МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ»

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЛЮБЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

Братск, 2022

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Методическое пособие содержит теоретические сведения по теме «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии», а именно: определение и виды векторов, операции над векторами, координаты вектора, действия над векторами в координатах, уравнения прямой на плоскости, кривые второго порядка, решение задач , тестовые задания, вопросы для самоконтроля.

Теоретические сведения сопровождаются примерами с подробным решением.

Пособие может быть использовано преподавателями, ведущими дисциплину «Математика» или дисциплину «Элементы высшей математики» и преподавателями специальных дисциплин, в которых используются элементы векторной алгебры и аналитической геометрии, а также студентами, изучающими указанные темы при подготовке к аудиторным занятиям, при выполнении самостоятельных и практических работ.

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«_____»_____________20__г. _________________________

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

«_____»_____________20__г. №_____________________

Содержание

Введение

Величины, с которыми мы встречаемся в физике, механике, технике и т.д., можно разделить на два типа: скалярные, полностью определяемые своим числовым значением (объем, масса, температура, коэффициент трения и др.), и векторные, характеризуемые как числовым значением, так и направлением (сила, скорость, ускорение, перемещение и др.). Для описания векторных величин введено понятие вектора.

Вектор относительно новое математическое понятие. Сам термин «вектор» (от лат. Vector – «несущий») впервые появился в 1845 году у ирландского математика и астронома Уильяма Гамильтона (1805 – 1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа. Гамильтону принадлежат уже известные вам из курса элементарной математики термины «скаляр», «скалярное произведение». Именно Гамильтон ввел пока для вас неизвестный термин « векторное произведение». Почти одновременно с Гамильтоном в том же направлении, но с другой точки зрения вел исследования немецкий математик Герман Грассман (1809 - 1877). Англичанин Уильям Клиффорд (1845 – 1879) сумел объединить два подхода в рамках общей теории, включающей в себя и обычное векторное исчисление. А окончательный вид оно приняло в трудах американского физика и математика Джозайи Уилларда Гиббса (1839 – 1903), который в 1901 году опубликовал обширный учебник по векторному анализу.

Представление величин отрезками имело место уже в древнегреческой математике. В «Началах» изложены основы древнегреческого геометрического исчисления, сложение величин сводилось к сложению отрезков, умножение величин — построению прямоугольников на соответствующих отрезках. Также ненаправленными отрезками оперировал Декарт, но уже Лейбницем была выдвинута идея построения векторного исчисления, близкого к современному. Уже в XVI—XVII вв. Леонардо да Винчи, Галилей, Кеплер пользовались направленными отрезками для наглядного представления сил в физике и астрономии. Три направления развития векторного исчисления выделил Г. И. Глейзер: геометрическое (исчисление отрезков), физическое (исследование векторных величин, встречающихся в естествознании), алгебраическое (расширение понятия операции при создании современной алгебры). Развитие первого направления связано с именем К. Вессела. Векторная алгебра на плоскости (двумерное векторное пространство) построена им почти так же, как она излагается в современных учебниках. Отрезки, имеющие любое направление, были введены Л. Карно (1803), он же занимался и действиями с направленными отрезками, позже его идеи были систематизированы А. Мебиусом. Г. Грасман. В 1844 г. в работе «Учение о протяженности» впервые излагает учение о многомерном евклидовом пространстве. Вместо терминов «скалярное произведение», «векторное произведение» он использует соответственно «внутреннее» и «внешнее». Векторы Грасман обозначал жирными буквами латинского алфавита. Принятое нынче обозначение вектора ввел в 1853 г. О. Коши, а единичные векторы i, j и k в том же году Гамильтон. Применял векторное исчисление для потребностей естествознания Максвелл, а современный вид векторному исчислению придали в конце XIX в. Гиббс и Хевисайд.

Систематическое изучение векторов и координат в курсе геометрии началось в современной школе в последней трети XX в. в учебниках А. Н. Колмогорова. Изложение учебного материала осуществлялось на основе идеи геометрических преобразований, поэтому вектор вводился как параллельный перенос, координатный метод в основной школе не изучался (вводились только координаты вектора), этот вопрос подробно рассматривался в старшей школе (в учебниках автора 3. А. Скопца и др.).

Координаты и координатный метод также имеют свою богатую историю. Созданная на основе соединения алгебры и геометрии аналитическая геометрия заняла свое прочное место не только как научная дисциплина, но и как дисциплина учебная, входящая практически во все курсы высшей математики. Приоритет в ее создании принадлежит Ферма и Декарту. В основе аналитической геометрии лежат две идеи: идея координат, приведшая изначально к арифметизации плоскости, а в дальнейшем и n - мерного пространства; идея истолкования любого уравнения с двумя неизвестными как некоторой линии на плоскости. Это позволило изучать свойства геометрических фигур, решать геометрические задачи средствами алгебры, а в дальнейшем привело к созданию арифметической модели геометрии Евклида. Существенным толчком в создании координатной геометрии была работа И. Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка» (1706). Близкое к современному изложение материала плоской аналитической геометрии и соответствующие обозначения впервые представлены в конце XVIII в. у Лакруа в его книге «Элементарный курс прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии». Появление аналитической геометрии создало основу для развития дифференциального и интегрального исчислений.

Понятие вектора возникает там, где приходится иметь дело с объектами, которые характеризуются величиной и направлением. С подобными объектами можно встретиться в самых разных областях математики и физики. Вам предстоит столкнуться с объектами, представляющими собой определённые списки.

Числовые данные, используемые на практике или в науке, нередко представляют собой списки чисел, каждое из которых имеет определенный смысл. В экономике таковы, например, прейскуранты цен, т.е. списки цен различных товаров; объемы продукции различных видов, выпущенных предприятием за квартал и тому подобное. Математическим образом списка такого типа является вектор.

1 Векторы в пространстве

1.1 Основные понятия и определения

Вектор – направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какой из концов считается началом, а какой концом.

Нулевой вектор – вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор не имеет направления. Любая точка пространства может рассматриваться как нулевой вектор.

Длина вектора (модуль, абсолютная величина) – длина его направленного отрезка. Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Сонаправленные векторы – векторы, лежащие на сонаправленных лучах.

Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие на противоположно направленных лучах.

Противоположные векторы – векторы, имеющие равные длины и противоположные направления.

Равные векторы - сонаправленные векторы одинаковой длины.

Компланарные векторы – векторы, которые при откладывании от одной точки будут лежать в одной плоскости.

Разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - представить этот вектор в виде $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ (в плоскости), $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$ (в пространстве), где x и y – некоторые числа, которые называются коэффициентами разложения.

Координаты вектора - коэффициенты разложения вектора по координатным векторам.

Радиус – вектор точки – это вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с данной точкой.

Направляющий вектор прямой – вектор, лежащий на данной прямой или параллельно ей.

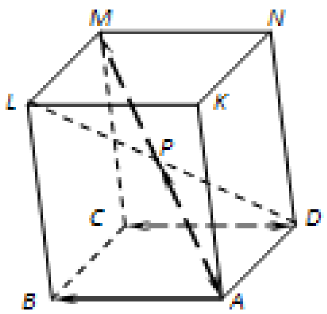


Рисунок 1 - Основные определения векторной теории

На рисунке 1 представлены:

а) $\overrightarrow{AB}$ - направленный отрезок, A – начало вектора, B – конец вектора;

б) $|\overrightarrow{AB}|$ = AB – длина вектора;

в) $\overrightarrow{AA}$ - нулевой вектор;

г) коллинеарные векторы:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (AB || DC);

2) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{PM}$ (AP || PM);

3) $\vec{0}$ и любой вектор;

д) сонаправленные векторы:

1) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PM}$;

е) $\vec{0}$ и любой вектор;

ж) противоположно направленные векторы ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AP} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MA}$);

з) противоположные векторы ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$);

и) равные векторы ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

1.2 Операции над векторами

Рассмотрим линейные операции над векторами.

1.2.1 Сложение

а) *правило многоугольника*: суммой векторов, отложенных последовательно, называется вектор, направленный из начала первого вектора к концу последнего;

б) *правило параллелограмма*: суммой двух неколлинеарных векторов, отложенных из одной точки, называется вектор с началом в этой точке и направленный по диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах;

в) *правило параллелепипеда*: суммой трех некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, называется вектор с началом в этой точке и направленный по диагонали параллелепипеда, построенного на этих векторах.

*Замечание 1***.** Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

а) правило треугольника: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

правило многоугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

б) правило параллелограмма: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

в) правило параллелепипеда: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM}$ (рисунок 2)

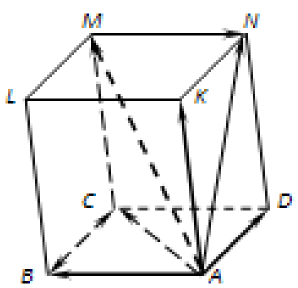


Рисунок 2 - Действия над векторами

1.2.2 Вычитание

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Замечание 2. Разность векторов удобно заменять суммой с противоположным вектором.

Замечание 3. Правило о направлении вектора разности: вектор разности направлен в сторону уменьшаемого вектора.

а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$;

б) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CM}$ (рисунок 2).

1.2.3 Умножение

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot \vec{a}$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$, и противоположно направлены при $k \leq 0$.

Замечание 4. При умножение вектора на число получается вектор, скалярное произведение векторов – число.

1.3 Система координат в пространстве

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки – начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус – вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты её радиусы – вектора.

Определение 1. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется *началом координат.* Прямые, проходящие через начало координат, называются *осями координат:* 1-я ось – ось *абсцисс*; 2-я ось – ось *ординат*; 3-я ось – ось *аппликат*.

Определение 2**.** Базис называется *ортонормированным,* если его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и равны единице.

Определение 3**.** Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат.*

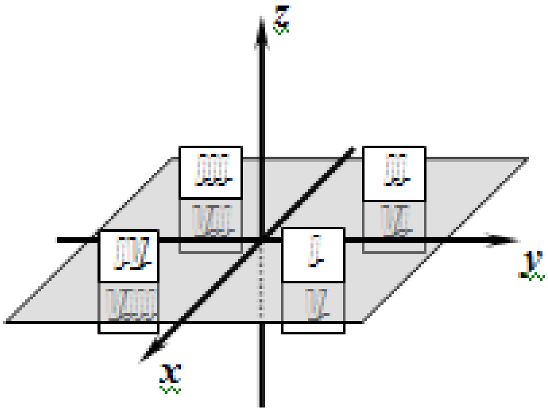


Рисунок 3 - Пространственная система координат

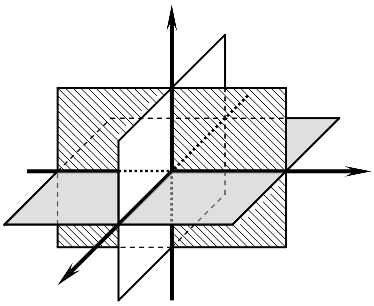


Рисунок 4 - Координатные плоскости

Таблица 1 - Особое расположение точки в пространстве

На оси			В плоскости		
Ox	Oy	Oz	xOy	xOz	yOz
(x; 0; 0)	(0; y; 0)	(0; 0; z)	(x; y; 0)	(x; 0; z)	(0; y; 0)

1.4 Основные формулы в координатах

1. Разложение вектора по координатным (по ортам) находится по формуле

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \qquad (1)$$

2. Координаты вектора, заданного точками A (x_1; y_1; z_1) и B (x_2; y_2; z_2) находятся по формуле

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \qquad (2)$$

3. Сумма векторов $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется формулой

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2) \qquad (3)$$

4. Разность векторов $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется формулой

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2). \qquad (4)$$

5. Произведение вектора на число определяется формулой

$$k\vec{a} = (kx_1;\ k y_1;\ kz_1). \qquad (5)$$

6. Противоположный вектор задается координатами

$$-\vec{a} = (-x_1;\ -y_1;\ -z_1). \qquad (6)$$

7. Скалярное произведение определяется формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad (7)$$

8. Скалярный квадрат вектора определяется формулой

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2. \qquad (8)$$

9. Длина вектора задается формулой

$$|\vec{a}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}. \qquad (9)$$

10. Угол между векторами находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}. \qquad (10)$$

11. Условие равенства векторов определяется формулой

$$x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2. \qquad (11)$$

12. Условие коллинеарности векторов определяется формулой

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (12)$$

13. Условие перпендикулярности векторов определяется формулой

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0. \qquad (13)$$

1.5 Простейшие задачи в координатах

1. Длина отрезка АВ (рисунок 5), где точки А и В заданы коодинатами А (x_1; y_1; z_1) и В (x_2; y_2; z_2), определяется формулой

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (14)$$

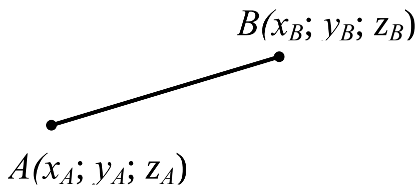


Рисунок 5 - Длина отрезка

2. Середина отрезка (рисунок 6) определяется формулой

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right),$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}. \qquad (15)$$

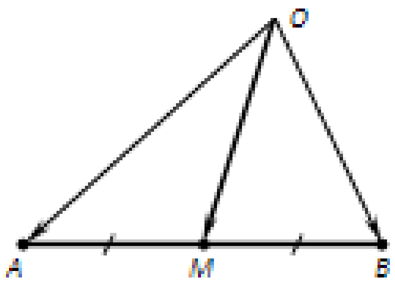


Рисунок 6 - Середина отрезка

3. Деление отрезка в данном отношении (рисунок 7) при $\lambda = \frac{a}{b}$ определяется формулой

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{OM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OB},$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda},\ z_M = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}. \qquad (16)$$

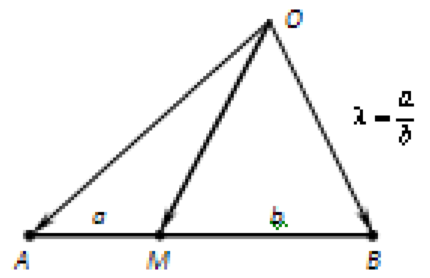


Рисунок 7 - Деление отрезка в данном отношении

4. Точка пересечения медиан треугольника (рисунок 8) определяется формулой

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ \ y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},\ z_M = \frac{z_A + z_B + z_c}{3}. \qquad (17)$$

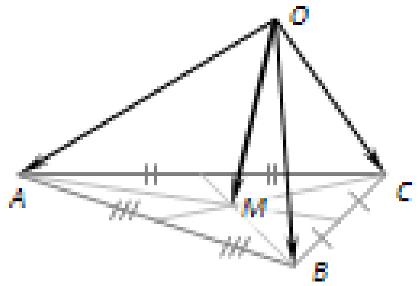
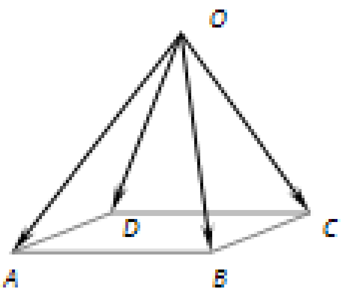
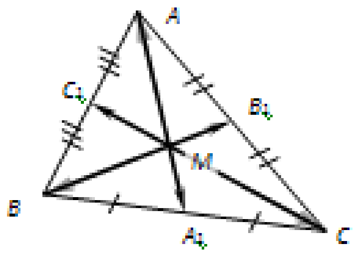


Рисунок 8 - Точка пересечения медиан основания треугольной пирамиды (тетраэдра)



$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

Рисунок 9 - Вычитание векторов в пирамиде



$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$$

Рисунок 10 - Сложение векторов в треугольнике

1.6 Нелинейные операции над векторами

1.6.1 Скалярное произведение векторов

*Определение 4***.** Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат векторов.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \cdots + a_n\cdot b_n$$

*Теорема 1***.** Скалярное произведение векторов равно произведению длин этих сторон на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi. \tag{18}$$

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$);
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{\mathrm{b}}$ или $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$;
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\cdot\vec{b}) = m\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Если рассматривать векторы в декартовой прямоугольной системе координат, то при $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ имеет место формула:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2\ . \tag{19}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$cos\varphi = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{20}$$

Физический смысл скалярного произведения

Работа A силы $\vec{F}$ при перемещении на вектор $\vec{a}$ (рисунок 11) равна скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{a}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{21}$$

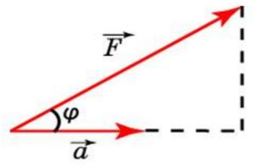


Рисунок 11 - Физический смысл скалярного произведения векторов

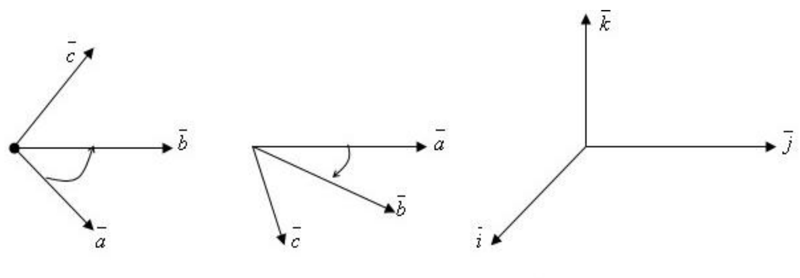
Экономический смысл скалярного произведения

Пусть имеется n различных товаров. Количество i – го товара обозначим x_i, тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. является n –мерным вектором.

Тогда множество всех товаров назовем *пространством товаров C*. Это множество является пространством потому что в нем можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число. Предполагая, что каждый товар имеет цену и они строго положительны, обозначив за p_i – цену i-го товара, можно составить вектор цен $P = (p_1, p_2, \dots p_n)$. Тогда скалярное произведение векторов $P \cdot X == p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n$ будет числом, называемым ценой набора, или его стоимостью.

1.6.2 Векторное произведение векторов

Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку векторов*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рисунок 12).



а) б) в)

Рисунок 12 - Тройки векторов: а- правая тройка; б левая тройка; в) пространственная система координат

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$ (22), который

1)перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2)имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, то есть

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi; \tag{22}$$

3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$.

2. $\lambda\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$- сочетательное свойство относительно числового множества.

3. $\bar{a} + \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ – распределительное свойство.

4. Если ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные, $\bar{a} \times \bar{b}$=$\bar{0}$ (т. к $\sin\varphi = 0$).

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые и $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то векторы коллинеарные (т.к $\sin\varphi = 0$).

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *является равенство нулю их векторного произведения.*

Теорема 2 следует из свойств 4 и 5.

Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть заданы два вектора: $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + \bar{a}_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$.

Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Раскрывая этот определитель, получим координаты вектора векторного произведения.

Приложения векторного произведения

1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, равна модулю их векторного произведения, то есть
2.

$$S_{\text{парал.}} = |\bar{a} \times \bar{b}| . \tag{24}$$

3. Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, равна половине модуля их векторного произведения , то есть
4.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|. \tag{25}$$

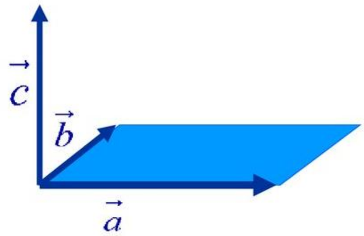


Рисунок 13 - Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3. Момент силы относительно точки. Пусть точка О абсолютного твёрдого тела неподвижно закреплена (рисунок 14) и в точке А приложена сила $\bar{F}$, создающая вращающий момент , численно равный $|\overline{OA}| \cdot |\bar{F}| \sin\alpha$ – площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\bar{F}$. В механике вращающий момент называется моментом силы $\bar{F}$ относительно точки О и обозначается $\overline{\mathrm{M}}(\overline{F})$. Таким образом,

$$\overline{\mathrm{M}}(\overline{F}) = \overline{OA} \times \bar{F}. \tag{26}$$

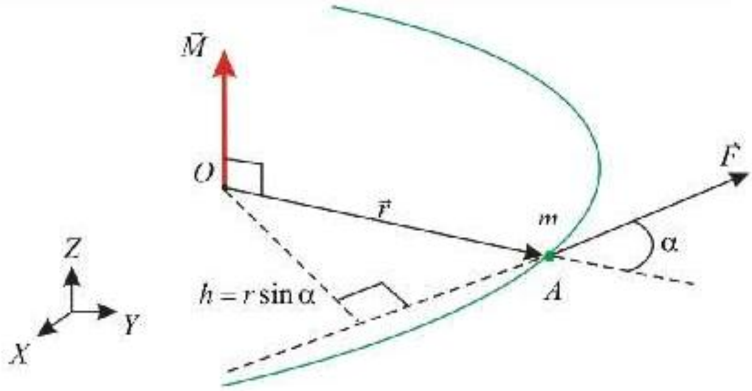


Рисунок 14 - Момент силы

1.6.3 Смешанное произведение векторов

Произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом $(\vec{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \vec{c}$, называется векторно - скалярным или смешанным произведением векторов. Смешанное произведение векторов есть некоторое число.

Смешанное произведение векторов , заданных координатами

$\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $\vec{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ находится по формуле:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Вывод формулы можете провести самостоятельно, ориентируясь на вывод формулы векторного произведения двух векторов, заданных своими координатами.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке его сомножителей, то есть

$$(\vec{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \overrightarrow{b}) \cdot a \, .$$

2. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки векторного и скалярного произведений, то есть

$$(\vec{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{(b} \times \vec{c}).$$

Поэтому смешенное произведение можно записывать так:

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, опуская знаки произведений.

3. Смешанное произведение меняет знак при перестановке местами любых двух векторов - сомножителей, то есть

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\,\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}, \;\; \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\,, \;\; \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\,\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Геометрический смысл смешанного произведения

Пусть векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{c}$ некомпланарны и составляют правую тройку векторов. Тогда вектор $\vec{a} \times \overrightarrow{b} = \vec{u}$ будет направлен в ту же сторону от плоскости OAEB, что и вектор $\vec{c}$. Построим параллелепипед на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ (рисунок ...). Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту h и равен абсолютной величине смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (28)$$

Следствие. Объем треугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на трех некомпланарных векторах, равен

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (29)$$

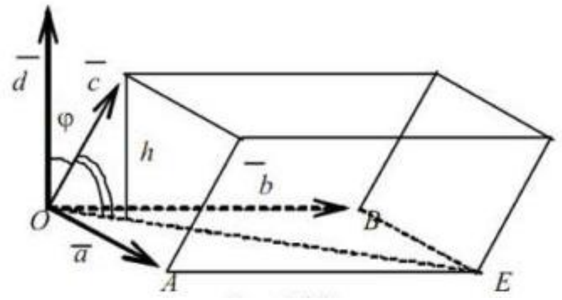


Рисунок 14 - Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

Задача 1. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (6, 4, -2)$.

Решение.

1) Найдем скалярное произведение данных векторов по формуле (7):

$\overline{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 6 + 8 - 6 = 8.$

2) Вычислим длины данных векторов, используя формулу (9):

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}.$

3) Значения скалярного произведения и длин векторов подставляем в формулу (20):

$$cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};$$

тогда $\varphi = arccos\frac{2}{7}$.

Ответ: $\varphi = arccos\frac{2}{7}$.

Задача 2. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ и $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

Решение.

Для решения задачи необходимо воспользоваться признаком перпендикулярности векторов, заданных своими координатами, - равенство нулю их скалярного произведения (формула 13). Здесь $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ - единичные векторы (орты).

$\vec{a} = (m, 1, 0), \vec{b} = (3, -3, -4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \; => m = 1.$

Ответ: $m = 1$.

Задача 3. Даны четыре точки: A(4; -3; 5), B(6; -2; 3), C(1; 2; 8), D(4; -2; 1).

Найти: а) координаты вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$, его длину и направляющие косинусы;

б) угол между векторами $\overline{\boldsymbol{AB}}$ и $\overline{\boldsymbol{AD}}$; в) площадь треугольника ABC;

г) объем пирамиды ABCD.

Сделать чертеж.

Решение.

1) Координаты вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ находим по формуле (2):

$\overline{\boldsymbol{AB}}$ = (6-4; -2-(-3); 3-5) = (2; 1; -2).

Длину вектора $\overline{AB}$ вычислим по формуле |(9), где x, y, z - координаты вектора.

Имеем: $|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$ найдем по формулам:

$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{AB}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\overline{AB}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\overline{AB}|}$.

Получаем

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

2) Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ находим по формуле (10):

$\cos\angle(\overline{AB}\,;\,\overline{AD}) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|}$.

Найдем координаты вектора $\overline{AD}$ и его длину:

$\overline{AD} = (4-4;\ -2-(-3);\ 1-5) = (0;\ 1;\ -4)$; $\overline{AD} = \sqrt{0^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$.

Таким образом,

$\cos\angle(\overline{AB}\,;\,\overline{AD}) = \frac{2\cdot0+1\cdot1+(-2)\cdot(-4)}{3\cdot4,12} \approx 0,7281$.

Тогда $\angle(\overline{AB}\,;\,\overline{AD}) = \arccos 0,7281 \approx 43°$.

3) Для нахождения площади треугольника ABC используем геометрический смысл модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, на которых построен треугольник ABC (формула 24):

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}\times\overline{AC}|$.

Найдем координаты вектора $\overline{AC}$, а затем векторное произведение векторов: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$\overline{AC} = (1-4;\ 2+3;\ 8-5) = (-3;\ 5;\ 3)$.

$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 0\vec{j} + 5\vec{k}$.

$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \sqrt{5^2+0^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2} = 3,54$(кв. ед.).

4) Найдем объем пирамиды ABCD, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, на которых построена пирамида (формула 29):

$V = \frac{1}{6}\,|\overline{AB}\times\overline{AC}\ \cdot\ \overline{AD}|$.

Найдем смешанное произведение векторов:

$\overline{AB}\times\overline{AC}\ \cdot\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20$.

$\boldsymbol{V}_{\text{пир}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \cdot |\mathbf{-20}| = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6}} \approx \mathbf{3,33}$(куб. ед).

Задача 4. Найти углы между вектором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и осями координат, которые определены базисом $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Решение.

Угол α между вектором $\vec{a}$ и осью OX равен углу между вектором $\vec{a}$ и ортом $\vec{\imath} = (1; 0; 0)$. Применив формулу вычисления угла между векторами, получим:

$$cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \tag{30}$$

Аналогично можно найти косинусы углов между вектором $\vec{a}$ и осями ОУ и OZ:

$$cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \tag{31}$$

$$cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \tag{32}$$

Числа, определяемые полученными формулами, называют *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$, они равны координатам нормированного вектора $\vec{a}$. Иначе говоря, направляющие косинусы пропорциональны числам a_1, a_2, a_3, и сумма их квадратов равна.

Очевидно, вектор $\overrightarrow{a^0} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и имеет то же направление.

*Задача 5***.** На материальную точку действуют силы: $\overline{f_1} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}$, $\overline{f_2} = -\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k}$, $\overline{f_3} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$. Найти работу равнодействующей $\bar{F}$ этих сил при перемещении из положения A(2,-1,0) в положение B(4, 1, -1).

Решение. Найдем равнодействующую $\bar{R}$ по формуле

$$\bar{F} = \overline{f_1} + \overline{f_2} + \overline{f_3} = (2 - 1 + 1)\bar{\imath} + (-1 + 2 + 1)\bar{\jmath} + (1 + 2 - 2)\bar{k} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}.$$

Найдем вектор перемещения $\bar{S} = \overline{AB} = (4 - 2)\bar{\imath} + (1 + 1)\bar{\jmath} + (-1 + 0)\bar{k} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$.

Найдем искомую работу по формуле (21):

$$A = \bar{F} \cdot \bar{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 4 + 4 - 1 = 7.$$

Ответ**:** A=7.

*Задача 6***.** При каких значениях m и n векторы $\vec{a} = m\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \overrightarrow{2\jmath}$ и $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - n\vec{k}$ будут коллинеарны?

Решение.

Используем условие коллинеарности векторов (формула 12):

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

$x_1 = m$, $x_2 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$, $z_1 = 2$, $z_2 = -n$.

Подставляем соответствующие координаты векторов в условие коллинеарности:

$\frac{m}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{2}{-n}$,

Отсюда $\frac{m}{3} = \frac{1}{-3}$ и $\frac{1}{-3} = \frac{2}{-n}$.

Решением первой пропорции является m = - 1, решением второй пропорции является число n = 6.

Задача 7. Даны вершины треугольника $A(3,2), B(5,1), C(1,-2)$. Сделать чертёж и найти :1) длину стороны *AC*; 2) проекцию стороны *AB* на сторону *AC*; 3) внутренний угол при вершине *A*.

Решение. Чертеж треугольника сделайте самостоятельно (в системе координат).

1)Длины стороны *AC* равны длине вектора $\overline{AC}$ (формула (9)):

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}.$$

2)Проекция стороны *AB* на сторону *AC* равна проекции вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{AC}$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле(2):

$$\overline{AB} = (5-3)\bar{\imath} + (1-2)\bar{\jmath} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath},$$

$$\overline{AC} = (1-3)\bar{\imath} + (-2-2)\bar{\jmath} = -2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}.$$

Искомую проекцию определим по формуле

$$np_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{20}} = \frac{0}{\sqrt{20}} = 0.$$

3) Внутренний угол при вершине *A* есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, косинус которого найдем по формуле (10)

$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{0}{\sqrt{2^2 + (-1^2)} \cdot \sqrt{20}} = \frac{0}{10} = 0.$

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1)$\sqrt{20}$, 2)0, 3)$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

*Задача 8***.** При каких значениях α векторы $\bar{a} = (\alpha, 2, 1), \bar{b} = (\alpha, 2, 0)$ компланарны?

Решение. Векторы $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то есть:

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ \alpha & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель третьего порядка: $8\alpha - 2 - 2\alpha - 8\alpha = 0$

Откуда $\alpha = -1$.

Ответ**:** $\alpha = -1$.

Задача 9. Даны вектора $\bar{a} = (1, 2, -1), \bar{b} = (-1, 0, 3), \bar{c} = (2, -1, 2), \bar{d} = (1, -1, 2)$. Показать, что векторы $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ относительно базиса $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$.

Решение. Векторы $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ образуют базис, если они некомпланарны, то есть, если их смешанное произведение не равно нулю (свойство 4 смешанного произведения):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 20.$$

Значит, векторы $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ образуют базис. Найдем координаты вектора $\bar{d}$ относительно этого базиса, для чего решим векторное уравнение:

$\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$,

или в координатной форме:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \\ -1 = 2\lambda_1 - \lambda_3, \\ 2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases}$$

то есть получили систему трех уравнений с тремя неизвестными, определитель которой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20.$$

Решим систему методом Крамера, вычислив сначала вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Значит,

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{20} = 0$$

Ответ. $\bar{\mathrm{d}} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

2 Прямая на плоскости

2.1 Общее уравнение прямой и его частные случаи

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0, \quad (33)$$

причем постоянные A и B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют *общим уравнением прямой*. В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи:

1) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат;
2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ox;
3) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Oy;
4) $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy;
5) $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

2.2 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным нормальным вектором

*Определение***.** В декартовой прямоугольной системе координат вектор **с** компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0. Такой вектор называется нормальным вектором этой прямой и обозначается $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Задача 10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ = (3, -1).

Решение. Составим уравнение прямой при А = 3 и В = -1: 3x – y + C = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А. Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1. Искомое уравнение примет вид 3x – y – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку A_0 $(x_0;\ y_0)$, с заданным нормальным вектором $\vec{n}$ = $(n_1;\ n_2)$ можно записать в виде

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0, \quad (34)$$

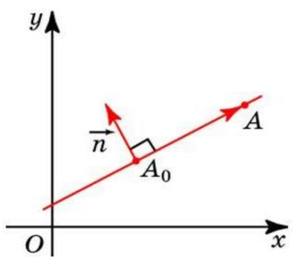


Рисунок 15 - Прямая с заданным нормальным вектором

2.3 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным направляющим вектором

Определение. Любой вектор $\vec{q}$ = (m; n), параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0;\ y_0)$, с заданным направляющим вектором $\vec{q}$ = (m; n) или $\vec{s}$ = (m; n) (рисунок) имеет вид

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x_0}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{y_0}}{\mathbf{n}}, \quad (35)$$

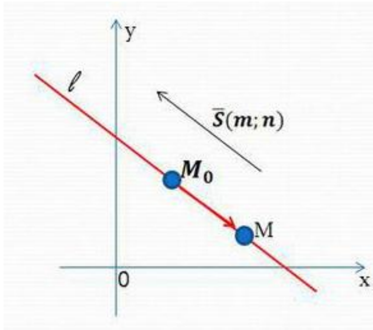


Рисунок 16 - Прямая с заданным направляющим вектором

Такое уравнение называют каноническим уравнением прямой.

2.4 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{36}$$

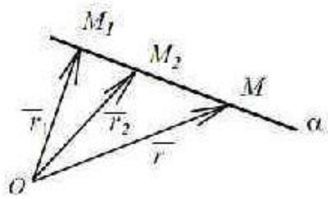


Рисунок 17 - Прямая, проходящая через две данные точки

Задача 11. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,2)$ и $M_2(-2,3)$.

Решение. Подставляем координаты данных точек в уравнение прямой (36), проходящей через указанные точки:

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{3-2}; \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1}.$$

Используя свойство пропорции, и выполнив необходимые преобразования, получим общее уравнение прямой:

$$1(x-1) = -3(y-2); \quad x+3y-7=0.$$

2.5 Уравнение прямой в отрезках

Пусть дано уравнение $Ax+By+C=0$ при условии, что ни один из коэффициентов не равен нулю. Перенесем коэффициент C в правую часть и разделим на $-C$ обе части:

$$Ax + By = -C,$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,$$

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/A} = 1,$$

Используя обозначения, введенные в первом пункте, получим уравнение прямой «*в отрезках*»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{37}$$

Оно имеет такое название потому, что числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

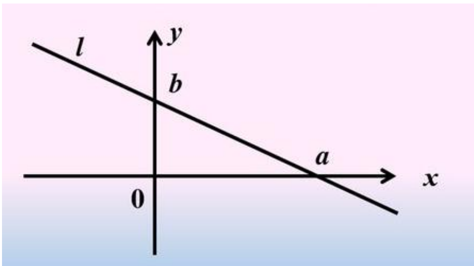


Рисунок 18 - Прямая в отрезках на осях

*Задача 12***.** Прямая задана общим уравнением $2x-3y+6=0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить эту прямую.

Решение. Выполним преобразования, аналогичные описанным выше, получим

$2x – 3y = - 6,$

Делим равенство на 6:

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$

Чтобы построить эту прямую, отложим на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oy отрезок $b=2$. Через полученные точки проведем прямую (рисунок 19).

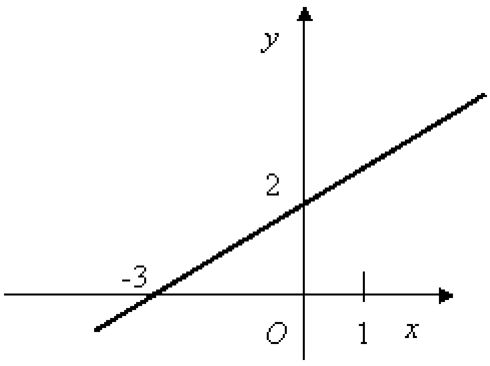


Рисунок 19 – Изображение искомой прямой

2.7 Расстояние от точки до прямой

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (38)$$

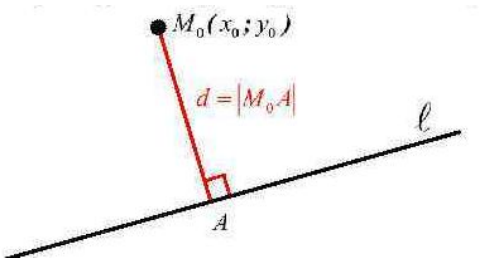


Рисунок 20 - Расстояние от точки до прямой

2.7 Пересечение двух прямых

Если даны две пересекающиеся прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то для вычисления координат точки пересечения данных прямых необходимо решить систему уравнений этих прямых.

2.8 Угол между двумя прямыми

Угол φ между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \qquad (39)$$

2.9 Условие параллельности двух прямых

Условие параллельности двух прямых, заданными общими уравнениями

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, имеет вид

$$A_1 / A_2 = B_1 / B_2, \tag{40}$$

2.10 Условие перпендикулярности двух прямых

Условие перпендикулярности двух прямых, заданными общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \tag{41}$$

2.11 Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим каноническое уравнение прямой $\frac{\mathbf{x-x_0}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{y-y_0}}{\mathbf{n}}$. Обозначив буквой t каждое из равных отношений этого уравнения, получим $\frac{x-x_0}{m} = t$ и $\frac{y-y_0}{n} = t$. Тогда можно записать $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$ (42)

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой.

Задача 14. Построить прямую $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -2 + 5t. \end{cases}$

Решение.

Для построения прямой достаточно найти две ее точки. Пусть t = 0, тогда x = 3, y = - 2, M_1(3; - 2)- первая точка искомой прямой. Пусть t = 1, тогда x = 1, y = 3, M_2(1; 3) – вторая точка прямой. Построить прямую Вам предлагается самостоятельно.

Использование различных уравнений прямой рассмотрено в задаче 15.

Задача 15. Даны координаты вершин треугольника A (-2;4), B(4; 5), C(2;-3). Найти:

1) уравнения сторон треугольника;

2) уравнение высоты, проведенной из вершины А; длину этой высоты;

3)уравнение медианы BM;

4) уравнение средней линии, проведенной параллельно стороне BC;

5) координаты центра тяжести треугольника;

6) внутренний угол А.

Сделать чертеж треугольника и указанных линий.

Решение.

Построим треугольник в прямоугольной системе координат на плоскости (рисунок 21).

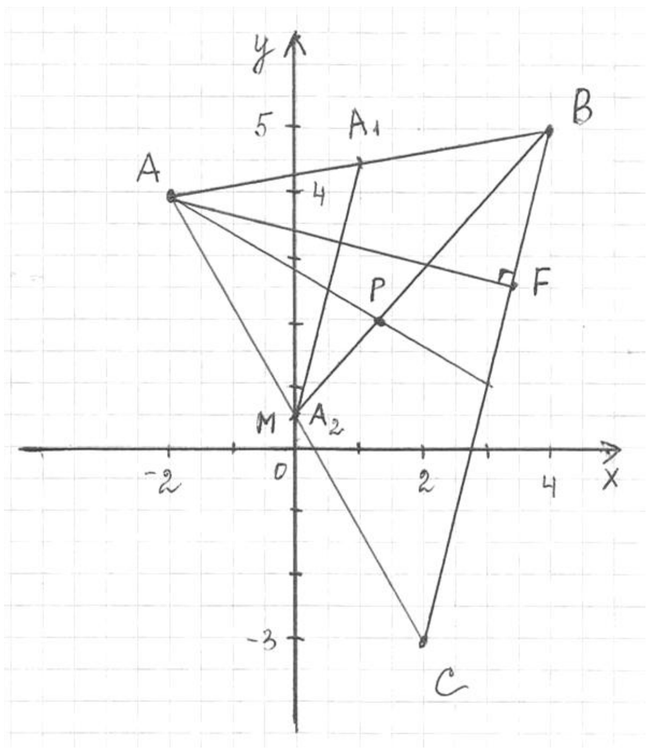


Рисунок 21 – Чертеж треугольника и указанных линий

1) Для составления уравнений сторон треугольника используем уравнение прямой (формула 36):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

Подставим координаты точки A вместо x_1 и y_1, координаты точки B вместо x_2 и y_2:

$$\frac{x-(-2)}{4-(-2)} = \frac{y-4}{5-4},$$

Преобразуем уравнение к общему уравнению прямой:

$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-4}{5-4} \Rightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow$ x+2 = 6(y-4) $\Rightarrow$ x+2 = 6y – 24 $\Rightarrow$

x – 6y +26 = 0 – уравнение стороны AB.

Подставим координаты точки A вместо x_1 и y_1, координаты точки C вместо x_2 и y_2:

$$\frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{y-4}{-3-4},$$

Преобразуем уравнение к общему уравнению прямой:

$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-4}{-3-4} \Rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{-7} \Rightarrow$ -7(x+2) = 4(y-4) $\Rightarrow$ -7x-14 = 4y – 16 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$-7x – 4y +2 = 0 или 7x + 4y - 2 = 0 – уравнение стороны AC.

Подставим координаты точки B вместо x_1 и y_1, координаты точки C вместо x_2 и y_2:

$$\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-5}{-3-5},$$

Преобразуем уравнение к общему уравнению прямой:

$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-5}{-8}$ ⇒ -8(x - 4) = -2(y - 5) = ⇒ 4(x – 4) = y – 5 =⇒ $4x-16 = y-5$ или 4x – y -11 = 0 – уравнение стороны BC.

2) для составления уравнения высоты, проведенной из вершины А (обозначим высоту AF) используем уравнение прямой (34):

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) = 0,$$

Вместо координат точки М подставляем координаты точки А. Нормальным (перпендикулярным) вектором будет являться вектор $\overrightarrow{BC}$. Его координаты найдем по формуле (2)

$$\overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1),$$
$$\overrightarrow{BC} = (2-4;\ -3-5) = (-2; -8),$$

Имеем -2 (x – (-2)) – 8 (y - 4) = 0 ⇒ - 2(x + 2) -8 (y - 4) = 0 ⇒ x + 2 + 4(y - 4) = 0 ⇒ x + 2 +4y – 16 = 0 ⇒ x + 4y – 14 = 0 – уравнение высоты AF.

Для нахождения длины высоты воспользуемся формулой (38)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

Коэффициенты A, B, C найдем из уравнения стороны BC 4x – y -11 = 0.

Здесь A= 4, B = -1, C = -11.

$x_0 = -2$, $y_0 = 4$-координаты вершины А.

$$d = \frac{|4(-2)+(-1)4-11|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{23}{\sqrt{17}},$$

3) Для составления уравнения медианы ВМ необходимо найти координаты середины стороны АС, так как медиана делит противолежащую сторону пополам.

Координаты середины стороны АС найдем из соотношений(15):

Имеем $x_M = \frac{-2+2}{2} = 0$, $y_M = \frac{4-3}{2} = 0{,}5$.

Подставим координаты точек В и М в уравнение прямой, проходящей через две данные точки (36):

$\frac{x-4}{0-4} = \frac{y-5}{0{,}5-5}$ ⇒ - 4,5 (x-4) = - 4(y-5) ⇒ 4,5x -18 = 4y – 20 ⇒ 4,5x - 4y + 2 = 0.

Последнее уравнение является уравнением медианы ВМ.

4) Средняя линия, проведенная параллельно стороне ВС, проходит через середины сторон АС и АВ. Обозначим эти точки A_1 и A_2 соответственно. Их координаты найдем аналогично тому, как нашли координаты середины стороны АС в пункте 3.

$$x_{A1} = \frac{x_A+x_C}{2} = 0, \quad y_{A1} = \frac{y_A+y_C}{2} = 0{,}5,$$
$$x_{A2} = \frac{x_A+x_B}{2} = 1, \quad y_{A2} = \frac{y_A+y_B}{2} = 4{,}5,$$

Подставив координаты в уравнение прямой, проходящей через две данные точки, получаем:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0{,}5}{4{,}5-0{,}5} \;\Rightarrow\; x = \frac{y-0{,}5}{4} \;\Rightarrow\; 4x- y + 0{,}5 = 0$$ – искомое уравнение.

5) Координаты центра тяжести треугольника находятся в точке пересечения медиан (обозначим ее Р), координаты которой найдем из соотношений (17):

Подставляем в эти соотношения координаты вершин треугольника:

$$x_P = \frac{-2+4+2}{3} = 4/3,\; y_P = \frac{4+5-3}{3} = 2\,.$$

Итак, Р(4/3;2) - координаты центра тяжести треугольника.

6) Внутренний угол А – это угол между сторонами АВ и АС. Его найдем по формуле (10)

$x - 6y + 26 = 0$ – уравнение стороны АВ, следовательно, $A_1 = 1$, $B_1 = -6$.

$7x + 4y - 2 = 0$ – уравнение стороны АС, следовательно, $A_2 = 7$, $B_2 = 4$.

Получаем $\cos\varphi = \frac{1*7\,-6*4}{\sqrt{1+36}\;\sqrt{49+16}} = \frac{-17}{\sqrt{37}\;\sqrt{65}} = -0{,}3467$.

Тогда угол $\varphi = \arccos(-0{,}3467) = \pi - \arccos 0{,}3467 = 180^\circ - 69^\circ{,}7 = 110{,}^\circ 3$.

3 Кривые второго порядка

Определение. Линия, определенная уравнением второй степени относительно координат х и у

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy+ 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (43)$$

называется линией (кривой) второго порядка.

Коэффициенты этого уравнения могут принимать различные действительные значения, исключая одновременное равенство А, В и С нулю (в противном случае уравнение не будет уравнением второй степени).

3.1 Окружность

Как известно, **окружностью** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{44}$$

Уравнение окружности с центром в точке С (а; в) и радиусом r имеет вид

$$(x – a)^2 + (y - в)^2 = r^2, \tag{45}$$

Уравнение окружности общем виде записывается так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \tag{46}$$

где A,B,C,D – постоянные коэффициенты.

*Задача 16***.** Составить уравнение окружности с центром в точке (5; - 7) и проходящей через точку (2; - 3).

Решение. Найдем радиус окружности как расстояние от центра до данной ее точки :

$$r = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5.$$

Теперь в уравнение (45) подставим координаты центра и найденную величину радиуса:

$$(x – 5)^2 + (y + 7)^2 = 25.$$

Задача 17. Составить уравнение окружности, касающийся оси абсцисс в точке А(3; 0) и имеющей радиус, равный 6.

Решение. Пусть O_1(а; в) – центр окружности . Абсцисса точки касания и центра окружности одна и та же (а = 3). Найдем ординату центра окружности в:

$$(3 – 3)^2 + (0 - в)^2 = 6^2.$$

Решив это уравнение, получаем в = $\pm$ 6, т.е. имеется два центра O_1(3; 6) O_2(3; - 6).

Отсюда получаем уравнения двух окружностей, удовлетворяющих данным условиям:

$$(x – 3)^2 + (y - 6)^2 = 36 \text{ и } (x – 3)^2 + (y + 6)^2 = 36.$$

Чертеж сделайте самостоятельно.

*Задача 18***.** Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8$. дополним двучлены $x^2 - 8x$ и $y^2 - 10y$ до полных квадратов:

$$x^2 - 8x = x^2 – 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x – 4)^2,$$

$$y^2 - 10y = y^2 - 2 \cdot 5 \cdot y + 5^2 = (y - 5)^2.$$

Тогда уравнение $x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8$ примет вид $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8 + 16 + 25$ или $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$, откуда a= 4, в = 5, r = 7,т.е. центр окружности – точка (4;5), радиус равен 7.

3.2 Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная($2a$), бóльшая расстояния между фокусами ($2c$).

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ох, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b), \qquad (47)$$

где a - длина большой полуоси, b – длина малой полуоси (рисунок 3).

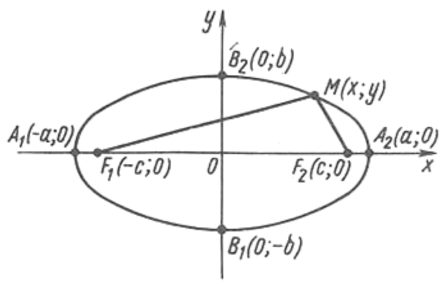


Рисунок 22 – Изображение эллипса с фокусами на оси Ох

Зависимость между параметрами а, в и с выражается формулой

$$a^2 - b^2 = c^2. \qquad (48)$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \qquad (49)$$

Если фокусы эллипса лежат на оси Оу (рисунок 4), то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \ (b > a), \qquad (50)$$

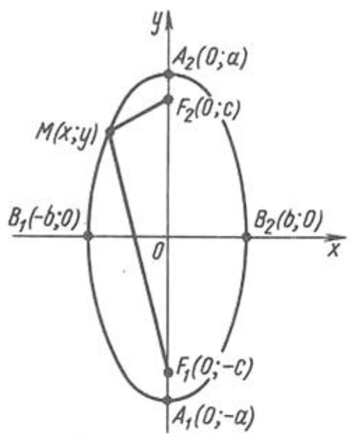


Рисунок 23 – Изображение эллипса с фокусами на оси Оу

В рассмотренных ниже задачах предполагается, что оси симметрии эллипса совпадают с осями координат.

Задача 19. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A_1 (-6; 0) и A_2 (6;0) , а фокусы – в точках F_1 (-4;0) и F_2 (4;0).

Решение.

Из условия следует, что $a = 6$, $c = 4$. По формуле (50) найдем $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (49), получим $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Задача 20. Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, фокусы лежат на оси Ox и большая ось равна 10.

Решение.

Из условия следует, что $a = 5$, $c = 3$. По формуле (50) найдем $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (49), получимx^2 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

*Задача 21***.** Найти координаты вершин и эксцентриситет эллипса

$25x^2 + 9y^2 = 1$,

Решение**.** Запишем уравнение эллипса в виде $\frac{x^2}{\frac{1}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$.

Тогда $a^2 = 1/25$, $a = 1/5$; $b^2 = 1/9$, $b = 1/3$. Здесь $b > a$, поэтому $c^2 = b^2 - a^2 = 1/9 – 1/25 = 16/225$, $c = 4/15$.

Запишем координаты вершин:

B_1 (-1/3; 0) и B_2 (1/3;0), A_1 (-1/5; 0) и A_2 (1/5;0).

Эксцентриситет $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = 4/15 :1/3 = 12/15 = 4/5$.

3.3 Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная($2a$), меньшая расстояния между фокусами ($2c$).

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ох, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (51)$$

где a - длина действительной полуоси, b – длина мнимой полуоси (рисунок 5).

Зависимость между параметрами а, в и с выражается формулой

$$b^2 = c^2 - a^2 , \quad (52)$$

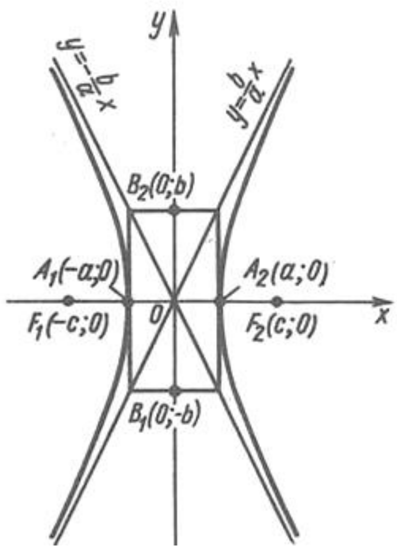


Рисунок 24 – Изображение гиперболы с фокусами на оси Ох

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \pm (b/a)\ x, \quad (53)$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к длине действительной оси

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \quad (54)$$

Если действительная и мнимая оси гиперболы равны (т.е. $a = b$),то гипербола называется равносторонней, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 – y^2 = a^2, \quad (55)$$

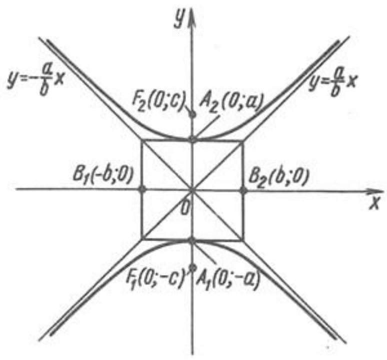
а уравнения асимптот такой гиперболы

$$y = \pm x, \quad (56)$$

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy (рисунок 6), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1, \qquad (57)$$

а уравнения ее асимптот



$$y = \pm (a/\boldsymbol{b})\, x, \qquad (58)$$

Рисунок 25 – Изображение гиперболы с фокусами на оси Oy

Формулы зависимости между параметрами гиперболы с фокусами на оси Oy, ее эксцентриситета остаются без изменений.

Уравнение равносторонней гиперболы с с фокусами на оси Oy имеет вид

$$y^2 - x^2 = a^2, \qquad (59)$$

Гиперболы (57) и (61) называются сопряженными.

В рассмотренных ниже задачах предполагается, что оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат.

*Задача 22***.** Дано уравнение гиперболы $144x^2 - 81y^2 = 11664$. Найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот, эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к канонической форме (53). Для этого разделим уравнение на 11664. Получим $x^2/81 - y^2/144 = 1$.

Из уравнения гиперболы имеем $a^2 = 81$, $a = 9$, $b^2 = 144$, $b = 12$.

По формуле (54) найдем $c^2 = a^2 + b^2 = 81+144 = 225$, $c = 15$.

Запишем координаты вершин и фокусов:

A_1 (-9; 0) и A_2 (9;0), B_1 (-12; 0) и B_2 (12;0), F_1 (-15;0) и F_2 (15;0).

Запишем уравнения асимптот: $y = \pm (12/9)\, x$ или $y = \pm (4/3)\, x$.

Эксцентриситет данной гиперболы $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = 15/9 = 5/3$.

Задача 23. Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \sqrt{6}/3)\, x$ и она проходит через точку (6; - 4).

Решение.

По условию $b/a = \sqrt{6}/3$. Подставим в уравнение (53) координаты данной точки и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 6^2/\ a^2 - \frac{(-4)^2}{b^2} = -1, \\ \frac{b}{a} = \pm\sqrt{6/3}, \end{cases} \Rightarrow a^2 = 12, \quad b^2 = 8,$$

Подставив теперь значения a^2 и b^2 в уравнение (53), получим

$$x^2/12 - y^2/8 = 1,$$

3.4 Парабола с вершиной в начале координат

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вправо (рисунок 26), имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{60}$$

где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы, Уравнение ее директрисы: $x = -\ p/2$. (61)

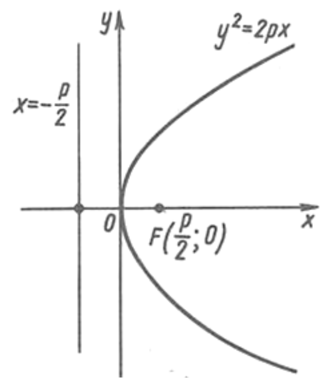


Рисунок 26 – Изображение параболы с фокусом на оси Ox, ветви направлены вправо

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены влево (рисунок 27), имеет вид

$$y^2 = -2px \quad (p > 0), \tag{62}$$

Уравнение ее директрисы $x = p/2$. (63)

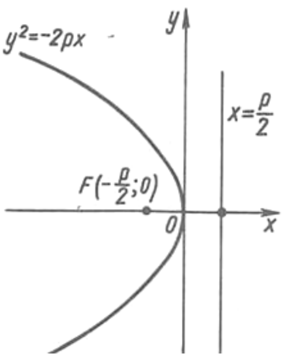


Рисунок 27 – Изображение параболы с фокусом на оси Ох,
ветви направлены влево

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Оy и ветви направлены вверх (рисунок 28), имеет вид

$$x^2 = 2py \ (p > 0), \tag{64}$$

Уравнение ее директрисы $y = -p/2$. (65)

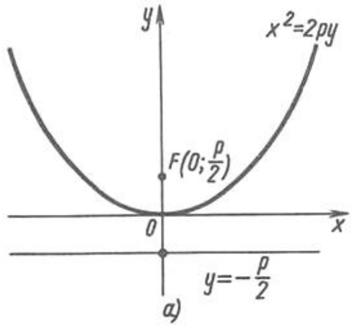


Рисунок 28 – Изображение параболы с фокусом на оси Оу,
ветви направлены вверх

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Оy и ветви направлены вниз (рисунок 29), имеет вид

$$x^2 = -2py \quad (p > 0), \tag{66}$$

Уравнение ее директрисы $y = p/2$. (67)

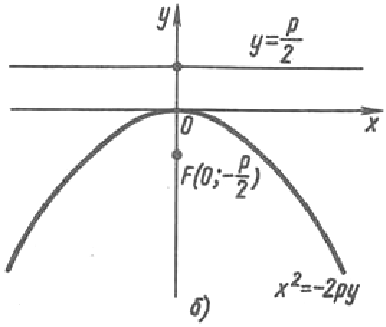


Рисунок 29 – Изображение параболы с фокусом на оси Оу, ветви направлены вниз

В рассмотренных ниже задачах предполагается, что осью симметрии параболы служит одна из осей координат.

Задача 24. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке F (3;0).

Решение. Фокус параболы лежит на положительной полуоси Ох, следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$ (формула 60). Так как координаты фокуса (p/2;0), то p/2 = 3, откуда p = 6. Подставив значение p = 6 в уравнение параболы, получим $y^2 = 12x$.

Задача 25. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая y = - 4.

Решение. Расстояние от директрисы до начала координат равно p/2, следовательно, p/2 = 4, т.е. p = 8. Уравнение этой параболы имеет вид $x^2 = 2py$ (формула 64), так как ордината директрисы отрицательна. Подставив в уравнение значение параметра p, получим $x^2 = 16y$.

*Задача 26***.** Найти координаты фокуса параболы с вершиной в начале координат, если уравнение директрисы x = 3.

Решение.

Расстояние от директрисы до начала координат равно расстоянию от начала координат до фокуса и равно p/2, следовательно, p/2 = 3, т.е. p = 6.Уравнению директрисы x = 3 соответствует парабола $y^2 = - 2px$ (формула 62), фокус которой F (p/2;0) . т.е. F (- 3;0).

4 Кривые как траектории движения точек

Кривые с древних времен привлекали к себе внимание ученых и использовались ими для описания различных природных явлений - от траектории брошенного камня до орбит космических тел. В школьном курсе математики из всего многообразия кривых рассматриваются только графики функций. При этом основное внимание уделяется их аналитическим свойствам, возрастанию, убыванию и т.п. Геометрические же свойства остаются в стороне даже для таких известных кривых, как парабола, эллипс, гипербола. Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии, создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и других наук. В учебнике геометрии рассмотрены некоторые кривые, определяемые как геометрические места точек. Среди них: парабола, эллипс и гипербола.

Рассмотрим кинематический способ образования кривых, при котором кривая получается как траектория движения точки.

Пусть окружность радиуса R катится по прямой a; C - точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рисунок 30). Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся без скольжения по прямой, называется циклоидой.

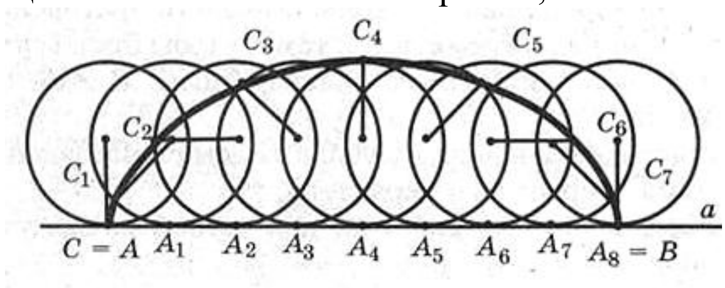


Рисунок 30 - Изображение циклоиды

Для изображения циклоиды отложим на прямой a отрезок AB, равный длине окружности, т.е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_8 = B$

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой a, сделает один оборот, т.е. повернется на 360°, она займет положение (8), а точка C переместится из положения A в положение B.

Если окружность сделает половину полного оборота, т.е. повернется на 180°, она займет положение (4), а точка C переместится в самое верхнее положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка С переместится в положение C_1.

На рисунке 1 показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие же участки, т.е. циклоида будет состоять из периодически повторяющихся участков, называемых арками циклоиды.

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде (рисунок 31). Если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков могут забрызгивать спину велосипедиста.

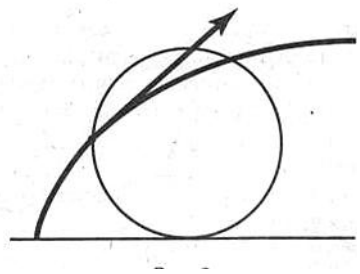


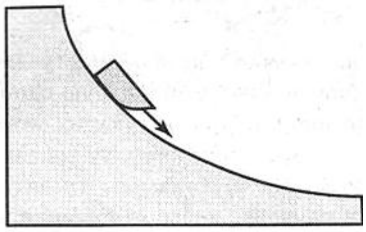
Рисунок 31 - Касательная к циклоиде

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564-1642). Он же придумал и ее название.

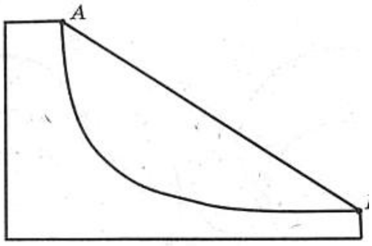
Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Отметим некоторые из них.

Свойство 1 (Ледяная гора). В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время (рисунок 32, а). Искомую кривую назвали «брахистохроной», т.е. кривой кратчайшего времени.

Ясно, что кратчайшим путем из точки A в точку B является отрезок AB. Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается большим (рисунок 32,б).



а)



б)

Рисунок 32 - Траектория спуска по горке: а - по кривой, б - по прямой

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевернутая циклоида (рисунок 32, а). Методы, развитые этими учеными при решении задачи о брахистохроне, положили начало новому направлению математики - вариационному исчислению.

Свойство 2 (Часы с маятником). Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды: чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629-1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность (рисунок 33,а).

Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида. Если, например, изготовить желоб в форме перевернутой циклоиды и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды (рисунок 33,б). За это свойство циклоиду называют также «таутохрона» - кривая равных времен.

Гюйгенс изготовил две деревянные дощечки с краями в форме циклоиды, ограничивающих движение нити слева и справа (рисунок 33,в). При этом сам шарик будет двигаться по перевернутой циклоиде и, таким образом, период его, колебаний не будет зависеть от амплитуды.

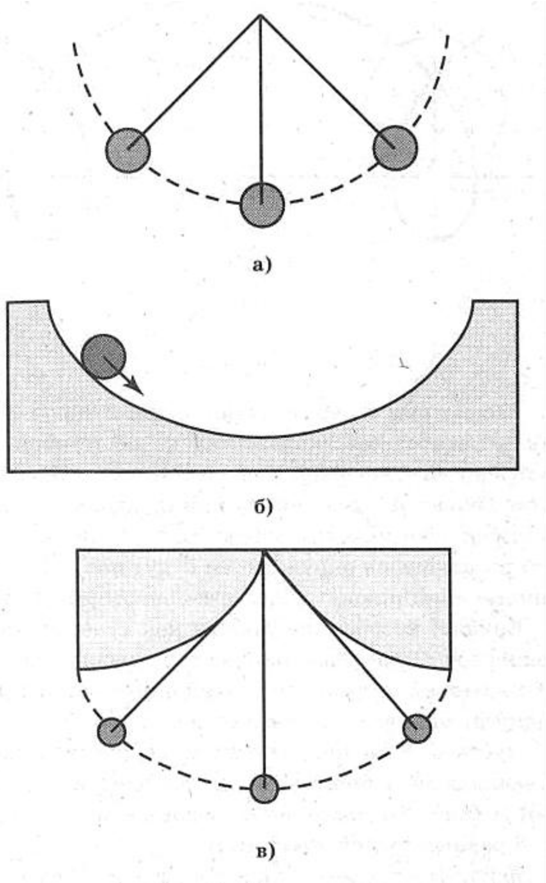
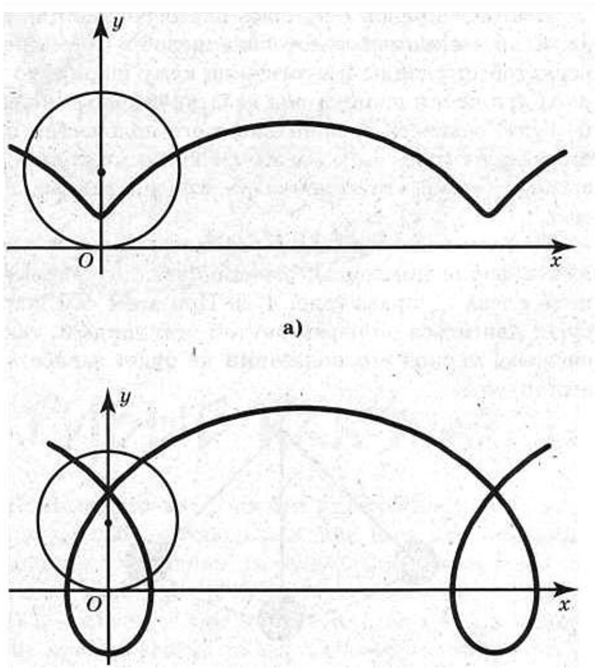


Рисунок 33 – Движение шарика по циклоиде

Из этого свойства циклоиды, в частности, следует, что независимо от того, с какого места ледяной горки в форме перевернутой циклоиды мы начнем спуск, на весь путь до конечной точки мы затратим одно и то же время.

Пусть теперь окружность катится по прямой, а точка закреплена не на окружности, а на продолжении радиуса. В этом случае точка будет описывать кривую, называемую удлиненной циклоидой (рисунок 34,а*)*. Если же точка закреплена на радиусе внутри окружности, то она будет описывать кривую, называемую укороченной циклоидной (рисунок 34,б).



б)

Рисунок 34 –Циклоида: а – удлиненная, б - укороченная

Рассмотрим теперь ситуацию, при которой окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. Получающаяся при этом кривая называется «эпициклоидой». В зависимости от соотношения между радиусами неподвижной и катящейся окружностей будут получаться различные эпициклоиды. Разберем некоторые из них.

Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется «кардиоидой».

Пусть C - точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находится в положении A (рисунок 35). Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками $A_1, A_2, ..., A_8 = A$.

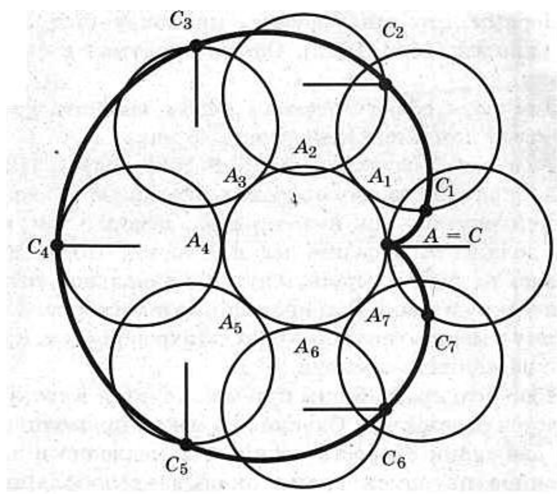


Рисунок 35 – Эпициклоиды

Ясно, что когда окружность сделает один оборот, т.е. повернется на 360°, она займет исходное положение, и точка C переместится в исходное положение.

Если окружность сделает половину полного оборота, т.е. повернется на 180°, она займет положение (4), а точка C переместится в положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 6 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

На рисунке 36(а - г) показаны траектории движения точек в случаях, когда отношение радиусов катящейся и неподвижной окружности равно:

а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : 5; г) 2 : 5.

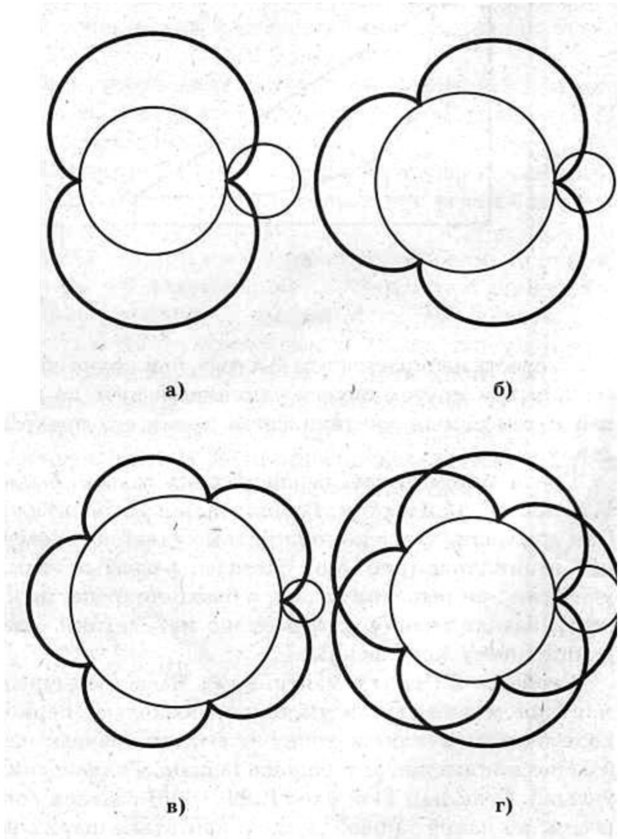
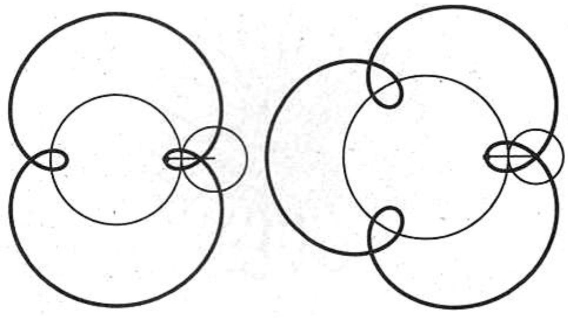
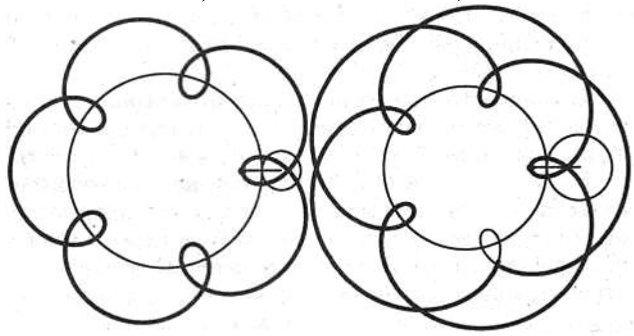


Рисунок 36 - Траектории движения точек при различных отношениях радиусов катящейся и неподвижной окружности

На рисунках 37 и 38 показаны соответствующие удлиненные и укороченные эпициклоиды.

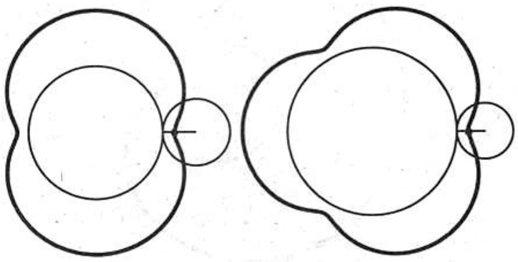


а) б)



в) г)

Рисунок 37- Удлиненные эпициклоиды



а) б)

Рисунок 38 - Укороченные эпициклоиды

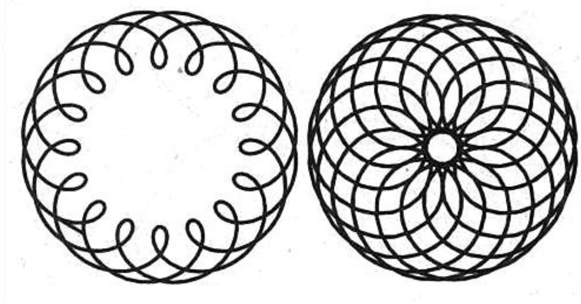
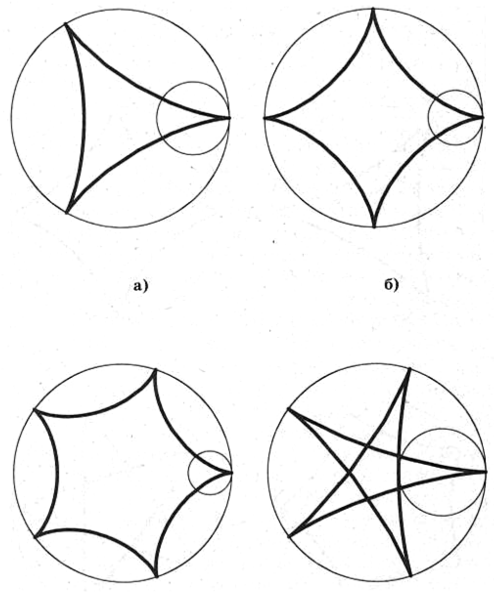


Рисунок 39 - Два примера эпициклоид, полученные с помощью компьютера

Пусть теперь окружность катится не с внешней, а с внутренней стороны другой окружности. Получающаяся при этом кривая называется гипоциклоидой.

На рисунках 40 (а - г) показаны гипоциклоиды в случаях, когда отношение радиусов катящейся и неподвижной окружности равно:

а) 1 : 3; б) 1 : 4; в) 1 : 5; г) 2 : 5.



в) г)

Рисунок 40- Гипоциклоиды в случаях, когда отношение радиусов катящейся и неподвижной окружности равно:

а) 1 : 3; б) 1 : 4; в) 1 : 5; г) 2 : 5.

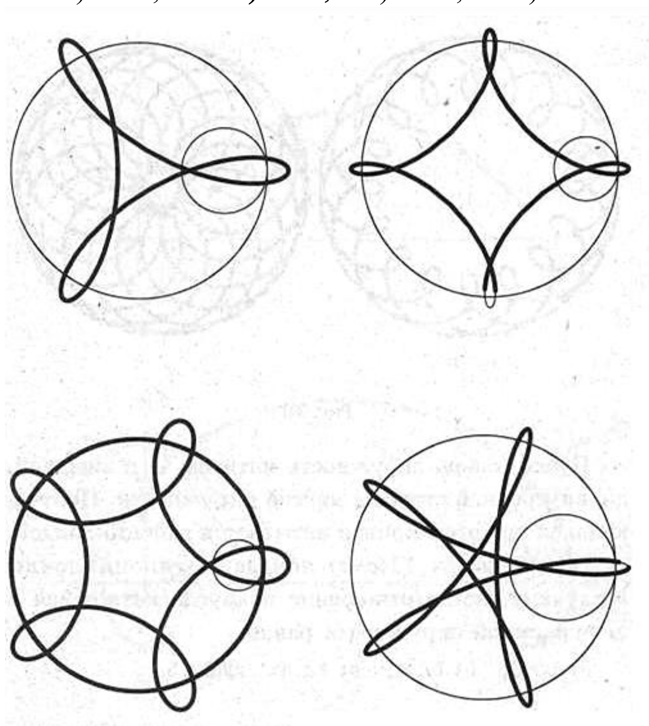


Рисунок 41- Удлиненные гипоциклоиды

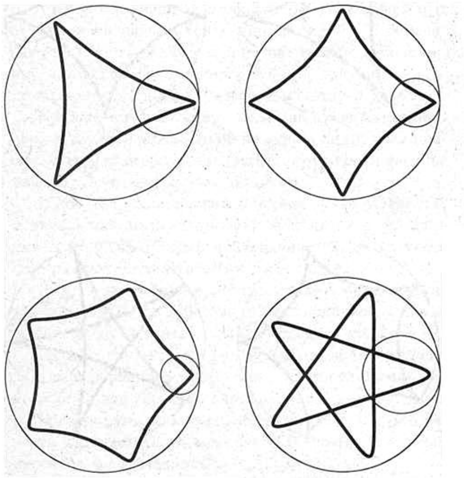


Рисунок 42- Укороченные гипоциклоиды

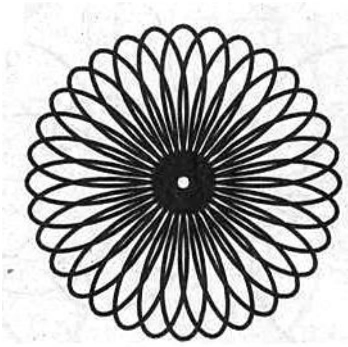


Рисунок 43- Пример гипоциклоиды, полученной с помощью компьютера

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение вектора.
2. Приведите примеры векторных величин.
3. Перечислите виды векторов.
4.Постройте:

а) сонаправленные векторы; б) противоположно направленные векторы; в) равные векторы; г) противоположные векторы) коллинеарные векторы.

5. Какие векторы называются компланарными?
6.Сформулируйте определение нулевого вектора.
7.Какие операции над векторами относятся к линейным?
8. Запишите правила сложения двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма, правило многоугольника.
9. Сформулируйте правило вычитания двух векторов.
10. Дайте определение умножение вектора на число.
11. Сформулируйте понятие пространственной системы координат.
12. Дайте определение координат вектора.
13. Запишите правило сложения двух векторов в координатах.
14. Запишите правило вычитания двух векторов в координатах.
15. Что называется длиной вектора?
16. Запишите формулы для нахождения длины вектора.
17. Запишите условие равенства двух векторов в координатах.

18. Запишите условие коллинеарности двух векторов в координатах.

19. Запишите условие перпендикулярности двух векторов в координатах.

20. Дайте определение скалярного произведения векторов.

21. Каковы свойства скалярного произведения?

22. В чем заключается геометрический смысл скалярного произведения двух векторов?

23. В чем заключается физический смысл скалярного произведения двух векторов?

24. Запишите формулу для нахождения угла между двумя векторами.

25. Когда скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю?

26. Чему равно скалярное произведение коллинеарных векторов?

27. Дайте определение векторного произведения двух векторов.

26. Запишите формулу для нахождения векторного произведения векторов в координатах.

27. Как найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$?

28. Чему равно векторное произведение коллинеарных векторов?

29. Дайте определение смешанного произведения двух векторов.

30. В чем заключается геометрический смысл смешанного произведения векторов $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$?

31. Запишите формулу для нахождения объема параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$.

32. Запишите формулу для нахождения объема тетраэдра, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$.

33. Запишите формулу для нахождения координат середины отрезка.

34. Запишите формулу для нахождения координат центра тяжести треугольника.

35. Запишите формулы деления отрезка в заданном отношении.

36. Запишите общее уравнение прямой на плоскости.

37. Каким характерным признаком отличается уравнение прямой в прямоугольной системе координат от уравнений других линий?

38. Как расположена прямая относительно системы координат, если в ее уравнении отсутствует а) свободный член; б) одна из переменных; в) одна из переменных и свободный член?

39. Запишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

40. Что называется угловым коэффициентом прямой и каков его геометрический смысл?

41. Как найти угловой коэффициент прямой по общему уравнению?

42. Как найти угловой коэффициент прямой, если известны ее две точки?

43. Как найти расстояние от данной точки до прямой, заданной общим уравнением?

44. Сформулируйте определение угла между двумя прямыми.

45. Как найти угол между двумя прямыми, заданными а) общими уравнениями; б) каноническими уравнениями; уравнениями с угловым коэффициентом?

46. Запишите условие параллельности двух прямых, заданными а) общими уравнениями; б) каноническими уравнениями; в) уравнениями с угловым коэффициентом.

47. Запишите условие перпендикулярности двух прямых, заданными а) общими уравнениями; б) каноническими уравнениями; в) уравнениями с угловым коэффициентом.

48. Как найти точку пересечения двух прямых, заданными а) общими уравнениями; б) каноническими уравнениями; в) уравнениями с угловым коэффициентом?

49.Сформулируйте определение окружности.

50. Запишите уравнение окружности с центром а) в начале координат; б) в любой точке.

51. Сформулируйте определение эллипса. Запишите его каноническое уравнение.

52. При каком условии фокусы эллипса будут лежать на оси Оу?

53.Сформулируйте определение гиперболы. Запишите ее каноническое уравнение.

54. При каком условии фокусы гиперболы будут лежать на оси Оу?

55.Какая гипербола называется равносторонней?

56. Сформулируйте определение асимптоты гиперболы.

57. Запишите уравнения асимптот гиперболы с фокусами а) на оси Ох, б) с фокусами на оси Оу.

58. Запишите уравнения асимптот равносторонней гиперболы с фокусами а) на оси Ох, б) с фокусами на оси Оу.

57. Сформулируйте определение параболы.

58. Запишите каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус лежит на оси Ох, а ветви направлены а) вправо; б) влево.

59. Запишите каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус лежит на оси Оу, а ветви направлены а) вверх; б) вниз.

60. Что называется директрисой параболы?

61. Как называется расстояние между фокусом и директрисой параболы?

6 Упражнения для самостоятельного решения

1.Установите соответствие между уравнениями прямых и их расположением на координатной плоскости:

1) y = 3x,

2) 2x + 3y – 1 = 0,

3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4}$.

Варианты ответов:

А) Общее уравнение прямой.

В) Каноническое уравнение прямой .

С) Уравнение прямой, проходящей через начало координат.

2. Запишите координаты нормального вектора прямой 3x – 2y +5 = 0.

3.Запишите координаты направляющего вектора прямой 3x – 2y +5 = 0.

4.Запишите названия уравнений прямых:

1) y = 3x,

2) 2x + 3y – 1 = 0,

3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4}$,

4) y = 4,

5) x = -5,

6) y = 5x +2.

5.Составьте уравнение прямой , проходящей через точки А(-2; 3) и В(4; -5).

6. Постройте графики прямых линий 2x – 3y = 6, x/3 – y/2 = 1.

7. Укажите параллельные прямые
$3x - 2y + 5 = 0$,
$2x + 3y - 1 = 0$,
$5x - 4y + 2 = 0$,
$6x - 4y - 1 = 0$,
$-3x + 2y + 1 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$.

8. Из представленных уравнений укажите уравнения окружностей:
а) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 4y - 19 = 0$,
б) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y - 34 = 0$,
в) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$,
г) $y^2 = 2x - 3y + 4 = 0$,
д) $x^2 = 2x - 3y + 4 = 0$.

9 .Найдите координаты центра и радиусы окружностей из задания №8 и постройте их графики .

10. Найдите расстояние между центрами этих окружностей .

11. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в середине отрезка, соединяющего центры этих окружностей (из задания №8).

12. У эллипса большая полуось a равна 5 и малая полуось b равна 3 , тогда каноническое уравнение эллипса имеет вид

Варианты ответов:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, 2) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$,3) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$,4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

13. Докажите, что уравнение $3x^2 + 5y^2 - 8 = 0$, является уравнением эллипса.

14.Найдите длину большой оси эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

15.Докажите, что уравнение $3x^2 - 6y^2 - 8 = 0$, является уравнением гиперболы.

16. Найдите длину мнимой оси гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.

17.Найдите величину параметра параболы $y^2 = 16x$.

18. Докажите, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.

19. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n-угольника, когда он катится по прямой аналогично окружности: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

20. Докажите, что кардиоида обладает следующим свойством: если провести произвольную прямую через точку A (рисунок 44) и от точки B ее пересечения с неподвижной окружностью отложить в обе стороны отрезки равные диаметру окружности, то концы этих отрезков C и D будут принадлежать кардиоиде.

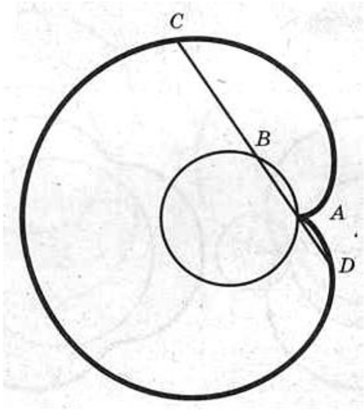


Рисунок 44 -Изображение кардиоиды к вопросу 20

21. Нарисуйте эпициклоиду с отношением радиусов, равным; а) 1 : 4; б) 3 : 5; в) 4 ; 3; г) 2. Нарисуйте соответствующие удлиненные и укороченные эпициклоиды.

22. Нарисуйте гипоциклоиду с отношением радиусов, равным; а) 3 : 5; б) 2 : 7; в) 3 : 7; г) 4 : 7. Нарисуйте соответствующие удлиненные и укороченные гипоциклоиды.

23. Докажите, что если внутри большой окружности катится окружность вдвое меньшего диаметра, то любая точка внутренней окружности будет двигаться по диаметру внешней окружности.

7 Тестовые задания

7.1 Тема «Векторы»

1. Даны точки A(4; 5; 1) и B(0; 9; -8). Чему равна длина отрезка AB?

a) $\sqrt{113}$ b) $\sqrt{42}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{81}$ e) $2\sqrt{32}$

2. Укажите пару коллинеарных векторов:

a) $\vec{a} = (1;4;5)$ и $\overrightarrow{b} =(0;8;-1)$ b) $\vec{a} = (2;8;-1)$ и $\vec{b} = (4;16;-2)$

c) $\vec{a} = (0;0;0)$ и $\overrightarrow{b} =(8;4;3)$

d) $\vec{a}(1;2;2)$ и $\vec{b}(-1;2;2)$ e) $\vec{a}(1;-3;4)$ и $\vec{b}(4;-3;1)$

3. Могут ли векторы быть коллинеарными, но не равными?

a) да b) нет c) не достаточно данных

4. Вектор $\vec{m} = (4;-8;6)$ ортогонален (перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Укажите координаты вектора $\vec{n}$:

a) $\vec{n} = (-1;-2;-3)$ b) $\overrightarrow{n} =(1;2;3)$ c) $\vec{n} = (-2;2;4)$

d) $\vec{n} = (2;-2;-4)$ e) $\vec{n} = (-2;-2;4)$

5. Вычислить координаты середины отрезка АВ, если А(-10; 2; 3) и В(0; 16; -7).

a) $(5;-8;2)$ b) $(-5;9;-2)$ c) $(-5;8;2)$ d) $(5;9;-2)$ e) $(-10;14;-4)$

6. Чему равен модуль вектора $\overrightarrow{MN}$, если M$\left(\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$ N $\left(2\sqrt{3};3\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

7. При каком положительном ***n*** векторы $\overrightarrow{(0;n;1)}$ и $\overrightarrow{(-2;n+1;-2)}$ ортогональны (перпендикулярны)?

a) -2; 1 b) 1 c) 1; 2 d) 2 e) -2

8. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}=(2;-1{,}5;4)$ и $\overrightarrow{b}=(-3{,}5;2;0)$:

a) -14 b) 4 c) -4 d) 10 e) -10

9. Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{a}=(3;3;0)$ и $\overrightarrow{b}=(3;0;0)$:

a) 45° b) 60° c) 30° d) 90° e) 120°

10. Даны векторы $\overrightarrow{a}=(\frac{3}{5};\frac{1}{3};1)$ и $\vec{b}=(\frac{1}{4};\frac{3}{8};\frac{1}{2})$. Вычислить координаты вектора $\vec{m}=15\vec{a}-8\vec{b}$.

a) $(\frac{7}{15};\frac{2}{15};\frac{11}{15})$ b) $(\frac{7}{8};-\frac{1}{8};10)$ c) $(-3;-15;-5)$ d) $(-3;2;7)$

e) $(7;2;11)$

11. Даны три точки А(1; 5; -3), В(6; 4; -3) и С(2; 0; -3). Вычислить:

1.Длину медианы АМ.

2.Периметр ΔАВС.

3.Косинус угла С.

7.2 Тема «Прямая на плоскости»

1.Установите соответствие между прямыми и их расположением на плоскости относительно системы координат 1) Прямая параллельна оси Ox a) $7x+8=0$;

2) Прямая параллельна оси Oy b) $4x+3y=0$; 3) Прямая проходит через начало координат c) $5x=0$; 4) Прямая совпадает с осью Ox d) $x+4y=0$; 5) Прямая совпадает с осью Oy e) $y-3=0$; f) $2x+9=0$; i) $3y=0$; k) $2x=0$; l) $x+y=0$.

3. Расстояние от точки $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ до прямой $3x-4y-1=0$ равно

Варианты ответа: 2/5,1/5,-1/5,2/5

4. Заданы прямые $l_1: 3x-4y-4=0$, $l_2: \begin{cases} x=4+8t, \\ y=2+6t, t\in R, \end{cases}$
$l_3: \dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-2}{1}$.

Тогда

a) l_1 , l_2 , l_3 пересекаются; a) l_1 , l_2 , l_3 пересекают-ся;

b) l_1 , l_2 па-раллельны, l_3 их пере-секает;

c) l_1 , l_2 сов-падают, l_3 их пересе-кает;

d) l_1 , l_2 , l_3 совпадают.

5. Угол между прямыми $l: 4x+3=0$ и $4x+4y-3=0$ равен

$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$.

6. Расстояние между параллельными прямыми $l: 6x-8y+16=0$ и $m: 3x-4y-1=0$ равно

9/5, 8/5, 7/5, 6/5.

7. Определите положение точек $A(1;-3)$, $B(2;2)$, $C(2;-5)$ относительно прямой $l: 3x+4y-4=0$.

Ответы

1) e); 2) a), f); 3) b); d); l); 4) i); 5) c); k).

1) c),f), i); 2) a), d), e), l) ; 3) b), k).

d) $\frac{2}{5}$.

c) l_1 , l_2 совпадают, l_3 их пересекает;

b) $\frac{\pi}{4}$.

a) $\frac{9}{5}$.

Точки A, C лежат в одной полуплоскости, точка B в другой

7.3 Тема «Кривые второго порядка»

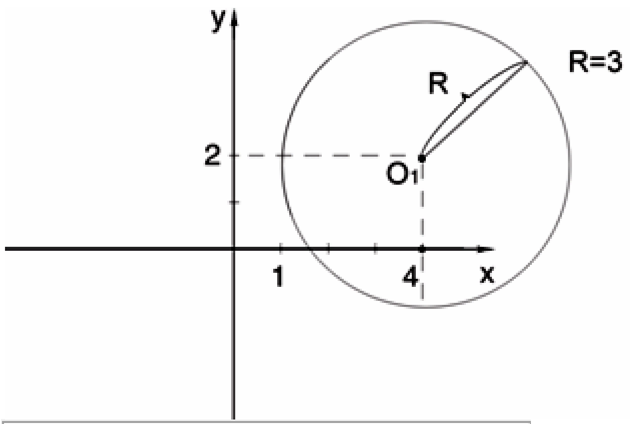
1. Укажите верное соответствие между кривыми второго порядка и их каноническими уравнениями.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a \neq b)$
$x^2 + y^2 = R^2$
$y^2 = 2px$

Уравнение второй степени $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где $A^2 + C^2 \neq 0$ г:

окружности, если
эллипсу, если
гиперболе, если
параболе, если

3. Выбрать уравнение окружности, представленной на рисунке:



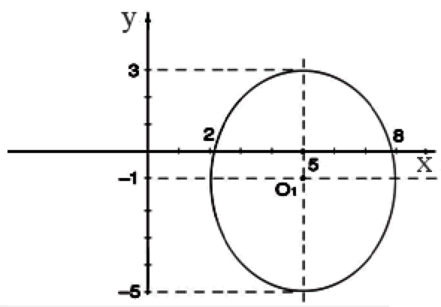
☐	$x^2 + y^2 = 9$
☐	$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$
☐	$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 9$
☐	$(x-4)^2 - (y-2)^2 = 9$

4. Найти квадрат радиуса окружности $x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0$
Введите ответ
целым числом:

5. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ относительно прямой $x - y - 3 = 0$, среди предложенных:

☐	$(x-9)^2 + (y-2)^2 = 1$
☐	$(x-1)^2 + (y+6)^2 = 1$
☐	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$

6. Выбрать уравнение эллипса, представленного на рисунке:



☐	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

☐ $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$
☐ $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
☐ $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

7. Определить тип кривой $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$

Введите ответ:

____

8. Найти квадрат большой полуоси эллипса, фокусы которого лежат на оси OX, малая полуось $2\sqrt{6}$, расстояние между фокусами 8.

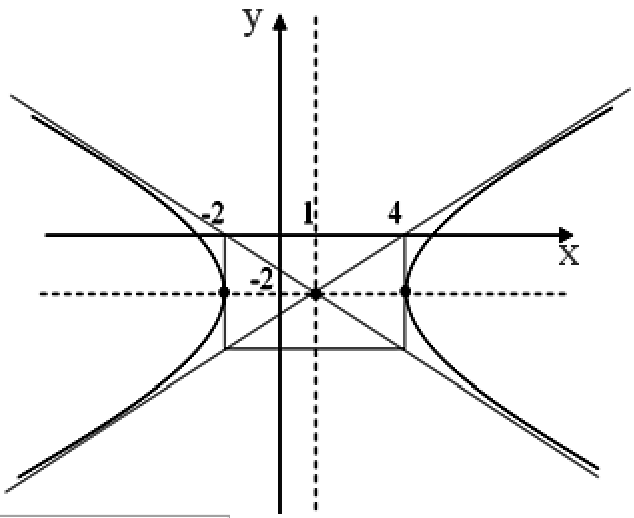
Введите ответ целым числом:

____

9. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2;\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ и выбрать его среди предложенных:

☐ $\frac{x^2}{10}+y^2=1$
☐ $x^2+\frac{y^2}{10}=1$
☐ $x^2+10y^2=10$
☐ $10x^2+y^2=10$

10. Выбрать уравнение гиперболы, представленной на рисунке:



☐ $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$
☐ $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$
☐ $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
☐ $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

---

11. Найти минимальную полуось гиперболы $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$:

Введите ответ целым числом: ☐

---

12. Для гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ найти расстояние между фокусами.

Введите ответ целым числом: ☐

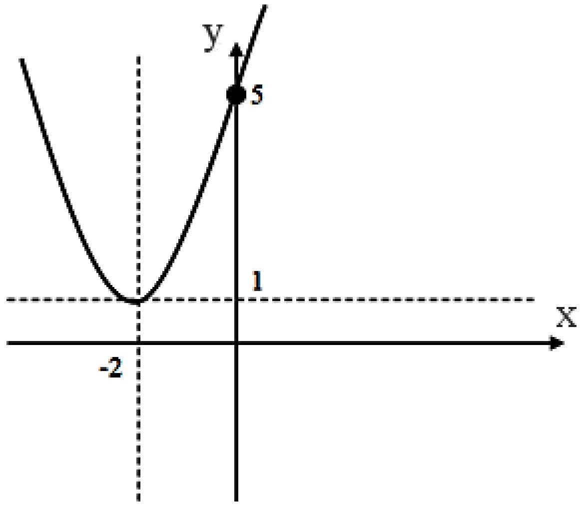
---

13. Через точку М (0; –1) и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

Введите координаты точки: x = ☐, y = ☐

---

14. Выбрать уравнения параболы, представленной на рисунке.



☐ $y = 2\,(x + 2)^2$

☐ $y - 1 = (x + 2)^2$

☐ $y + 1 = (x - 2)^2$

☐ $\mathrm{y} + (\mathrm{x} - 2)^2 = 1$

---

15. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью OX. Выбрать его из предложенных:

☑ $x^2 = 4y$

☐ $x^2 = 16y$

☐ $y^2 = 16x$

☐ $y^2 = 4x$

---

16. Выберите среди предложенных уравнений уравнения параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно OX и отсекающей от прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

☐ $y^2 = 4x$

☐ $y^2 = 32x$

☐ $y^2 = -4x$

☐ $y^2 = -16x$

Заключение

Знание векторного исчисления способствует развитию аналитического мышления. Возникшее в связи с задачами геометрии, физики, строительства, техники оно переводит геометрические понятия на язык координат и векторов, без которых невозможно понимание поставленных вопросов. основой для этого являются уравнения прямых, плоскостей, сферы (поверхности шара), других различных фигур в пространстве. Координаты и векторы используются при доказательстве теорем, решении задач. Векторы позволяют увеличить размерность. Многие теоретические и специальные дисциплины (физика, экономика, радиотехника и др.) используют n- мерные векторные пространства с $n > 3$. Например, без четырехмерной геометрии было бы очень трудно изложить и использовать такой важный раздел современной физики, как теория относительности Альберта Эйнштейна. Без понимания векторного исчисления невозможно проложить дорогу, построить дом, рассчитать траекторию и дальность полета снаряда. Даже задачи на переливание удобнее решать с помощью векторной теории. Поэтому любой техник в той или иной степени должен владеть основами векторной алгебры и аналитической геометрии.

Список использованных источников

Основные источники:

1Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Дополнительные источники:

2Осипенко, С.А. Элементы высшей математики : учебное пособие : [16+] / С.А. Осипенко. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 202 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571231 Библиогр.: с. 193-194. – ISBN 978-5-4499-0201-6. – DOI 10.23681/571231. – Текст : электронный.

Интернет – ресурсы:

3http: // www.mathtest.ru.
4http: // www.webmath.ru.
5http: // e - scince.ru.
6http: // mathemlib.ru.

Приложение А

Рисунок А1 - Геометрическая техника в живописи

Рисунок А2 - Понятие векторной величины

Приложение Б

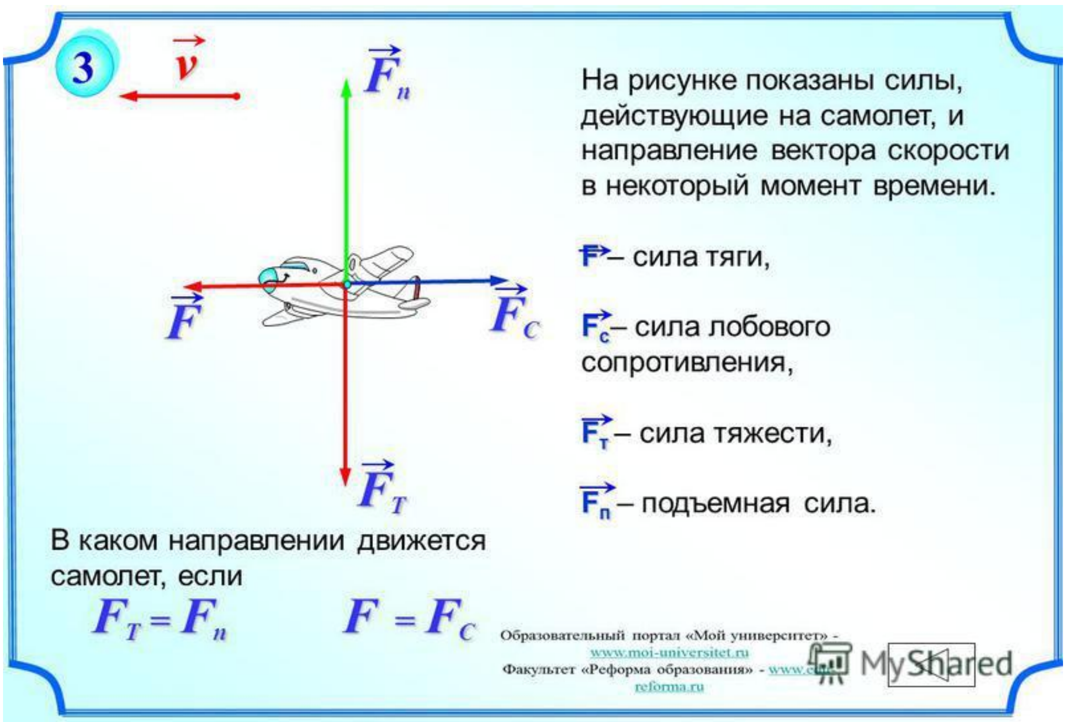


Рисунок Б1 - Сила - векторная величина

Рисунок Б2 - Ель - вектор

Приложение В

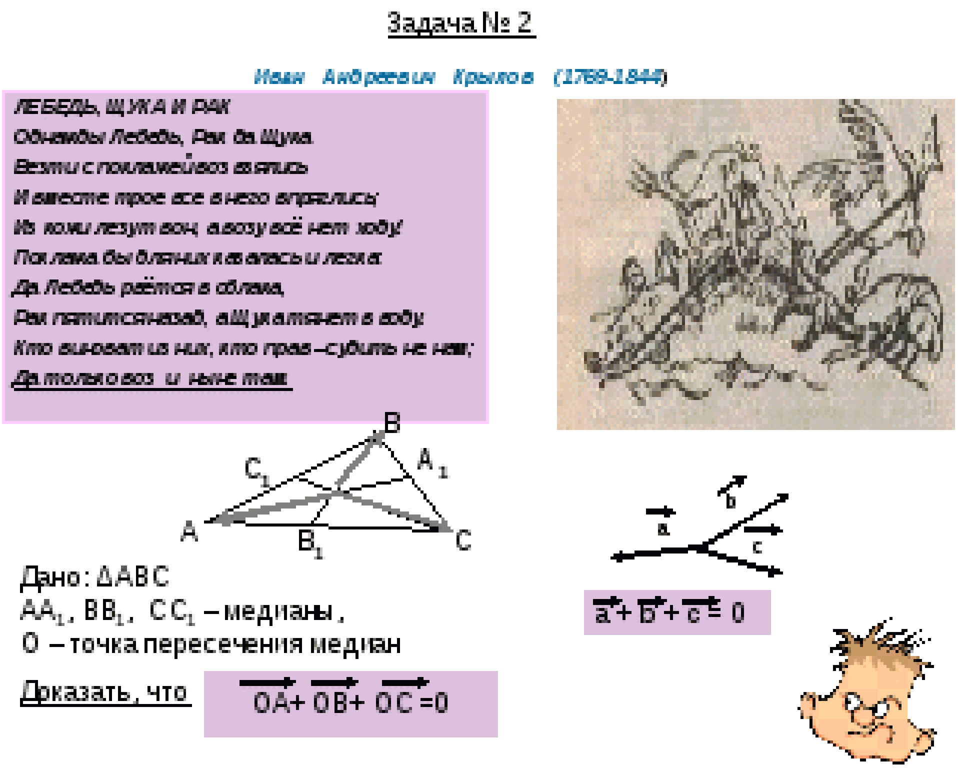


Рисунок В1 - Векторы в литературе

Рисунок В1 - Векторы в басне

Приложение Г

Рисунок Г1 - Векторы в строительстве

Рисунок Г2 - Векторы и сила тока

Приложение Д

Рисунок Д1 - Векторы напряженности

Рисунок Д 2 - Векторная графика в медицине

Приложение Е

Рисунок Е1 - Векторы в механике

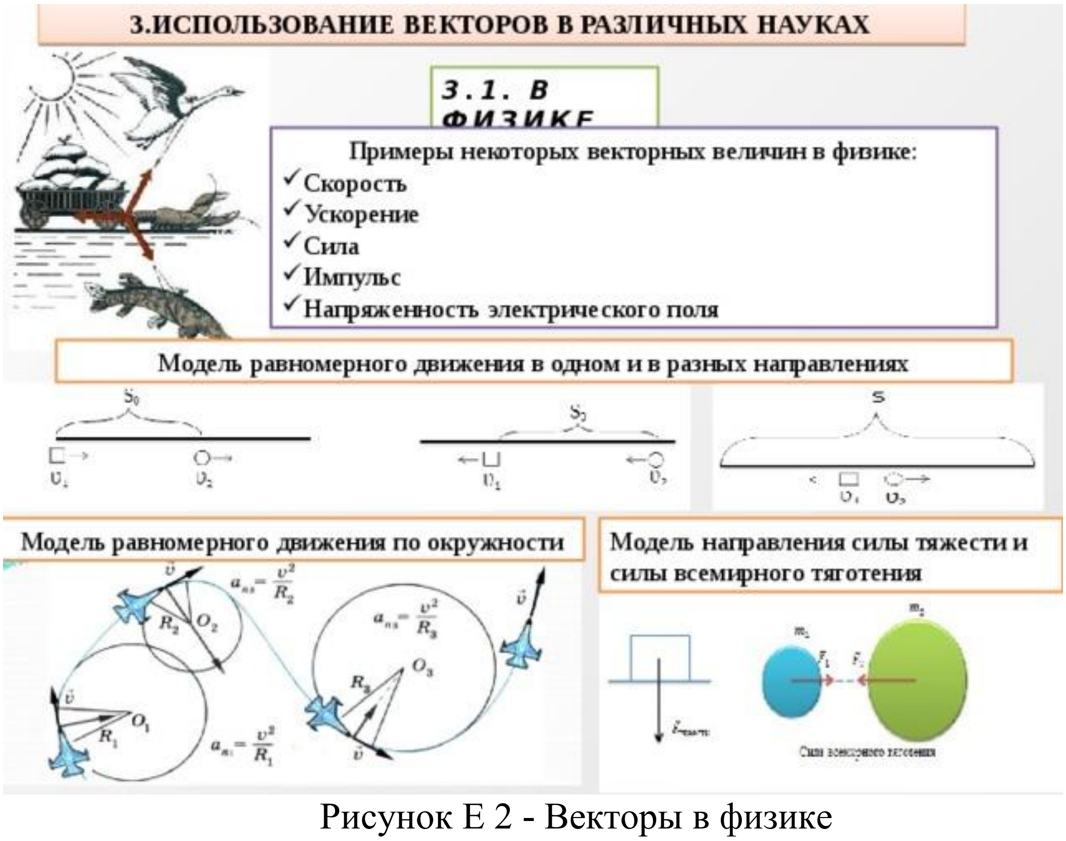


Рисунок Е 2 - Векторы в физике

Приложение Ж

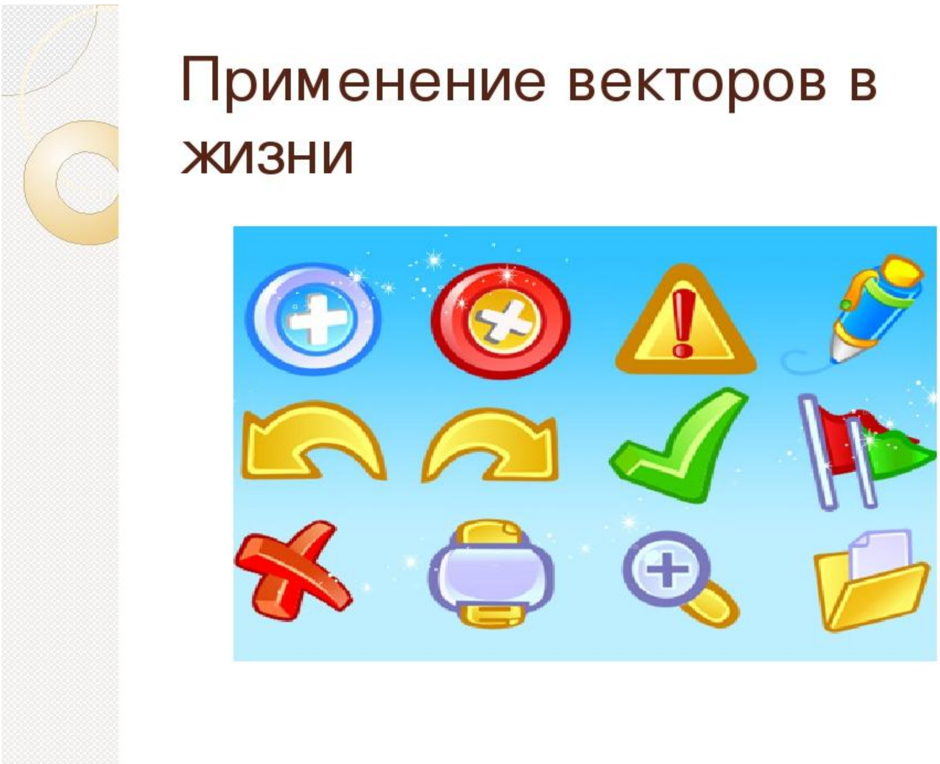


Рисунок Ж1 - Векторы вокруг нас

Рисунок Ж 2 - Аналитическая геометрия в биологии

Приложение И

Рисунок И1 - Фрактальная графика

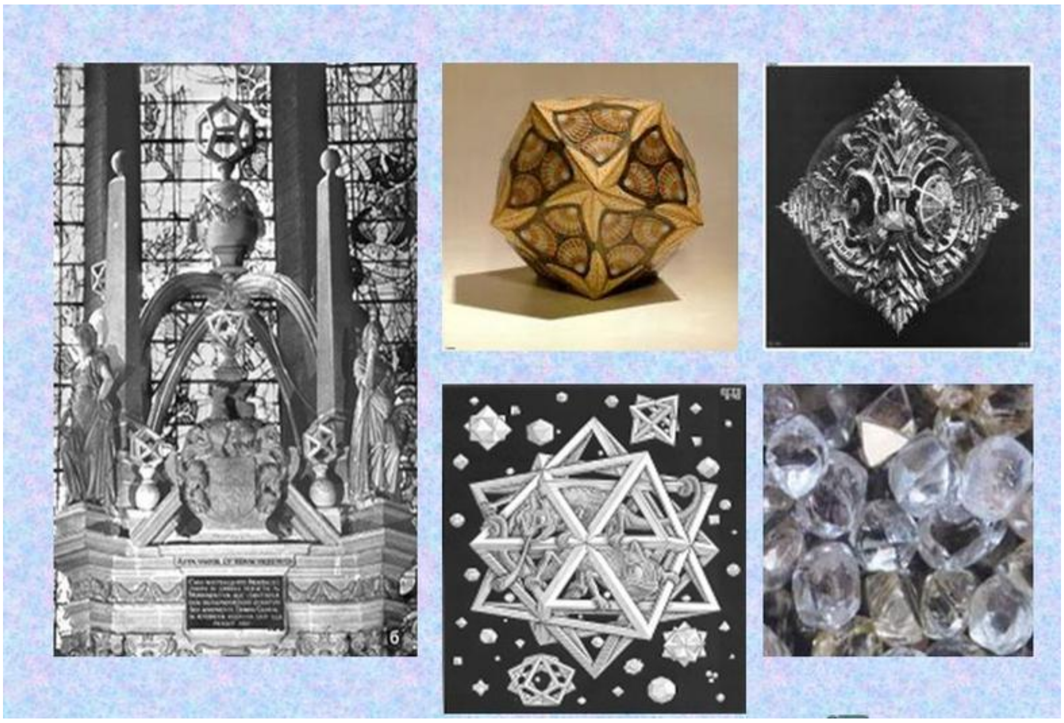


Рисунок И2 - Линии и фигуры

Приложение К

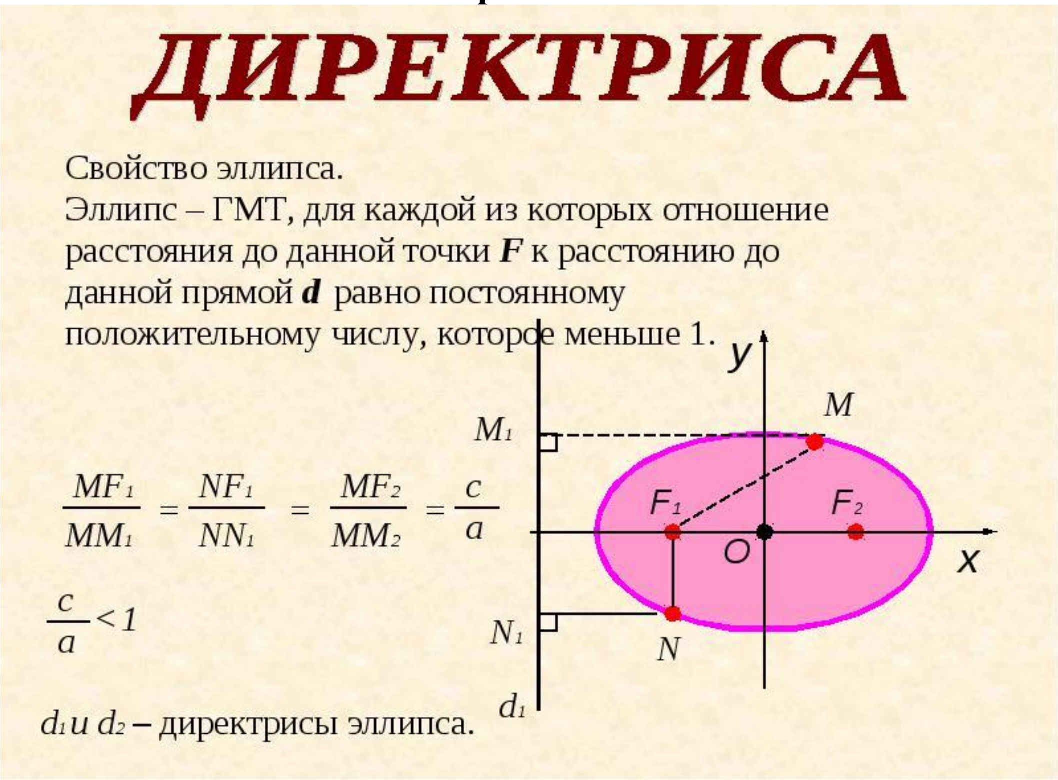


Рисунок К1 - Эллипс

Рисунок К 2 - Парабола в природе

Приложение Л

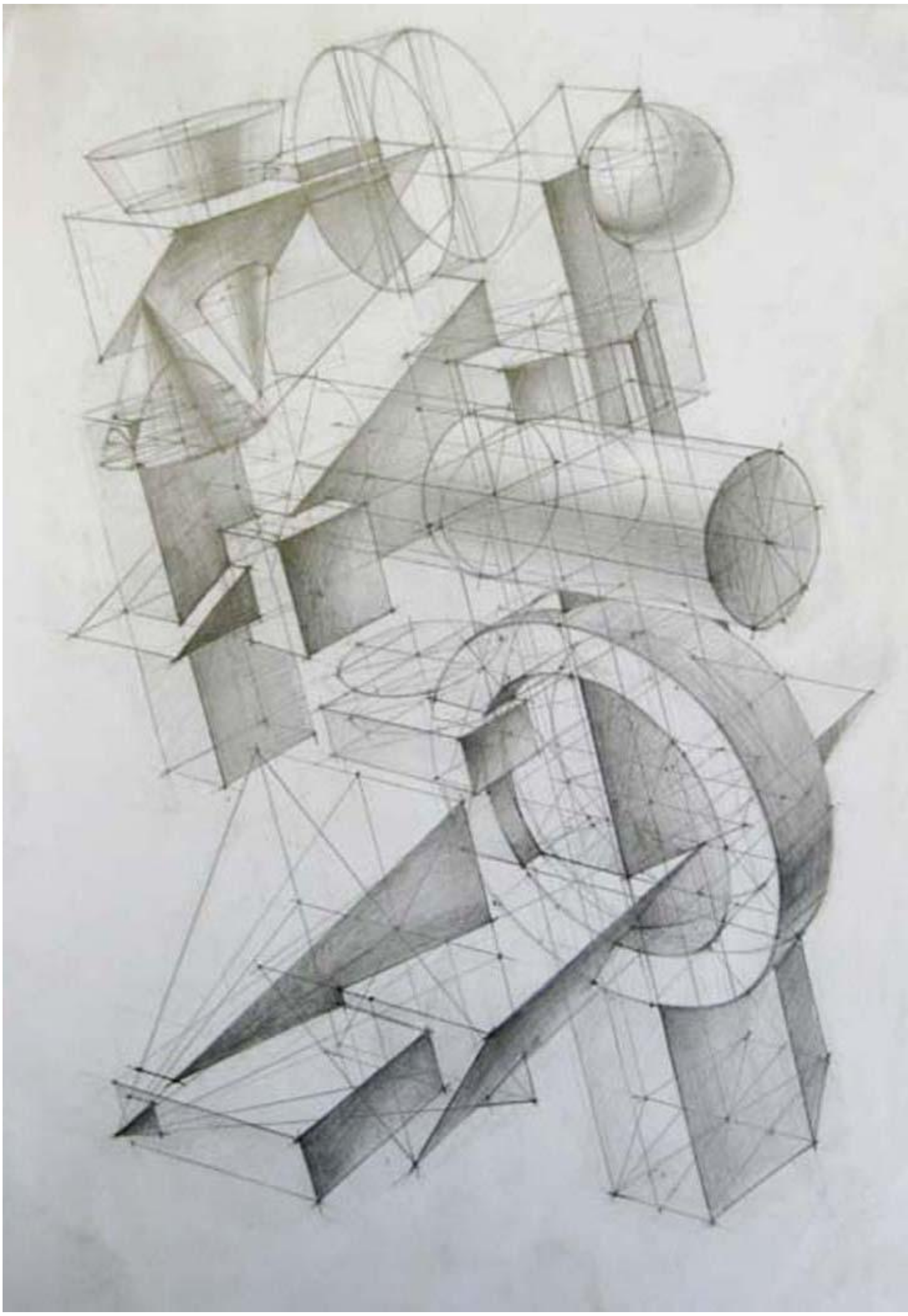


Рисунок Л - Линии в фигурах

Приложение М

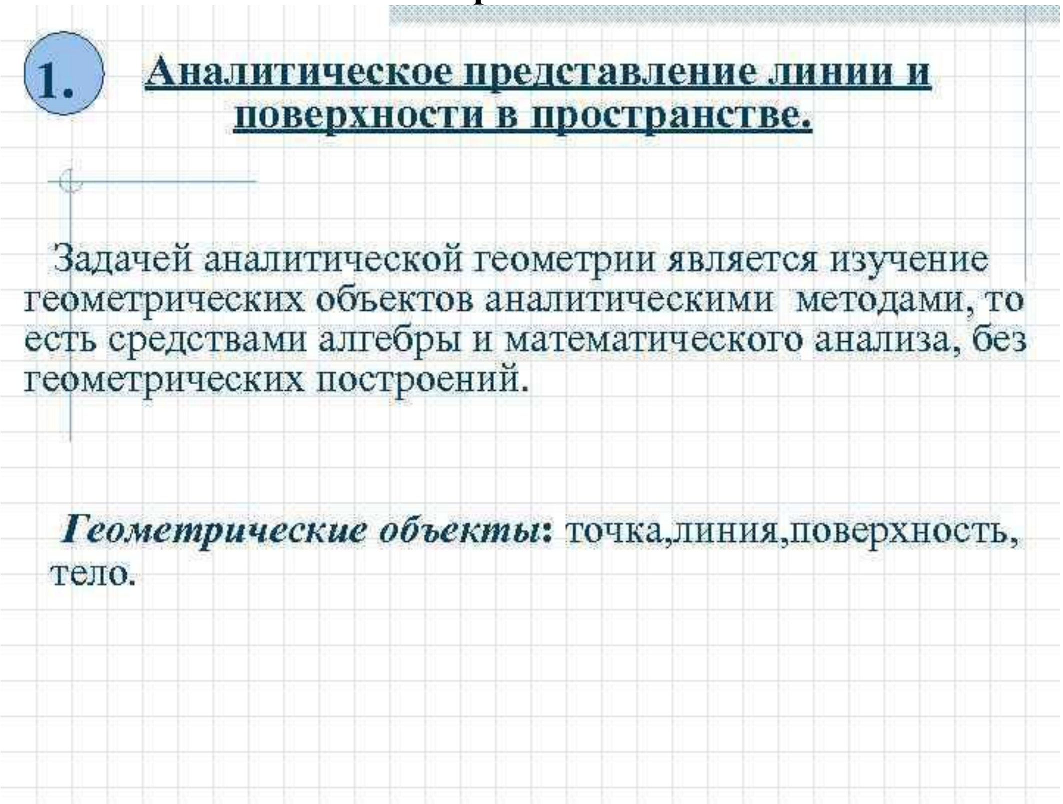


Рисунок М1 - Задачи аналитической геометрии

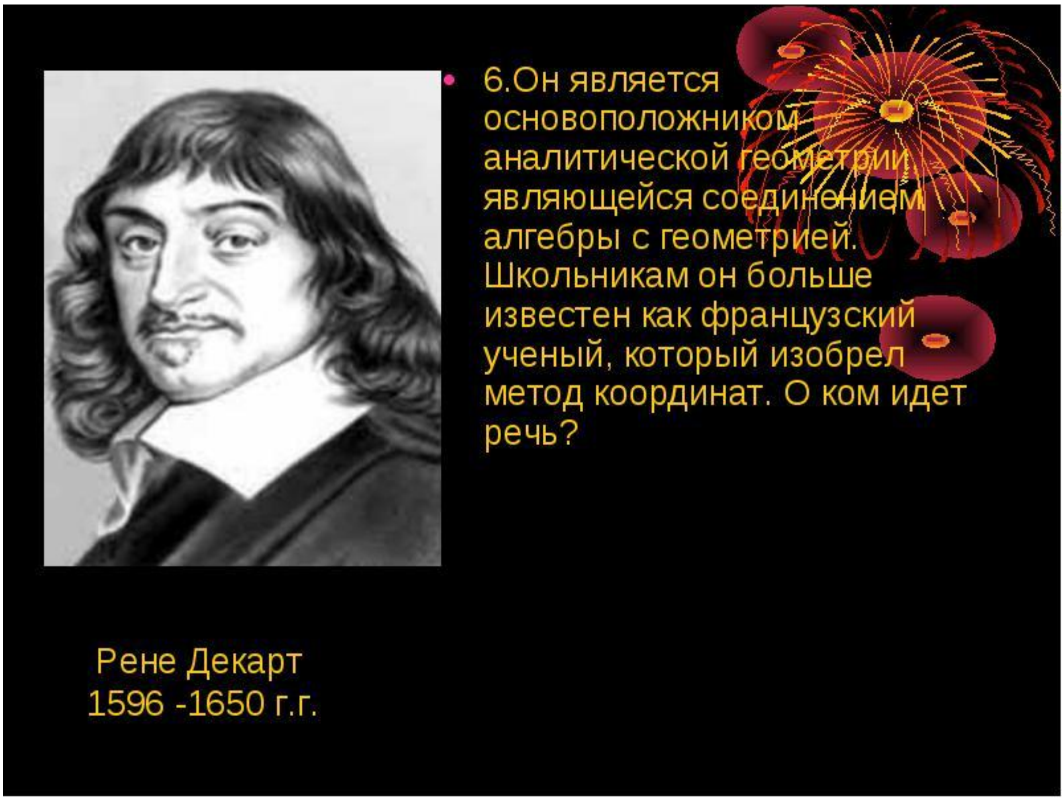


Рисунок М 2 - Рене Декарт

Приложение Н

Рисунок Н1 - Гиперболическая геометрия

Рисунок Н 2 - Геометрия Лобачевского

Приложение П

Рисунок П 1 – Колодец

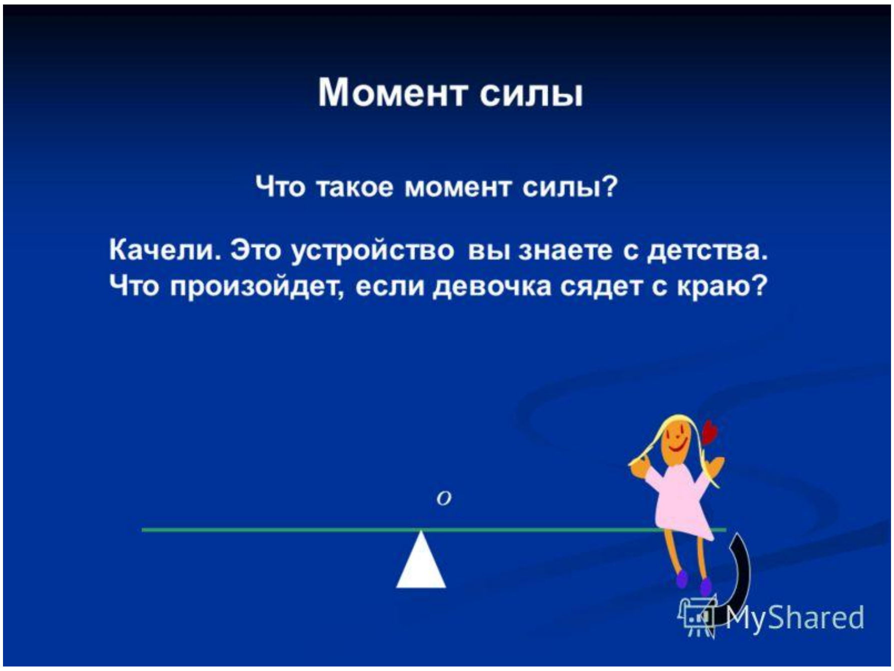


Рисунок П 2 - Качели