0{,}85 = 0{,}25$;

$P(B_2)= 1-0{,}65 = 0{,}35$;

$P(B_3)= 1 – 0{,}6 =0{,}4$.

Условные вероятности:

$P(A/B_1)=0{,}15$;

$P(A/B_2)=0{,}12$;

$P(A/B_3)=0{,}06$.

Тогда $P(A)=0{,}25\cdot 0{,}15+0{,}35\cdot 0{,}12+0{,}4\cdot 0{,}0{,}6=0{,}1035$.

Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена на станке *b* найдем по формуле Байеса:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}12}{0{,}1035} = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

Задача 46. В коробке 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем вынутый шар возвращается в коробку и перед извлечением следующего шары в коробке тщательно перемешиваются.

Найти вероятность того, что из 5 вынутых шаров будет:

а) 2 белых;

б) не более 2-х белых;

в) более 3 белых;

г) менее 4 белых.

Решение.

Вероятность появления белого шара в каждом испытании равна: $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, а вероятность появления черного шара равна: $p=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

а) по формуле Бернулли находим:

$$P_5(2)=C_5^2\cdot p^2q^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=0{,}09;$$

б) применяем следствие (1) формулы Бернулли:

$$P_5(k\le 2)=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\cdot p^0\cdot q^5+C_5^1\cdot p^1\cdot q^4+C_5^2\cdot p^2q^3=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5+$$

$$+5\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=0{,}001+0{,}015+0{,}09=0{,}115;$$

в) применяем следствие (2) формулы Бернулли:

$$P_5(k>3)=P_5(4)+P_5(5)=C_5^4\cdot p^4\cdot q^1+C_5^5\cdot p^5\cdot q^0=5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0=0{,}405+0{,}243=0{,}648;$$

г) применяем следствие (1) и (3) формулы Бернулли:

$$P_5(4)=1-P(\ge 4)=1-(P_5(4)+P_5(5))=1-0{,}648=0{,}352$$

4.6 Задачи для самостоятельного решения к разделу 4

Указания к решению задач. При решении задач к разделу 4 необходимо знать формулу полной вероятности, формулу Байеса, формулу Бернулли и ее следствия и уметь их использовать для определения апостериорной вероятности. Необходимо обозначить событие и гипотезы, которые составляют полную группу, различать задачи с повторением испытаний.

Задача 47. Курортная гостиница планирует наплыв отдыхающих в течение летнего времени и проводит бронирование номеров. Поскольку в этом виде бизнеса очень высокая конкуренция, то важно. Чтобы все номера были заняты отдыхающими. Руководство гостиницы предполагает, что вероятность того, что в июле гостиница будет заполнена, если погода солнечная, равна 0,92, если погода будет дождливая – 0,72. По оценкам синоптиков, в течение июля будет 75% солнечных дней. Чему равна вероятность того, что гостиница будет заполнена в течение июля?

Ответ: 0,87.

Задача 48. Экономист – аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,15; 0,75 и 0,10 соответственно. При «хорошей» ситуации индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,6, при «посредственной» - с вероятностью 0,3 и при «плохой» – с вероятностью 0,1. Определите вероятность того, что экономическая ситуация в стране не «плохая», если известно, что индекс экономического состояния возрос.

Ответ: 0,969.

Задача 49. В квартире шесть электролампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 5/6. Найти вероятность того, что в течение года придется заменить две лампочки.

Ответ: 0,2.

Задача 50. В ящике находятся 80 стандартных и 20 нестандартных деталей. Найти вероятность того, что из пяти взятых наудачу деталей не более трех окажутся нестандартными.

Ответ: 0,99.

Задача 51. Для нормальной работы станции скорой медицинской помощи требуется не менее восьми автомашин, а их имеется 10. Найти вероятность нормальной работы станции в ближайший день, если вероятность ежедневной неисправности каждой машины равна 0,1.

Ответ: 0,5846.

Раздел 5.Дискретные случайные величины и законы их распределения

5.1 Основные теоретические сведения

Определение 22. Случайной величиной называют такую переменную величину, которая под воздействием случайных факторов может с определенными вероятностями принимать те или иные значения из некоторого множества чисел.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение 23. Случайная величина X называется дискретной, если результаты наблюдений представляют собой конечный или счетный набор возможных чисел.

В результате одного испытания случайная величина X принимает одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены.

Случайная величина задается законом распределения.

Определение 24. Законом распределения дискретной случайной величины (ДСВ) называется соотношение . устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

5.2 Способы задания закона распределения дискретной случайной величины (ДСВ)

5.2.1 Табличное задание

В этом случае таблица состоит из двух строк и называется законом, или рядом распределения, ДСВ. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая - соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
P(X)	p_1	p_2	p_3		p_{n-1}	p_n

Значения X записываются в порядке возрастания и $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

5.2.2 Графическое задание

При графическом задании по оси абсцисс откладывают значения случайной величины, а по оси ординат – ответствующие вероятности этих значений. Точки соединяют отрезками прямой и полученный многоугольник называют многоугольником распределения вероятностей, или полигоном распределения ДСВ X (рисунок 10).

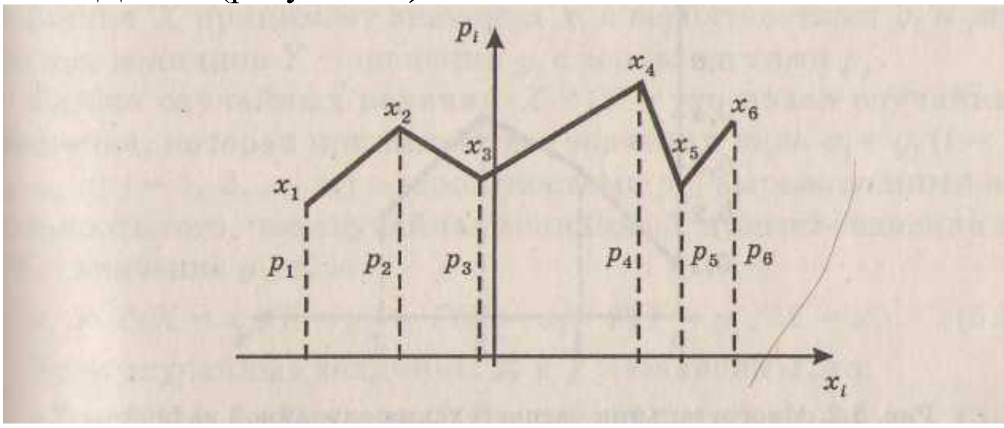


Рисунок 10 – Полигон распределения дискретной случайной величины

5.2.3 Функция распределения

Определение 25. Функцией распределения называется функция F(x), определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем значение аргумента функции - x:

$$F(X) = P(X > x) = \sum\nolimits_{x_i < x} P_i .$$

Построить функцию распределения ДСВ X можно следующим образом:

0, при $x<x_1$,
P_o, при $x<x_2$,
P_0+P_1, при $x<x_3$,
$P_0+P_1+P_2$, при $x<x_4$,
… … … … … … … … …
$P_0+P_1+\ldots+P_n$, при $x<x_n$,
1, при $x \geq x_n$,

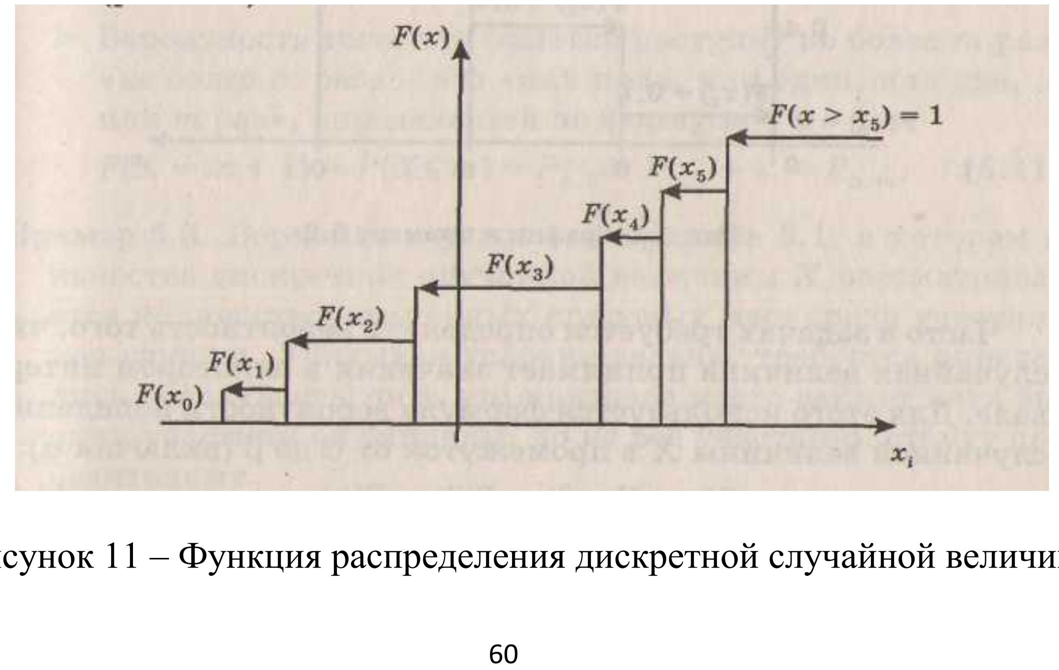


Рисунок 11 – Функция распределения дискретной случайной величины

Пример 22. На олимпиаду по математике посылают трех студентов. Необходимо построить ряд распределения, полигон распределения и функцию распределения возможных призовых мест среди участников группы.

Решение.

В качестве дискретной случайной величины X примем количество возможных призовых мест среди участников группы. Случайная величина X может принимать значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Учитывая уровень подготовки студентов к олимпиаде, вероятности значений случайной величины X распределяют следующим образом:

$p_1=0,1$; $p_2=0,3$; $p_3=0,4$; $p_4=0,2$.

Тогда ряд распределения дискретной случайной величины X – числа возможных призовых мест среди участников группы будет иметь вид:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Полигон распределения вероятностей (рисунок 12):

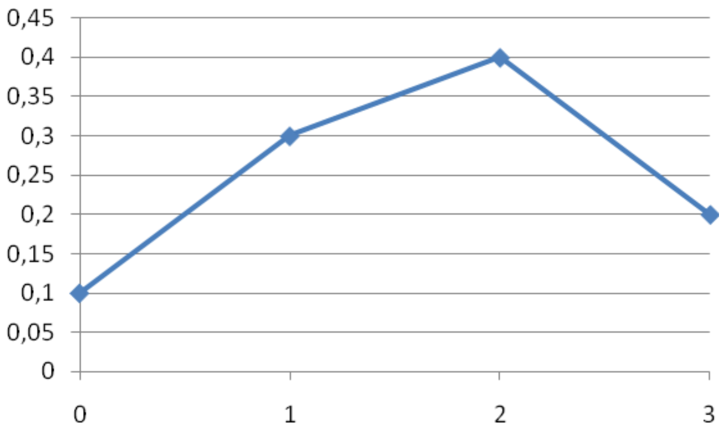


Рисунок 12 – Полигон распределения вероятностей

Функция распределения вероятностей:

если x<0, то F(x) = 0;

если x<1, то F(x) = 0,1;

если x<2, то F (x) =0,1 + 0,3 = 0,4;

если x<3, то F (x) = 0,1+0,3+0,4=0,8;

если x>3, то F (x) = 0,1+0,2+0,4+0,2=1.

График функции распределения постройте самостоятельно.

5.3 Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины полностью ее характеризует. Однако часто закон неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками ДСВ. К числу важных числовых характеристик относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Определение 26. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений значений дискретной случайной величины и соответствующих вероятностей и обозначают:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 \cdot x_2 p_2 \cdot \ldots \cdot x_n p_n .$$

Математическое ожидание характеризует отклонения случайной величины от среднего ожидаемого.

Определение 27. Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Более удобна формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Дисперсия характеризует рассеяние значений дискретной случайной величины вокруг его математического ожидания.

Определение 28. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 23. Воспользуемся условием предыдущего примера и найдем числовые характеристики дискретной случайной величины X – числа возможных призовых мест среди участников группы.

Решение.

Запишем ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Математическое ожидание: $M(X) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 3 = 1{,}7$.

Дисперсия: $D(X) = 0{,}1 \cdot 0^2 + 0{,}3 \cdot 1^2 + 0{,}4 \cdot 2^2 + 0{,}2 \cdot 3^2 - 1{,}5^2 = 0{,}81$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

Свойства числовых характеристик студентам предлагается изучить ***самостоятельно****.*

5.4 Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин

5.4.1 Биномиальное распределение

Для вычисления вероятности того, что в n независимых повторных испытаниях , удовлетворяющих схеме Бернулли, событие А наступит ровно m раз, при X = m = 0, 1, 2, … , n (в любой последовательности), используется формула Бернулли [23]:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Так как правая часть формулы представляет общий член биномиального разложения, то этот закон распределения называют биномиальным.

Ряд распределения имеет вид:

Число успехов X = m	0	1	2	…	m	…	n
Вероятность $P_n(m)$	$C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n$	$C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$		$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$		$C_n^n \cdot p^n \cdot q^0$

Числовые характеристики рассчитывают по формулам:

$$M(X) = n \cdot p \tag{24}$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \tag{25}$$

где p – вероятность успеха в каждом испытании,

q - вероятность неуспеха в каждом испытании,

n- количество испытаний.

5.4.2 Распределение Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность *p* появления события в каждом испытании очень мала, то пользуются приближенной формулой Пуассона:

$$P = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \tag{26}$$

где m - число появлений события в n – независимых испытаниях,

$\lambda = n \cdot p$ - среднее число появлений события в n испытаниях.

Закон распределения Пуассона имеет вид:

m	0	1	2	…	m	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda^m \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$

Числовые характеристики рассчитывают по формулам:

$$M(X) = D(X) = n \cdot p = \lambda \quad (27)$$

5.4.3 Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (0<p<1) и, следовательно, вероятность его непоявления равна q=1-p. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в m-ном испытании, то в предшествующих m-1 испытаниях оно не появлялось.

Пусть дискретная случайная величина X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Возможные значения X – 1, 2, 3, … .

Пусть в первых m -1 испытаниях событие A не наступило, а в m–ном испытании появилось. Вероятность этого события определяется формулой:

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p \quad (28)$$

Придавая k значения 1, 2, 3, …, получим геометрическую прогрессию, поэтому закон распределения называется геометрическим и имеет вид:

m	1	2	3	…	m
P	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…	$q^{m-1} \cdot p$

5.4.4 Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется множество N элементов, из которых M элементов обладают некоторым признаком A. Из этого множества извлекают случайным образом без возвращения n элементов. Требуется найти вероятность того, что из них ровно m обладают признаком A. Искомая вероятность (зависящая от N, M, n, m) определяется по формуле гипергеометрического распределения:

$$P = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (29)$$

где C_N^n – общее число вариантов выбора из N элементов по n элементов,

$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ – число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события.

Гипергеометрический закон распределения имеет вид:

M	0	1	2	…	m
P(X=m)	$\frac{C_M^0 \cdot C_{N-M}^{n}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 \cdot C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$		$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{0}}{C_N^n}$

Числовые характеристики рассчитывают по формулам:

$$M(m) = n \cdot \frac{M}{N} \tag{30}$$

$$D(m) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \tag{31}$$

5.5 Наивероятнейшее значение дискретной случайной величины

Определение 29. Наименьшее целое число m_0 и при котором вероятность P(x=m) достигает наибольшего значения, называется наивероятнейшим значением числа наступления некоторого события А при *n* независимых испытаниях и находится по формуле:

$$n \cdot p + p - 1 < m_0 < n \cdot p + p \tag{32}$$

В том случае, когда n· p + p -1 – целое число, то имеются два наиболее вероятных значения наступления событий, а если n· p + p -1 – не целое число, то наивероятнейшее событие одно.

5.6 Методические указания к решению задач по разделу 5.

Задача 52. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Вычислить числовые характеристики, построить многоугольник распределения. Найти вероятность того, что, по крайней мере, 2 стрелка попадут в цель. Какое число стрелков, попавших в цель, наиболее вероятно?

Решение.

Здесь биномиальное распределение.

1. Случайная величина X – число попаданий в цель при четырех выстрелах может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P(X=0) = C_4^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}0001;$$

$$P(X=1) = C_4^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0036;$$

$$P(X=2) = C_4^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0486;$$

$$P(X=3) = C_4^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}2916;$$

$$P(X=4) = C_4^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}6561.$$

Проверка: ΣP_i = 0,0001+0,0036+0,0486+0,2916+0,6561 = 1.

Искомый закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

2. Найдем числовые характеристики:

$M(X)=0\cdot0,0001+1\cdot0,0036+2\cdot0,0486+3\cdot0,2916+4\cdot0,6561=0,9756.$

$D(X)=0^2\cdot0,0001+1^2\cdot0,0036+2^2\cdot0,0486+3^2\cdot0,2916+4^2\cdot0,6561-(0,9756)^2=12,386.$

$\sigma(X)=\sqrt{12,386}=3,5.$

3. Многоугольник распределения имеет вид:

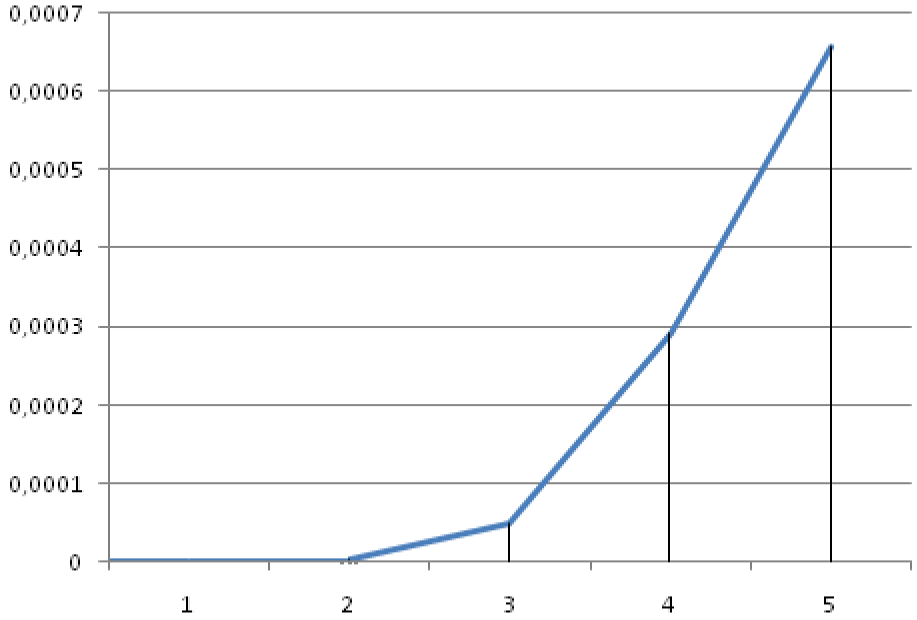


Рисунок 13 – Многоугольник распределения

4. Найдем вероятность того, что, по крайней мере, 2 стрелка попадут в цель.

Обозначим события:

A – «по крайней мере, 2 стрелка попадут в цель»;

Ā – «менее двух стрелков попадут в цель».

Тогда:

P(A) = 1- P(Ā) = 1 – (0,0001+0,0036) = 0,9954.

5.Найдем, какое число стрелков, попавших в цель, наиболее вероятно по формуле (32):

$n\cdot p+p-1 < m_0 < n\cdot p+p.$

Получаем $4\cdot0,9+0,9-1 < m_0 < 4\cdot0,9+0,9.$

$3,5 < m_0 < 4,5$, т.е. по смыслу $m_0=4$.

Задача 53. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родилось 1 мая?

Решение.

По формуле Пуассона $P = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$ имеем:

$m = 2$; $n = 500$; $P = \frac{1}{365}$; $\lambda = n \cdot p = 1{,}3699$.

Тогда $P = \frac{1{,}3699^2}{2!} \cdot e^{-1{,}3699} \approx 0{,}2385$.

Ответ: 0,2385.

Задача 54. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые он посетит, если в городе четыре библиотеки.

Решение.

Здесь геометрическое распределение.

Случайная величина X - число библиотек, которые посетит студент. Возможные значения, которые принимает величина X: 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности найдем по формуле [28]:

$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p$, при $p = 0{,}3$, $q = 1-0{,}3 = 0{,}7$.

$P(X = 1) = 0{,}7^0 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$;

$P(X = 2) = 0{,}7^1 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$;

$P(X = 3) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$;

$P(X=4) = 0{,}7^3 \cdot 1 = 0{,}343$ (в последнем расчете $p = 1$,так как студент посетил все библиотеки). Записываем в таблицу значения случайной величины и соответствующие вероятности.

Ответ:

1	2	3	4
0,3	0,21	0,147	0,343

Задача 55. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – число окрашенных деталей среди наудачу взятых 5 деталей.

Решение.

Здесь гипергеометрическое распределение.

Возможные значения, которые принимает величина X: 0, 1, 2, 3,4, 5. Соответствующие вероятности найдем по формуле [29]:

$$P = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

$$P(X = 0) = \frac{C_{20}^0 \cdot C_{30}^5}{C_{50}^5} = 0{,}067;$$

$$P(X=1)=\frac{C_{20}^{1}\cdot C_{30}^{4}}{C_{50}^{5}}=0{,}26;$$

$$P(X=2)=\frac{C_{20}^{2}\cdot C_{30}^{3}}{C_{50}^{5}}=0{,}364;$$

$$P(X=3)=\frac{C_{20}^{3}\cdot C_{30}^{2}}{C_{50}^{5}}=0{,}234;$$

$$P(X=4)=\frac{C_{20}^{4}\cdot C_{30}^{1}}{C_{50}^{5}}=0{,}07;$$

$$P(X=0)=\frac{C_{20}^{5}\cdot C_{30}^{0}}{C_{50}^{5}}=0{,}007.$$

Проверка:

ΣP_i = 0,067 + 0,26 + 0,364 + 0,234 + 0,07 + 0,007 = 1,0023 ≈ 1 (погрешность вычислений произошла при округлении приближенных значений).

Ответ:

0	1	2	3	4	5
0,067	0,26	0,364	0,234	0,07	0,007

Задача 56. На заводе работают три автоматические линии. Вероятность того, что в течение рабочей смены первая линия не потребует регулировки, равна 0,9, вторая – 0,8, третья – 0,75. Найти математическое ожидание числа линий, которые в течение рабочей смены не потребуют регулировки.

Решение.

Составим закон распределения дискретной случайной величины X - числа линий, которые в течение рабочей смены не потребуют регулировки.

Возможные значения, которые принимает величина X: 0, 1, 2, 3,4.

Здесь мы не можем применить вышерассмотренные законы и вероятности найдем, применяя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Обозначим события:

A – «ни одна линия в течение рабочей смены не потребует регулировки»;

B - «одна линия в течение рабочей смены потребует регулировки»;

C - «две линии в течение рабочей смены потребуют регулировки»;

D - «три линии в течение рабочей смены потребуют регулировки».

Вероятности того, что линии в течение рабочей смены не потребуют регулировки, соответственно равны:

$p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$.

Вероятности того, что линии в течение рабочей смены потребуют регулировки, соответственно равны:

$q_1 = 1- 0{,}9 = 0{,}1$; $q_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_3 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Предполагается, что линии работают независимо друг от друга, поэтому применяем теорему сложения несовместных событий и теорему умножения независимых событий.

$P(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}54;$

$P(B)=q_1 \cdot p_2 \cdot p_3+p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 +p_1 \cdot p_2 \cdot q_3=0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75+0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75+0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25=0{,}375;$

$P(C)=p_1 \cdot q_2 \cdot q_3+q_1 \cdot p_2 \cdot q_3+q_1 \cdot q_2 \cdot p_3=0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25+0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25+0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75=0{,}08;$

$P(D) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}005.$

Проверка: $\Sigma P = 0{,}54+0{,}375+0{,}08+0{,}005 = 1$.

Запишем закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0,54	0,375	0,08	0,005

Найдем математическое ожидание:

$M(X) = 0 \cdot 0{,}54 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}005 = 0{,}685.$

Ответ: 0,685.

5.7 Вопросы для самоконтроля по разделу 5 «Дискретные случайные величины»

1.Дайте определение дискретной случайной величины. Приведите примеры.

2.Укажите способы задания дискретной случайной величины.

3.Что представляет собой полигон распределения дискретной случайной величины?

4.Что представляет собой ряд распределения дискретной случайной величины?

5.Какими способами может задаваться ряд распределения дискретной случайной величины?

6.Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.

7.Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины.

8.Дайте определение среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины.

9.В чем состоит сущность числовых характеристик дискретной случайной величины?

10.Какое распределение дискретной случайной величины называется биномиальным? Почему?

11.Какое распределение дискретной случайной величины называется Пуассоновским? Почему?

12.Какое распределение дискретной случайной величины называется геометрическим? Почему?

13.Какое распределение дискретной случайной величины называется гипергеометрическим? Почему?

14.Как проверить правильность расчетов при составлении ряда распределения?

15.Как найти наивероятнейшее значение дискретной случайной величины?

Раздел 6. Непрерывные случайные величины

6.1 Геометрическая вероятность

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок определяется равенством:

$$P = \frac{\text{Длина } l}{\text{Длина L}} \tag{33}$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством:

$$P = \frac{\text{Площадь g}}{\text{Площадь G}} \tag{34}$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$P = \frac{\text{Объем v}}{\text{Объем V}} \tag{35}$$

6.2 Методические указания к решению задач на геометрическую вероятность

Задача 57. В круг радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри данного вписанного правильного треугольника (рисунок 14).

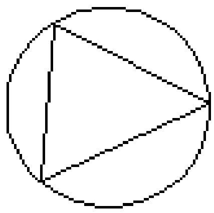


Рисунок 14 – Вписанный в круг правильный треугольник

Решение.

Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга (34):

$$P = \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot R^2}{4\cdot\pi\cdot R^2} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\pi} \approx 0{,}4137.$$

Ответ: 0,4137.

Задача 58. Из отрезка [0, 2] наудачу выбраны два числа x и y. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

Решение.

По условиям опыта координаты точки (x, y) удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 \le 4y \\ 4y \le 4x \end{cases}$$

Это значит, что точка (x, y) наудачу выбирается из множества точек квадрата со стороной 2 (рисунок 15). Интересующее нас событие происходит в том и только в том случае, когда выбранная точка (x, y) окажется в заштрихованной фигуре. Эта фигура получена как множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$. Следовательно, искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата (34):

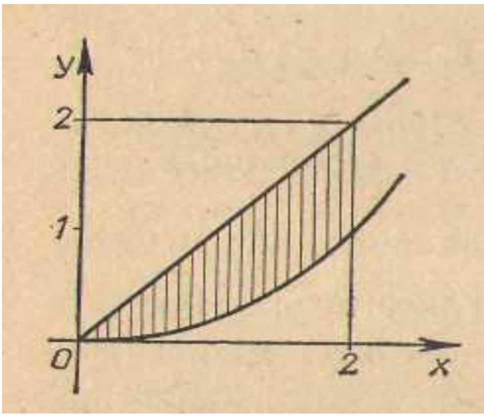


Рисунок 15

Задача 59. Двое условились встретиться в определенном месте между полуднем и часом дня. Каждый из пришедших ждет другого 20 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если приход каждого в течение указанного часа происходит наугад и моменты прихода независимы?

Решение.

Пусть x и y – моменты прихода договорившихся сторон; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ (в часах). Тогда условие встречи запишется в виде:

$$|y - x| \le \frac{1}{3} \tag{36}$$

Теперь задачу можно интерпретировать следующим образом. В квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ в декартовой прямоугольной системе координат (рисунок 16) наугад бросают точку. Какова вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять условию (36)?

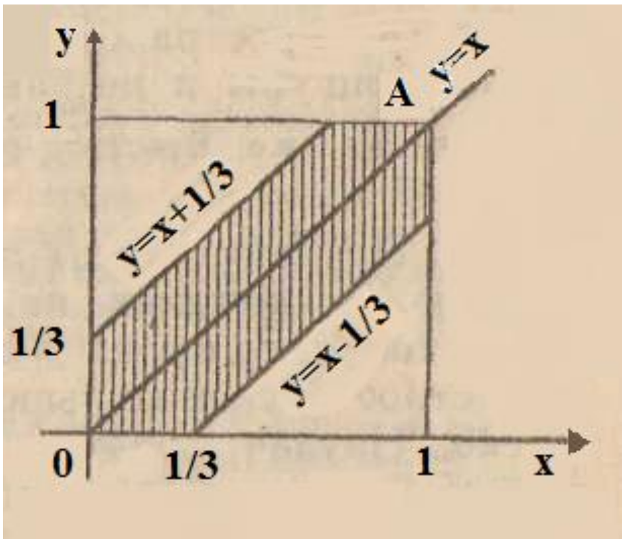


Рисунок 16

Шестиугольник, отмеченный на рисунке 16, получается следующим образом. Неравенство (36) равносильно двойному неравенству:

$$-\frac{1}{3} \le y - x \le \frac{1}{3}$$

или системе неравенств $\begin{cases} y - x \ge -\dfrac{1}{3} \\ y - x \le \dfrac{1}{3} \end{cases}.$

Поэтому интересующие нас точки (x,y) расположены в рассматриваемом квадрате под прямой $y - x = \frac{1}{3}$ и над прямой $y - x = -\frac{1}{3}$.

Площадь шестиугольника получается, если из площади квадрата вычесть площади двух равных прямоугольных треугольников с катетами $a = b = \frac{2}{3}$, (эти два треугольника дополняют шестиугольник до квадрата).

Таким образом, интересующая нас вероятность p того, что встреча состоится, определяется отношением площади шестиугольника к площади квадрата (34):

$$S = \frac{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1^2} = \frac{5}{9}.$$

6.3 Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Определение 30. Интегральной функцией распределения называют функцию F(x), определяющую для каждого для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е.

F(x) = P(X<x) (37)

Часто вместо термина «интегральная функция» пользуются термином «функция распределения».

Интегральная функция обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку $[0;1]$:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Свойство 2. Интегральная функция есть неубывающая функция, т.е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2>x_1$$

<u>*Следствие 1.*</u> Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a; b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

<u>*Следствие 2.*</u> Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например X_1 равна нулю:

$$P(X=X_1) = O$$

Свойство 3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a; b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a; \quad F(x) = 1 \text{ при } x \ge b$$

<u>***Следствие.***</u> Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$$

Определение 31. Дифференциальной функцией распределения вероятностей называют первую производную от интегральной функции:

$$f(x) = F'(x) \qquad (38)$$

Часто вместо термина «дифференциальная функция» используют термин «плотность вероятности».

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a; b), определяется равенством:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (39)$$

Зная дифференциальную функцию, можно найти интегральную функцию по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} (x)\,dx \qquad (40)$$

Дифференциальная функция обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Дифференциальная функция неотрицательна, т.е.

$$f(x) \geq 0$$

Свойство 2. Несобственный интеграл от дифференциальной функции в пределах от $-\infty$до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a; b), то:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1.$$

Пример 24. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \cos x, 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти:

1) интегральную функцию F(X);

2) вычислить вероятности выполнения неравенств $\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{3}, X > \frac{\pi}{3}$.

Решение.

1) Воспользуемся формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Если $x \leq 0$, то $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx$

Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $f(x) = \cos x$ и $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \cos x \cdot dx = \sin x$

Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot dx = 1$

Итак, искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2) Графики:

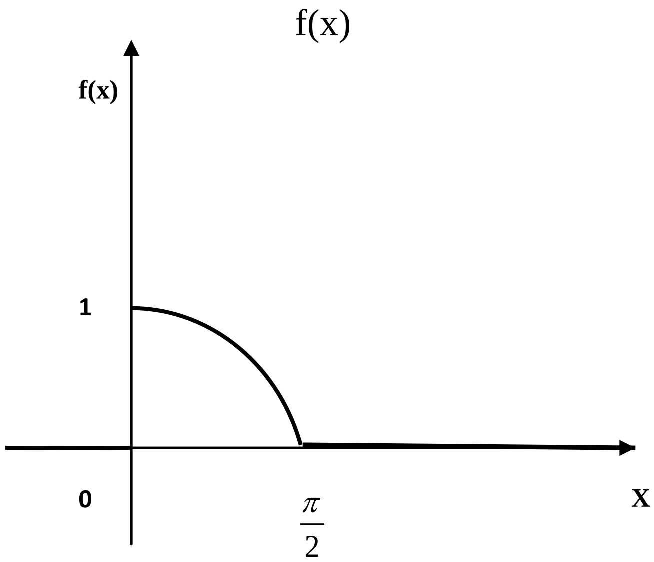


Рисунок 17 – График дифференциальной функции распределения

F(x)

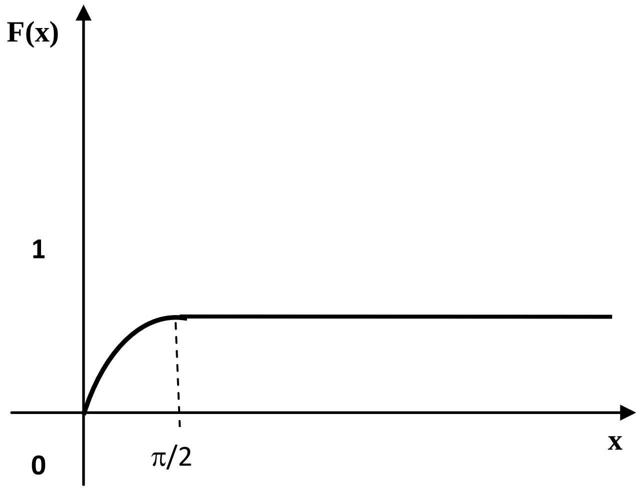


Рисунок 18 – График интегральной функции распределения

3) Используем формулу P(a < X < b)=F(b)-F(a), $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$.

Тогда $P(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}) = F(\frac{\pi}{3}) - F(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

$P(x > \frac{\pi}{3}) = P(\frac{\pi}{3} < x < +\infty) = F(+\infty) - F(\frac{\pi}{3}) = 1 - \sin\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.4 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определение 32. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (41)$$

где f(x) - дифференциальная функция. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad (42)$$

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Если Y = φ(X)- функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат всей оси Ox, то

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \qquad (43)$$

В частности, если возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то

$$M(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) dx \qquad (44)$$

Если кривая распределения симметрична относительно прямой x = c, то

$$M(X) = c$$

Определение 33. Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины называют, то её возможное значение, которому соответствует максимум дифференциальной функции.

Определение 34. Медианой M_e (X) непрерывной случайной величины называют то её возможное значение, которое определяется равенством

$$P(X<M_e(X)) = P(X>M_e(X))$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината f(x) делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

Определение 35. Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат Ox, определяется равенством:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \qquad (45)$$

или равносильным равенством:

$$D(X) = \int_{-\nabla}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \qquad (46)$$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \qquad (47)$$

или

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 \qquad (48)$$

Все свойства дисперсии, указанные выше для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$$

Если Y = $\varphi(X)$ – функция случайного аргумента X, причем возможные значения принадлежат всей оси O_x, то

$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M(\varphi(X)))^2 \cdot f(x)dx$

или

$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x))^2 \cdot f(x)dx - (M(\varphi(X)))^2.$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b (\varphi(x) - M(\varphi(X)))^2 \cdot f(x)dx$$

или

$D(\varphi(X)) = \int_a^b (\varphi(x))^2 \cdot f(x)dx - (M(\varphi(X)))^2.$

Пример 25. Найти числовые характеристики непрерывной случайной величины по условию предыдущего примера.

Решение.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x dx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (x \cdot \sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$$

$$= (x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}.$

6.5Основные законы распределения непрерывных случайных величин

6.5.1 Равномерное распределение непрерывных случайных величин

Равномерное распределение определяется дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = const, x \in (a; b) \\ 0, x \in (a; b) \end{cases},$$

интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, > a \le x \le b, \\ 1, x > b \end{cases}$$

вероятность определяется формулой

$$P(\, a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

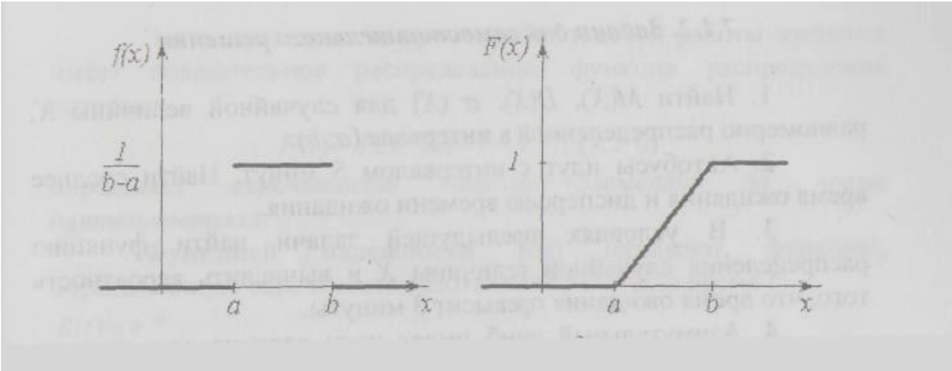


Рисунок 19 – Графики равномерного распределения

Числовые характеристики случайной величины, распределенной равномерно, определяются по формулам:

математическое ожидание $M(X) = \frac{a+b}{2}$,

дисперсия $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Пример 26. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение.

Ошибку округления можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями.

Плотность равномерного распределения f(x)=1/(b-a), где (b-a) – длина интервала, в котором заключены все возможные значения X; вне этого интервала f(x) = 0.

В данной задаче длина интервала равна 0,1, поэтому f(x)=1/0,1=10. Ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02;0,08).

По формуле (39) получаем

$$P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int_{0{,}02}^{0{,}08} 10\,dx = 10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08} = 10(0{,}08 - 0{,}02) = 0{,}6.$$

6.5.2 Нормальное распределение непрерывных случайных величин

Определение 36. Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad (49)$$

где a – математическое ожидание;

σ – среднее квадратическое отклонение X.

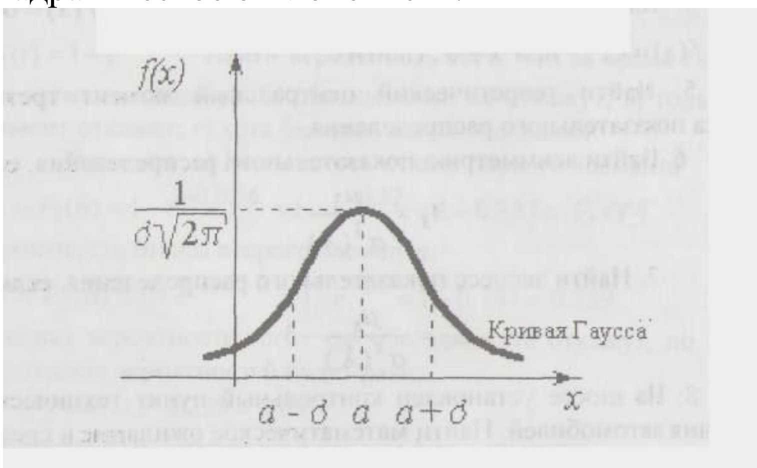


Рисунок 20 – График нормального распределения

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α;β), вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (50)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx$ - функция Лапласа, значения которой находят по специальным таблицам.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, определяется по формуле

$$P\left(|X - a|\right) < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{51}$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство:

$$P\left(|X| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{52}$$

Пример 27. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной величины X соответственно равны 10 и 2.

Найти вероятность того, что в результате испытания примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение.

Воспользуемся формулой (50).

Подставив α=12, β=14, a=10 и σ=2, получим

$P(12<X<14) = \Phi(2) - \Phi(1)$.

По таблице приложения №   находим Ф(2)=0,4772, Ф(1)=0,3413.

Искомая вероятность: $P(12<X<14) = 0{,}1359$.

6.5.3 Показательное распределение непрерывных случайных величин

Определение 37. Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \ge 0 \end{cases} \tag{53}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ при } x \ge 0 \end{cases} \tag{54}$$

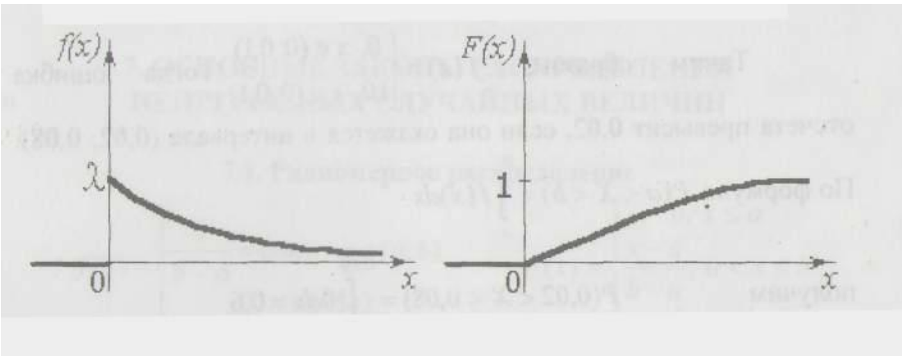


Рисунок 21 – Графики показательного распределения

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, определяется формулой:

$$P(a< X <b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \tag{55}$$

Числовые характеристики показательного распределения находят по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \tag{56}$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2} \tag{57}$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda} \tag{58}$$

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t:

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t} \tag{59}$$

Функцией надежности называют функцию R(t), определяющую вероятность безотказной работы за время t:

$$R(t)=e^{-\lambda t} \tag{60}$$

Пример 28. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ =5.

Решение.

Подставив λ = 5 в соотношения (53, 54), получим:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0\\ 5e^{-5x}, \text{при } x\geq 0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0\\ 1-e^{-5x}, \text{при } x\geq 0\end{cases}$$

6.6 Методические указания к решению задач по разделу «Непрерывные случайные величины»

Задача 60. По условию примера 26, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка меньше 0,04.

Решение.

Величина X принадлежит двум интервалам (0; 0,04) и (0,06; 1). Тогда искомая вероятность P определится формулой (39):

$$P = P(0 < x < 0{,}04) + P(0{,}06 < x < 1) = \int_0^{0{,}04} 10dx + \int_{0{,}06}^{1} 10dx = 10 \cdot x\Big|_0^{0{,}04} + 10 \cdot x\Big|_{0{,}06}^{1} =$$

$$= 10 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}04 = 0{,}8.$$

Задача 61. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин.

Найти вероятность того, что:

а) пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.;

б) найти вероятность того, что один из друзей, договорившихся встретиться на остановке, придет не позднее, чем за 2 мин., а другой не ранее 3 мин. до отхода автобуса.

Решение.

а) Величина X равномерно распределена в интервале (0; 5):

$$f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Вероятность $P(2 < x < 5) = \int_2^5 0{,}2dx = 0{,}2x\Big|_2^5 = 0{,}2(5-2) = 0{,}6.$

б) $P = P_1 \cdot P_2$,

$$P_1 = P(0 < x < 3) = \int_0^3 0{,}2dx = 0{,}2x\Big|_0^3 = 0{,}2(3-0) = 0{,}6;$$

$$P_2 = P(3 < x < 5) = \int_3^5 0{,}2dx = 0{,}2x\Big|_3^5 = 0{,}2(5-3) = 0{,}4.$$

$P=0{,}6 \cdot 0{,}4=0{,}24.$

Задача 62. Диаметр круга приближенно равен 6 см. Найти математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) площади круга.

Решение.

Величина x равномерно распределена в интервале (0; 6); $f(x) = \frac{1}{6-0} = \frac{1}{6}$.

Обозначим $\varphi(x) = S_{кр} = \frac{\pi d^2}{4}$.

Тогда математическое ожидание $M(X) = \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \int_0^6 \frac{\pi\, 36}{4} \cdot \frac{1}{6} dx = 9\pi.$

Дисперсия $D(X) = \int_a^b \varphi^2(x)\, f(x)\, dx - M^2(X) = \int_0^6 \frac{\pi^2\, 36^2}{4} \cdot \frac{1}{6} dx - 81\,\pi^2 = 0.$

Задача 63. Длительность времени безотказной работы элемента: $F(t)=1-e^{-0,01t}$.

Найти вероятность того, что за время длительностью t=50 ч.:

а) элемент откажет;

б) элемент не откажет.

Решение.

а) при t = 50 ч.:

$P = F(50) = 1-e^{-0,01\cdot 50} = 1-e^{-0,5} = 1-0,606 = 0,394;$

б) $P = R(50) = e^{-0,5} = 0,606.$

Задача 64. Испытывают два независимо работающих элемента, время безотказной работы которых распределено по показательному закону с параметрами 0,02 и 0,05.

Найти вероятность того, что за время t = 6ч.:

а) оба элемента откажут;

б) оба элемента не откажут;

в) только один элемент откажет;

г) хотя бы один элемент откажет.

Решение.

Здесь: $F_1 = 1 - e^{-0,02t}$, $F_2 = 1 - e^{-0,05t}$.

а) $P = P_1 \cdot P_2$,

$P_1 = F_1(6) = 1 - e^{-0,02\cdot 6} = 1 - 0,887 = 0,113;$

$P_2 = F_2(6) = 1 - e^{-0,05\cdot 6} = 1 - 0,741 = 0,259;$

Тогда $P = 0,113 \cdot 0,259 = 0,03.$

б) $P = R_1(t) \cdot R_2(t)$,

$R_1(t) = R_1(6) = e^{-0,02\cdot 6} = 0,887;$

$R_2(t) = R_2(6) = e^{-0,05\cdot 6} = 0,741;$

$P = 0,877 \cdot 0,741 = 0,66.$

в) $P = F_1 \cdot R_2 + F_2 \cdot R_1 = 0,113 \cdot 0,741 + 0,259 \cdot 0,887 = 0,31.$

г) Обозначим событие А – «хотя бы один элемент откажет», тогда $\bar{A}$ – «ни один не откажет».

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1-0,66 = 0,34.$

Задача 65. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки X

подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 10 мм.

Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение.

Здесь M(X) = a = 0, т.к. знак отклонений не учитывается и поэтому применима формула (52):

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Имеем: $P(|X| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$

6.7 Вопросы для самоконтроля по разделу «Непрерывные случайные величины»

1.Какие случайные величины являются непрерывными?

2.Какая функция распределения используется для характеристики непрерывных случайных величин?

3.Дайте определение дифференциальной функции распределения вероятностей.

4.Каким условиям должна удовлетворять дифференциальная функция распределения вероятностей?

5.Сформулируйте и объясните свойства функции распределения.

6.Сформулируйте и объясните свойства дифференциальной функции распределения.

7.По какой формуле определяется вероятность попадания случайной величины X в интервал от α до β?

8.Как графически изображается функция y=f(x)?

9.Перечислите числовые характеристики непрерывных случайных величин. По каким формулам они определяются?

10.В чем смысловое значение числовых характеристик непрерывных случайных величин?

11.Дайте характеристику равномерного распределения.

12.Какая случайная величина называется величиной, распределенной по нормальному закону?

13.Какая формула используется для расчета вероятности попадания нормально распределенной величины в заданный интервал?

14.Дайте характеристику показательного распределения.

15.Что называется модой непрерывной случайной величины?

16.Запишите формулу для вычисления моды непрерывной случайной величины.

17.Что называется медианой непрерывной случайной величины?

18.Запишите формулу для вычисления медианы непрерывной случайной величины.

6.8 Задачи для самостоятельного решения к главе 6

Задача 66. Вероятность того, что компьютер прослужит без ремонта 18 месяцев, равна 0,86.

Какова вероятность, что из партии 1000 компьютеров не более 15% попадут на гарантийный ремонт в течение этого срока?

Ответ: 0,82.

Задача 67. Пусть прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением $a = 8\%$ и стандартным отклонением $\sigma = 2{,}1\%$. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек.

Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки:

а) превысит 12%;

б) окажется менее 11%;

в) будет в пределах от 12 до 15 %.

Ответ: а)0,03; б) 0,92; в) 0,03.

РАЗДЕЛ 7 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

7.1 Основные понятия и определения

Приведем только самые основные понятия и определения. Более подробно материал изучите по учебникам, ориентируясь на вопросы для самоконтроля к этому разделу.

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей.

Целью статистического исследования является обнаружение и исследование соотношений между статистическими (экономическими) данными и их использование для прогнозирования и принятия лучших решений. Под термином статистические данные будем подразумевать набор наблюдаемых значений одной или нескольких переменных, характеризующих изучаемое явление или рассматриваемый экономический объект.

Генеральной совокупностью называются все возможные наблюдения интересующего нас объекта (показателя), все исходы случайного испытания или всю совокупность реализации случайной величины X в пределах всего объекта наблюдения.

Пример генеральной совокупности – данные о доходах всех жителей какой–либо страны, антропометрические данные групп людей, совокупность чисел, соответствующих срокам службы некоторых изделий и др.

Выборка, или выборочная совокупность, - это множество статистических наблюдений, составляющих часть генеральной совокупности, отобранную случайным образом.

Число единиц (элементов) статистической совокупности называется ее объемом и обозначается n.

Значения изучаемого признака или показателя, характеризующего некоторое явление, называется вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется выборочным или вариационным рядом.

Пусть из генеральной совокупности отобрана выборка, в которой значение x_1 признака X наблюдалось n_1 раз, значение x_2 – n_2 раз, …, значение x_k – n_k раз. Если объем выборки равен n , то:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Числа n_1, n_2, n_3, …, n_k называются частотами, а их отношения к объему выборки, т.е. $w_i = \frac{n_i}{n}$ – относительными частотами соответствующих вариант.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

7.2 Геометрическая интерпретация статистических распределений выборки

Если на оси абсцисс прямоугольной системы координат расположить варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты, то в плоскости получим точки (x_i; n_i). Соединим точки отрезками прямых.

Определение 38. Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_i;n_i), называется полигоном частот.

Аналогично можно сформулировать определение полигона относительных частот.

Если статистическое распределение выборки задается в виде последовательности интервалов значений вариант и их частот, то геометрическое изображение дается при помощи гистограммы частот.

Рисунок 22 – Полигон частот

Определение 39. Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной h и высотой, равной отношению n_i/h (плотность частоты на интервале).

Гистограммы относительных частот строятся аналогичным образом.

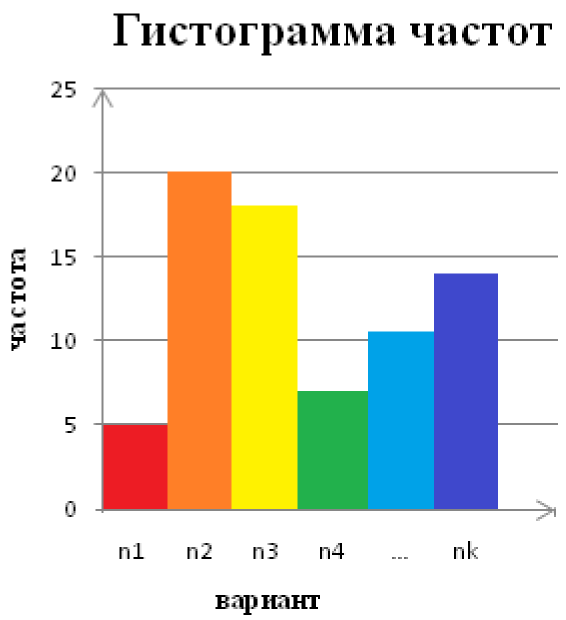


Рисунок 23 – Гистограмма частот

7.3 Числовые характеристики (точечные оценки) выборки (вариационного ряда)

К числовым характеристикам вариационного ряда относятся средняя арифметическая (простая и взвешенная), выборочна и генеральная средние, выборочная и генеральная дисперсии, выборочное среднее квадратическое отклонение. Рассмотрим основные из них.

7.3.1 Выборочная средняя

Определение 40. Выборочной средней $\overline{x}_в$ выборки объема со статистическим распределением.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

называется среднее арифметическое значений признака выборки, т.е.

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i \qquad (61)$$

7.3.2 Выборочная дисперсия

Определение 41. Выборочной дисперсией $D_в$ некоторой выборки называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака от выборочной средней $\overline{x}_в$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2.$$

Более удобна формула:

$$D_в = \overline{x}^2 - \left(\overline{x}_в\right)^2 \tag{62}$$

В практических исследованиях используется часто величина, которая называется исправленной выборочной дисперсией:

$$S_в^2 = \frac{D_в}{n-1} n \tag{63}$$

7.3.3 Выборочное среднее квадратическое отклонение

Выборочное среднее квадратическое отклонение определяется также как у случайных величин – корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \tag{64}$$

Отметим, что выборочная средняя по сути то же самое, что и математическое ожидание, дисперсия показывает рассеяние значений признака вокруг своего среднего значения.

Наиболее точно оценивается колеблемость с помощью коэффициента вариации. Этот показатель измеряется в процентах и позволяет оценить, на сколько процентов колеблется изучаемый признак около среднего значения.

Коэффициент вариации рассчитывается по формуле:

$$V(x) = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} \cdot 100\% \tag{65}$$

Принято считать, что если коэффициент вариации больше 35%, то изучаемая статистическая совокупность является неоднородной и колеблемость признака высока. Следовательно, использование средней арифметической для ее характеристики неверно. В таком случае необходимо использовать моду или медиану для характеристики наиболее типичного значения варианты признака рассматриваемой совокупности.

Определение 42. Модой M_0 вариационного ряда называется то из значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, которому соответствует наибольшая частота.

Определение 43. Медиана M_e – это значение варианты, которое является серединой вариационного ряда.

Если вариант четное количество, то медиана вычисляется как среднее двух вариант, находящихся в середине вариационного ряда.

7.4 Примерное содержание типовой задачи по первичной обработке статистических данных

Задача 68. В учебном заведении исследовали возраст студентов. Для этого использовали случайную выборку из 30 студентов. В результате были получены следующие данные: 18, 17, 23, 18, 17, 16, 14, 18, 20, 17, 22, 17, 19, 21, 18, 18, 15, 20, 22, 15, 14, 17, 21, 18, 18, 19, 17, 23, 17, 21.

Постройте вариационный ряд, полигон и гистограмму частот; рассчитайте числовые характеристики выборки, коэффициент вариации, моду и медиану.

Решение.

1.Составим интервальный ряд, разбив исходные данные на 5 частичных интервалов длиной h=2, и подсчитаем частоты. Границы интервалов включаются только в один интервал (или в левый, или в правый), например, 16 – в первый, 18 – во второй, 20 – в третий, 22 – в четвертый, 24 – в пятый (таблица 5).

Таблица 5 – Интервальный ряд.

14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22	22 - 24
5	14	4	5	2

Чтобы составить вариационный ряд примем в качестве вариант середины частичных интервалов:

$$x_1 = \frac{14+16}{2} = 15;$$

$$x_2 = \frac{16+18}{2} = 17;$$

$$x_3 = \frac{18+20}{2} = 19;$$

$$x_4 = \frac{20+22}{2} = 21;$$

$$x_5 = \frac{22+24}{2} = 23.$$

Получаем таблицу 6.

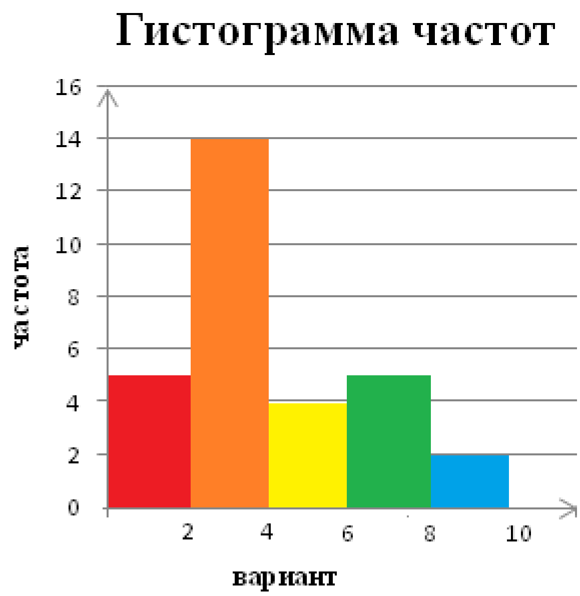
Таблица 6 – Вариационный ряд.

x_i	15	17	19	21	23
n_i	5	14	4	5	2

2. Построим полигон частот:

Обратите внимание: если через концы ломаной провести кривую, то она будет иметь форму кривой Гаусса. Это позволяет сделать вывод, что данная выборка подчиняется нормальному распределению.

Построим гистограмму частот:



Если Вам необходимо построить полигон и гистограмму относительных частот, то в таблицу добавьте строку w_i и подсчитайте относительные частоты.

3. Считаем выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x}_в = \frac{15\cdot 5 + 17\cdot 14 + 19\cdot 4 + 21\cdot 5 + 23\cdot 2}{30} \approx 18.$$

$$D_в = \frac{(15)^2\cdot 5 + (17)^2\cdot 14 + (19)^2\cdot 4 + (21)^2\cdot 5 + (23)^2\cdot 2}{30} - (18)^2 = 5{,}27.$$

$$\sigma_в = \sqrt{5{,}27} = 2{,}3$$

4. Вычисляем коэффициент вариации:

$$V(x) = \frac{2{,}3}{18}\cdot 100\ \% = 12{,}8\% < 35\ \%,$$

что позволяет сделать вывод: изучаемая статистическая совокупность является однородной.

5. Вычисляем значение моды:

$M_0 = 17$

6. Вычисляем значение медианы:

$M_e = 19$

7.5 Интервальные оценки

Определение 44. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами - концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Определение 45. Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает оцениваемый параметр.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}_в$ при известном среднем квадратическом отклонении $\sigma_в$ генеральной совокупности служит доверительный интервал:

$$\overline{x}_в - t\cdot\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\cdot\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}, \quad (66)$$

где $t\cdot\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} = \delta$ - точность оценки,

n - объем выборки,

$\Phi(t)$ - значение функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении $\sigma_в$ и объеме выборки n<30 генеральной совокупности служит доверительный интервал:

$$\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (67)$$

где s - исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ находят по таблице по заданным n и γ.

Для оценки среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X с надежностью γ по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s служат доверительные интервалы:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \text{ (при } q < 1) \qquad (68)$$

$$0 < \sigma < (1+q), \text{ (при } q > 1) \qquad (69)$$

где q находят по таблице по заданным n и γ.

Задача 69. Найти интервальные оценки параметров распределения с надежностью γ=0,75 по результатам задачи 68.

Решение:

1.Имеем $\bar{x}_в = 18$; $\sigma_в = 2{,}3$; n = 30.

2.Найдем значение функции Лапласа: Ф(t)=0,95/2 = 0,475, следовательно, t=1,96.

3.Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении имеет вид:

$$18 - 1{,}96 \cdot 2{,}3/\sqrt{30} < a < 18 + 1{,}96 \cdot 2{,}3/\sqrt{30}$$

Получаем 17,2 < a < 18,2 – искомый интервал для оценки математического ожидания.

4.Найдем доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ. Для этого вычислим исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s:

$S_в^2 = \frac{30}{30-1} \cdot 5{,}27 = 5{,}45;$ s=2,335; q=0,28<1, поэтому:

2,335(1-0,28) < σ < 2,335(1+0,28) и,

1,68 < σ <2,99 - искомый интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ.

Аналогичным образом находят доверительные интервалы при других условиях.

7.6 Вопросы для самоконтроля по разделу 7 «Элементы математической статистики»

1.Поясните сущность выборочного метода.

2.Какие теоремы теории вероятностей служат обоснованием выборочного метода?

3.Перечислите виды выборки.

4.Какая выборка называется репрезентативной?

5.Какая выборка называется повторной? Бесповторной?

6.Какая выборка называется репрезентативной?

7.Дайте определение вариационного ряда.

8.Дайте определение варианты.

9.Что такое частота варианты?

10.С какой целью используются выборочные данные?

11.Какой ряд называется дискретным?

12.Какой ряд называется интервальным?

13.Дайте определение полигона частот, относительных частот.

14.Дайте определение гистограммы частот, относительных частот.

15.От чего зависит качество точечных оценок параметров генеральной совокупности?

16.Какие величины являются точечными оценками выборки?

17.Поясните смысл выборочной средней.

18.Что показывает выборочная дисперсия?

19.Дайте определение коэффициента вариации.

20.Когда выборочная средняя не является характеристикой выборки?

21.Что такое мода вариационного ряда?

22.Что называется медианой выборочного метода?

23.Запишите формулы для интервального оценивания математического ожидания и поясните смысл входящих параметров.

24.Запишите формулы для интервального оценивания среднего квадратического отклонения и поясните смысл входящих параметров.

РАЗДЕЛ 8 МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Современная наука об обществе объясняет суть явлений через изучение взаимосвязей явлений, что стало возможным благодаря разработке и использованию методов моделирования в экономических, социальных и политических управляемых системах. В общем случае, модель – это материально или мысленно представляемый объект, который в процессе познания или изучения замещает объект оригинала, сохраняя некоторые важные для исследования, типичные черты реального объекта.

Виды моделирования: математическое, имитационное, моделирование методом Монте–Карло и другие. Подробно о методах моделирования случайных величин можно узнать из источников:

Рассмотрим моделирование случайных величин методом Монте–Карло.

8.1 Разыгрывание дискретной случайной величины

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение, а некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a:

$$M(X) = a.$$

Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений x_i случайной величины X, находят их среднее арифметическое

$$\bar{x} = \left(\sum x_i \right) / n \qquad (70)$$

и принимают $\bar{x}_в$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \approx a^* = \bar{x} \qquad (71)$$

Таким образом, для применения метода Монте-Карло необходимо уметь разыгрывать случайную величину.

Требуется разыграть дискретную случайную величину X, т.е. вычислить последовательность ее возможных значений x_i (i = 1,2 , 3 …), зная закон распределения X.

Введем обозначения: R- непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0;1); r_j (j = 1, 2, …) - случайные числа (возможные значения R).

Правило. Для того, чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную законом распределения

X	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n

P(X)	p_1	p_2	p_3		p_{n-1}	p_n

надо:

1. Разбить интервал (0;1) оси Or на *n* частичных интервалов:

$\Delta_1 - (0; p_1), \Delta_2 - (p_1; p_1 + p_2), \ldots, \Delta_n - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}; 1).$

2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j. Если r_j попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Пример 29. Разыграть шесть возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
P	0,22	0,17	0,61

Решение:

Разобьем интервал (0;1) оси Or точками с координатами 0,22; 0,22+0,17=0,39 на три частичных интервала:

Δ_i - (0; 0,22); Δ_2 - (0,22; 0,39); Δ_3 -(0,39; 1).

Выпишем из таблицы приложения к практической работе шесть случайных чисел, например 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87.

Случайное число r_1 = 0,32 принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение X_2=10; случайное число r_2 = 0,17 принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение x_1=2.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10, 2, 18, 2, 18, 18.

8.2 Разыгрывание полной группы событий

Требуется разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы, вероятности которых известны. Разыгрывание полной группы событий сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины.

Правило. Для того, чтобы разыгрывать испытания, в каждом из которых наступает одно из событий A_1, A_2, …, A_n полной группы, вероятности которых p_1, p_2, …, p_n известны, достаточно разыграть (по правилу п. 8.1) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения:

X	1	2	3	…	n
P(X)	p_1	p_2	p_3		P_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение x_i=1, то наступило событие A.

Пример 30. Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: $P(A_1\ ) = 0{,}22$; $P(A_2) = 0{,}31$; $P(A_3) = 0{,}47$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Решение:

В соответствии с правилом настоящего пункта надо разыграть дискретную случайную величину X с законом распределения:

X	1	2	3
P(X)	0,22	0,31	0,47

По правилу п. 8.1 разобьем интервал (0; 1) на три частичных интервала: A_1 - (0; 0,22), A_2 - (0,22; 0,43), A_3 - (0,43; 1).

Выберем из таблицы приложения к практической работе пять случайных чисел, например 0,61; 0,19; 0,69; 0,04; 0,46.

Случайное число $r_i = 0{,}61$ принадлежит интервалу Δ_3, поэтому X=3 и, следовательно, наступило событие A_3. Аналогично найдем остальные события. В итоге получим искомую последовательность событий: A_3, A_1, A_3, A_1, A_3.

8.3 Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло

Применение метода Монте–Карло рассмотрим на конкретной задаче.

Задача 70. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система отказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента: А, В (они соединены параллельно) и отказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй блок содержит один элемент С и отказывает при отказе этого элемента.

а) найти методом Монте-Карло оценку Р* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: Р(А) = 0,8; Р(В) = 0,85; Р(С) = 0,6.

б) найти абсолютную погрешность |Р – Р*|, где Р - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

Решение.

а) Выберем из таблицы приложения к практической работе три случайных числа: 0,10; 0,09; 0,73 (если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило) разыграем события А, В, С. Результаты испытания будем записывать в расчетную табл.1.

Поскольку Р(А) = 0,8 и $0{,}10<0{,}8$, то событие А наступило, т.е. элемент А в этом испытании работает безотказно. Так как Р(В) = 0,85 и $0{,}09<0{,}85$, то событие В наступило, т.е. элемент В работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках таблицы 7 ставим знак плюс.

Таблица 7 – Расчет работы системы

<table>
<tr><th rowspan="3">№ испытания</th><th rowspan="3">Блок</th><th colspan="3">Случайные числа, моделирующие элементы</th><th colspan="5">Заключение о работе</th></tr>
<tr><th rowspan="2">A</th><th rowspan="2">B</th><th rowspan="2">C</th><th colspan="3">элементов</th><th rowspan="2">блоков</th><th rowspan="2">системы</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Первый</td><td>0,10</td><td>0,09</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Второй</td><td></td><td></td><td>0,73</td><td></td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Первый</td><td>0,25</td><td>0,33</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Второй</td><td></td><td></td><td>0,76</td><td></td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Первый</td><td>0,52</td><td>0,01</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td>Второй</td><td></td><td></td><td>0,35</td><td></td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Первый</td><td>0,86</td><td>0,34</td><td></td><td>-</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Второй</td><td></td><td></td><td>0,67</td><td></td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Так как $P(C) = 0,6$ и $0,73>0,6$ то событие C не наступило, т.е. элемент C получает отказ; другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках таблицы ставим знак минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В таблице приведены результаты четырех испытаний.

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности P примем относительную частоту $P^* = 28/50 = 0,56$.

б) Найдем надежность системы P аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

$P_1 = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = = 1 - 0,2 \cdot 0,15 = 0,97.$

$P_2 = P\ (C) = 0,6.$

Вероятность безотказной работы системы

$P = P_1 \cdot P_2 = 0,97 \bullet 0,6 = 0,582$

Искомая абсолютная погрешность $|P - P^*| = 0,582 – 0,56 = 0,022.$

8.4 Вопросы для самоконтроля по разделу 8 «Моделирование случайных величин»

1.Что представляет собой модель в общем смысле?

2.Для чего используются модели? Приведите примеры.

3.Укажите преимущества моделей в процессе исследования.

4.Какие цели преследует исследователь, используя модели?

5.Из каких этапов состоит создание математической модели?

6.В каких целях обычно используют метод Монте – Карло?

7.Как можно моделировать любой процесс, на который влияют случайные факторы?

8. Какое число называют случайным числом?

9. Какими способами можно получить случайные величины?

10.Когда можно использовать метод Монте – Карло для определения надежности системы?

Раздел 9. Ответы к контрольным тестам и задачам

Ответы к тесту № 1.
1-c, 2- d, 3- a, 4- a ,5-b, 6- a, 7- b, 8- b.

Ответы к задачам пункта 2.7
№ 11:
1)A+B – «попадание хотя бы при одном выстреле»;
2)A+B+C – «появление не более трех очков»:
3)A+B+C – « по лотерее выиграно либо 10, либо 20, либо 25 руб.».
№ 12:
1)AB – «попадание при каждом из двух выстрелов»;
2)ABC – « появление четного числа очков».
№ 13:
1) $\overline{A}$ - «выпадение хотя бы одной цифры»;
2) $\overline{B}$ - «появление черного или красного шара»;
3) $\overline{C}$ - «хотя бы один промах»;
4) $\overline{D}$ - «не менее четырех попаданий при пяти выстрелах»;
5) $\overline{E}$ - «пять промахов при пяти выстрелах».

Ответы к тесту №2.
1-b, 2-b, 3-c, 4-b, 5-a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Со случайными событиями разного рода мы встречаемся чаще, чем это принято считать. Все явления, которые окружают нас, происходят и изменяются с какой – то долей случайности, неопределенности. Случайные факторы лежат в основе окружающей среды, экономики, политики, социальной и общественной жизни; они определяют течение любого процесса массового обслуживания – торговли, телефонной связи, транспортных услуг и медицинской помощи. Задача управления различного рода процессами, которая наиболее остро стоит перед современным обществом, состоит в том, чтобы научиться хорошо ориентироваться в мире случайностей и активно действовать, опираясь на скрытые специфические закономерности.

Огромные объемы информации, которые являются отличительной чертой современного общества, требуют их научного анализа и использования научно обоснованных выводов, прогнозов и методик планирования хозяйственной деятельности, основанных на статистической обработке информации. Этот факт предопределяет неразрывную связь фундаментальной теории и практики. Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» приобрела в настоящее время практический характер. Автор пособия надеется на то, что предложенное методическое пособие окажет студентам реальную помощь в овладении ими основ теории вероятностей и математической статистики, в выполнении практических и контрольных работ.

Список использованных источников

Основные источники:

1 Балдин, К.В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – 3-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 472 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573173 . – Библиогр.: с. 433-434. – ISBN 978-5-394-03595-1. – Текст : электронный.

Дополнительные источники:

2 Шапкин, А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию : учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 9-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 432 с. : ил. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573151 – Библиогр.: с. 428. – ISBN 978-5-394-03710-8. – Текст : электронный.

Интернет-ресурсы:

3 http: // e - scince.ru.

4 http: // mathem lib.ru.

Приложение А

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	39730
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3984	3885	3876	3967	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1738	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение Б

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)
0,00	0,0000	0,47	0,1808	0,94	0,3264	1,41	0,4207	1,88	0,4699	2,7	0,4965
0,01	0,0040	0,48	0,1844	0,95	0,3289	1,42	0,4222	1,89	0,4706	2,72	0,4967
0,02	0,0080	0,49	0,1879	0,96	0,3315	1,43	0,4236	1,9	0,4713	2,74	0,4969
0,03	0,0120	0,5	0,1915	0,97	0,3340	1,44	0,4251	1,91	0,4719	2,76	0,4971
0,04	0,0160	0,51	0,1950	0,98	0,3365	1,45	0,4265	1,92	0,4726	2,78	0,4973
0,05	0,0199	0,52	0,1985	0,99	0,3389	1,46	0,4279	1,93	0,4732	2,8	0,4974
0,06	0,0239	0,53	0,2019	1	0,3413	1,47	0,4292	1,94	0,4738	2,82	0,4976
0,07	0,0279	0,54	0,2054	1,01	0,3438	1,48	0,4306	1,95	0,4744	2,84	0,4977
0,08	0,0319	0,55	0,2088	1,02	0,3461	1,49	0,4319	1,96	0,4750	2,86	0,4979
0,09	0,0358	0,56	0,2123	1,03	0,3485	1,5	0,4332	1,97	0,4756	2,88	0,4980
0,1	0,0398	0,57	0,2157	1,04	0,3508	1,51	0,4345	1,98	0,4761	2,9	0,4981
0,11	0,0438	0,58	0,2190	1,05	0,3531	1,52	0,4357	1,99	0,4767	2,92	0,4982
0,12	0,0478	0,59	0,2224	1,06	0,3554	1,53	0,4370	2	0,4772	2,94	0,4984
0,13	0,0517	0,6	0,2257	1,07	0,3577	1,54	0,4382	2,02	0,4783	2,96	0,4985
0,14	0,0557	0,61	0,2291	1,08	0,3599	1,55	0,4394	2,04	0,4793	2,98	0,4986
0,15	0,0596	0,62	0,2324	1,09	0,3621	1,56	0,4406	2,06	0,4803	3	0,49865
0,16	0,0636	0,63	0,2357	1,1	0,3643	1,57	0,4418	2,08	0,4812	3,20	0,49931
0,17	0,0675	0,64	0,2389	1,11	0,3665	1,58	0,4429	2,1	0,4821	3,40	0,49966
0,18	0,0714	0,65	0,2422	1,12	0,3686	1,59	0,4441	2,12	0,4830	3,60	0,499841
0,19	0,0753	0,66	0,2445	1,13	0,3708	1,6	0,4452	2,14	0,4838	3,80	0,499928
0,2	0,0793	0,67	0,2486	1,14	0,3729	1,61	0,4463	2,16	0,4846	4	0,499968
0,21	0,0832	0,68	0,2517	1,15	0,3749	1,62	0,4474	2,18	0,4854	4,50	0,499997
0,22	0,0871	0,69	0,2549	1,16	0,3770	1,63	0,4484	2,2	0,4861	5	0,499997
0,23	0,0910	0,7	0,2580	1,17	0,3790	1,64	0,4495	2,22	0,4868		
0,24	0,0948	0,71	0,2611	1,18	0,3810	1,65	0,4505	2,24	0,4875		
0,25	0,0987	0,72	0,2642	1,19	0,3830	1,66	0,4515	2,26	0,4881		
0,26	0,1026	0,73	0,2673	1,2	0,3849	1,67	0,4525	2,28	0,4887		
0,27	0,1064	0,74	0,2703	1,21	0,3869	1,68	0,4535	2,3	0,4893		
0,28	0,1103	0,75	0,2734	1,22	0,3883	1,69	0,4545	2,32	0,4898		
0,29	0,1141	0,76	0,2764	1,23	0,3907	1,7	0,5454	2,34	0,4904		
0,3	0,1179	0,77	0,2794	1,24	0,3925	1,71	0,5464	2,36	0,4909		
0,31	0,1217	0,78	0,2823	1,25	0,3944	1,72	0,4573	2,38	0,4913		
0,32	0,1255	0,79	0,2852	1,26	0,3962	1,73	0,4582	2,4	0,4918		
0,33	0,1293	0,8	0,2881	1,27	0,3980	1,74	0,4591	2,42	0,4922		
0,34	0,1331	0,81	0,2910	1,28	0,3997	1,75	0,4599	2,44	0,4927		
0,35	0,1368	0,82	0,2939	1,29	0,4015	1,76	0,4608	2,46	0,4931		
0,36	0,1406	0,83	0,2967	1,3	0,4032	1,77	0,4616	2,48	0,4934		
0,37	0,1443	0,84	0,2995	1,31	0,4049	1,78	0,4625	2,5	0,4938		
0,38	0,1480	0,85	0,3023	1,32	0,4066	1,79	0,4633	2,52	0,4951		
0,39	0,1517	0,86	0,3051	1,33	0,4082	1,8	0,4641	2,54	0,4945		
0,4	0,1554	0,87	0,3078	1,34	0,4099	1,81	0,4649	2,56	0,4948		
0,41	0,1591	0,88	0,3106	1,35	0,4115	1,82	0,4656	2,58	0,4951		
0,42	0,1628	0,89	0,3133	1,36	0,4131	1,83	0,4664	2,6	0,4953		
0,43	0,1664	0,9	0,3159	1,37	0,4147	1,84	0,4671	2,62	0,4956		
0,44	0,1700	0,91	0,3186	1,38	0,4162	1,85	0,4678	2,64	0,4959		
0,45	0,1736	0,92	0,3212	1,39	0,4177	1,86	0,4686	2,66	0,4961		

0,46	0,1772	0,93	0,3238	1,4	0,4192	1,87	0,4693	2,68	0,4963

Приложение В

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,6	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,5	5,41	35	2,032	2,72	3,6
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,2	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	432	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,64	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,617	3,374
18	2,11	2,9	3,97		1,96	2,576	3,291
19	2,1	2,88	3,92				

Приложение Г

Таблица значений функции $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,8	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,2	2,06	40	0,24	0,35	0,5
10	0,65	1,08	1,8	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,6	50	0,21	0,3	0,43
12	0,52	0,9	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,55	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,7	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,16	0,211
18	0,4	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,6	0,92	250	0,089	0,12	0,162

Приложение Д

Равномерно распределенные случайные числа

10	9	73	25	33
37	54	20	48	5
8	42	26	89	53
99	1	90	25	29
12	80	79	99	70
66	6	57	47	17
31	6	1	8	5
85	26	97	76	2
63	57	33	21	35
73	79	64	57	53
98	52	1	77	67
11	80	50	54	31
83	45	50	54	31
88	68	54	2	0
99	59	46	73	48
65	48	11	76	74
80	12	43	56	35
74	35	9	98	17
69	91	62	68	3
9	89	32	5	5
91	49	91	45	23
80	33	69	45	98
44	10	48	19	49
12	55	7	37	42
63	60	64	93	29
61	19	69	4	46
15	47	44	52	66
94	55	72	85	73
42	48	11	62	13
23	52	37	83	17
4	49	35	24	94
0	54	99	76	54
35	96	31	53	7
59	80	80	83	91
46	5	88	52	36
32	17	90	5	97
69	23	46	14	6
19	56	54	14	30
45	15	51	49	38
94	86	43	19	94
98	8	62	48	26
33	18	51	62	32
80	95	10	4	6
79	75	24	91	40
18	63	33	25	37
74	2	94	39	2
54	17	84	56	11
11	66	44	98	83
48	32	47	79	28
69	7	49	41	38

76	52	1	35	86
64	89	47	42	96
19	64	50	93	3
9	37	67	7	15
80	15	73	61	47
34	7	27	68	50
45	57	48	24	6
2	5	16	56	92
5	32	54	70	48
3	52	96	47	78
14	90	56	86	7
39	80	82	77	32
6	28	89	80	83
86	50	75	84	1
87	51	76	49	69
17	46	85	9	50
17	72	70	80	15
77	40	27	72	14
66	25	22	91	48
14	22	56	85	84
68	47	93	76	86
26	94	3	68	58
85	15	74	79	54
11	10	0	20	40
16	50	53	44	84
26	45	74	77	74
95	27	7	99	53
67	89	75	43	87
97	34	40	87	21
73	20	88	98	37
75	24	63	38	24
64	5	18	81	59
26	89	80	93	54
45	42	72	68	42
1	39	9	22	86
87	37	92	52	41
20	11	74	52	4
1	75	87	53	79
19	47	60	72	46
36	16	81	8	51
45	24	2	84	4
41	94	15	9	49
96	38	27	7	74
71	96	12	82	96
98	14	50	65	71
77	55	73	22	70
80	99	33	71	43
52	7	98	48	27
31	24	96	47	10
87	63	79	19	76

34	67	35	48	76
24	80	52	40	37
23	20	90	25	60
38	31	13	11	65
64	3	23	66	53
36	69	73	61	70
35	30	34	26	14
68	66	57	48	18
90	55	35	75	48
35	80	83	42	82
22	10	94	5	58
50	72	56	82	48
13	74	67	0	78
36	76	66	79	51
91	82	60	89	28
58	4	77	69	74
45	31	82	23	74
43	23	60	2	10
36	93	68	72	3
46	42	75	67	88
46	16	28	35	54
70	29	73	41	35
32	97	92	65	75
12	86	7	46	97
40	21	95	25	63
51	92	43	37	29
59	36	78	38	48
54	62	24	55	31
16	86	84	87	67
68	93	59	14	16
45	86	25	10	25
96	11	96	38	96
33	35	13	54	62
83	60	94	97	0
77	28	14	40	77
5	56	70	70	7
15	95	66	0	0
40	41	92	15	85
43	66	79	45	43
34	88	88	15	53
44	99	90	88	96
89	43	54	85	81
20	15	12	33	87
69	86	10	25	91
31	1	2	46	74
97	79	1	71	19
5	33	51	29	69
59	38	17	15	39
2	29	53	68	70
35	58	40	44	1

80	95	90	91	17
20	63	61	4	2
15	95	33	47	64
88	67	67	43	97
98	95	11	68	77
65	81	33	98	85
86	79	90	74	39
73	5	38	52	47
28	46	82	78	9
60	93	52	3	44
60	67	9	34	33
29	40	52	42	1
18	47	54	6	10
90	36	47	64	93
93	78	56	13	68
73	3	95	71	86
21	11	57	82	53
45	52	16	42	37
76	62	11	39	90
96	29	77	88	22
94	75	8	99	23
53	14	3	33	40
57	60	4	8	81
96	64	48	94	39
43	65	17	70	82
65	39	45	95	93
82	39	61	1	18
91	19	4	25	92
3	7	11	20	59
26	25	22	96	63
61	96	27	93	35
54	69	28	23	91
77	97	45	0	24
13	2	12	48	92
93	91	8	36	47
86	74	31	71	57
18	74	39	24	23
66	67	43	68	6
59	4	79	0	33
1	54	3	54	56
39	9	47	34	7
88	69	54	19	94
25	1	62	52	98
74	85	22	5	39
5	45	56	14	27
52	52	75	80	21
56	21	71	92	55
9	97	33	34	40
32	30	75	75	46
10	51	82	16	15