МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«Дифференцирование функций»

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПЕРВОГО КУРСА

Братск, 2021

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Методическое пособие содержит краткие теоретические сведения и упражнения по темам «Производная функции», «Правила и формулы дифференцирования», «Дифференциал функции и его приложения», «Геометрический и физический смысл производной», «Приложения производной к исследованию функций и построению графиков», «Приложения производной к решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции» дисциплины «Математика», задачи для самостоятельного решения, вопросы для самоконтроля.

Методическое пособие может быть использовано преподавателями, ведущими дисциплину «Математика», преподавателями специальных дисциплин, в которых используются производная функции и ее приложения.

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«29» января 2021 г. ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2021 г. №_____

Содержание

Введение

Дифференциальное исчисление – раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Формирование дифференциального исчисления связано с именами Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница. Именно они чётко сформировали основные положения и указали на взаимообратный характер дифференцирования и интегрирования. Создание дифференциального исчисления (вместе с интегральным) открыло новую эпоху в развитии математики. С этим связаны такие дисциплины как теория рядов, теория дифференциальных уравнений и многие другие. Методы математического анализа нашли применение во всех разделах математики. Очень распространилась область применения математики в естественных науках и технике.

Дифференциальное исчисление базируется на таких важнейших понятиях математики, определение и исследование которых и составляют предмет введения в математический анализ: действительные числа (числовая прямая), функция, граница, непрерывность. Все эти понятия получили современную трактовку в ходе развития и обоснования дифференциального и интегрального исчислений.

Основная идея дифференциального исчисления состоит в изучении функции в малом. Точнее дифференциальное исчисление дает аппарат для исследования функций, поведение которых в достаточно малой окрестности каждой точки близка к поведению линейной функции или многочлена. Таким аппаратом служат центральные понятия дифференциального исчисления: производная и дифференциал.

Дифференциальное исчисление было создано на основе двух задач:

– о разыскании касательной к произвольной линии (Г. Лейбниц);

– о разыскании скорости при произвольном законе движения (И. Ньютон).

1 Определение производной

1.1 Общие понятия

Пусть дана функция y = f (x). Обозначим x_0 – начальное значение аргумента, x - конечное значение аргумента. Тогда $y_0 = f(x_0)$ - начальное значение функции, y = f(x) –конечное значение функции.

Определение 1. Разность между конечным и начальным значениями аргумента называется приращением аргумента и обозначается Δx; разность между конечным и начальным значениями функции называется приращением функции и обозначается Δy, то есть $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ или $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение показывает, во сколько раз на данном промежутке (x_0; x) приращение функции *y* больше приращения аргумента *x*; иными словами, оно дает среднюю скорость изменения функции *y* относительно аргумента *x*. Чем меньше будет Δx, тем лучше будет отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ описывать относительное поведение функции *y* в непосредственной близости точки x_0.

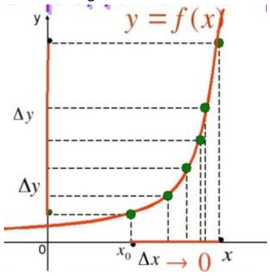


Рисунок 1 - Приращения функции и аргумента

Переходя к пределу при Δx → 0 (при этом в силу непрерывности функции *y* приращение Δy также будет стремиться к нулю) и предполагая, что соответствующий предельный переход имеет смысл, получим величину $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, характеризующую поведение функции в самой точке x_0. Этот предел и носит название производной.

Определение. Производной функции y = f (x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

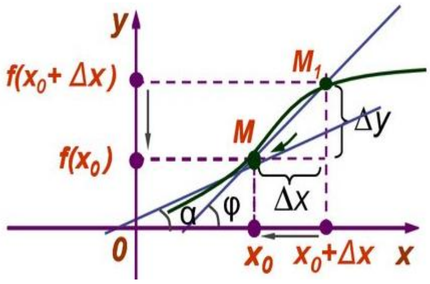


Рисунок 2 - График функции с секущей и касательной

Действие нахождения производной называется *дифференцированием*. Раздел математики, изучающий производные, называется *дифференциальным исчислением*.

1.2 Механический смысл производной

Особенно наглядный смысл получает производная функции y = f (x), если под аргументом понимать время t, а под функцией понимать пройденный путь S (S(t) = f(t)). Тогда отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость движения тела за промежуток времени (t_0; t), а предел этого отношения $S'(\mathrm{t}) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ есть скорость изменения функции S(t) в момент времени t_0, то есть истинная (мгновенная) скорость изменения функции S(t) в момент времени t_0.

1.3 Геометрический смысл производной

Из графика (рисунок 2) видно, что $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$ = tg φ. при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ $\varphi \to \alpha \Rightarrow$ tg $\varphi \to$ tg $\alpha \Rightarrow$ $\mathrm{y}' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = tg α.

Таким образом, tg $\alpha = \mathrm{y}' = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)$, где tg α есть *угловой коэффициент касательной* к кривой y = f (x) в точке x_0.

1.4 Экономический смысл производной

Пусть непрерывная функция y = f (x) описывает, например, зависимость издержек производства (суммарных затрат) y от объема x выпускаемой продукции. Если объем производства увеличится с x_0 до x, т.е на Δx единиц, то издержки производства возрастут на $\Delta y = y - y_0$. Отношение $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$ дает среднее приращение издержек производства при изменении объема производства на Δx единиц с исходного значения в x_0 единиц.

Предел отношения $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$ при условии $\Delta x \to 0$, т. е. $\mathrm{y}' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает нам так называемые предельные издержки производства, которые являются дополнительными затратами на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу Δx.

2 Дифференцирование функций

Дифференцирование – это действие нахождения производной функции (см. пункт 1.1).

2.1 Правила дифференцирования

а) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производная алгебраической суммы функций (правило справедливо для любого конечного числа слагаемых);

б) c'=0 – производная постоянной величины;

в) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная произведения двух функций;

г) $(cu)' = c \cdot u'$ - постоянный множитель выносится за знак производной;

д) $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$ - производная частного функций;

е) $f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$ – производная сложной функции.

2.2 Формулы дифференцирования элементарных функций

1) $x'=1$

2) $(kx+b)'=k$

3) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

6) $(\sin x)' = \cos x$

7) $(\cos x)' = -\sin x$

8) $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10) $(e^x)' = e^x$

11) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

13) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

17) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.3 Дифференцирование элементарных функций

Найдите производные функций:

Пример 1. y= 2.

Решение. y' = 2' = 0 (правило 2).

Пример 2. y = - $\frac{2}{3}$.

Решение. y' = ($-\frac{2}{3}$)' = 0 (правило 2).

Пример 3. y = 2x.

Решение. y' = (2x)' =2x' =2·1 =2 (правило4, правило2).

Пример 4. y= 2x – 3;

Решение. y' = (2x-3)' = (2x)' – 3' = 2 -0 = 2

или по формуле № 2 y' = (2x-3)' = 2.

Пример 5. y = $\frac{3x}{2}$;

Решение. y' = ($\frac{3x}{2}$)' = 3/2 (правило 2, формула 1 или формула 2)

или y' = ($\frac{3x}{2}$)' = $\frac{3x}{2}$ · x' = $\frac{3}{2}$ ·1 = $\frac{3}{2}$.

Пример 6. y = x^2;

Решение. y' = $(x^2)'$ = 2x (формула 3 при n =2).

Пример 7. y = x^3.

Решение. y' = $(x^3)'$ = $3x^2$ (формула 3 при n =3).

Пример 8. y = $\frac{3}{x^2}$.

Решение. y′ = ($\frac{3}{x^2}$)′ = 3 ($\frac{1}{x^2}$)′ = 3· $(x^{-2})'$ =3 · $(-2x)^{-3}$ = - $6x^{-3}$ (формула 3 при n = - 2).

Пример 9. y = $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

Решение. y′ = $(\frac{2}{3\sqrt{x}})'$ = $\frac{2}{3}$ ·$(\frac{1}{\sqrt{x}})'$ = $\frac{2}{3}$ · $(x^{-\frac{1}{2}})'$ = $\frac{2}{3}$ · (- $\frac{1}{2}$) · $x^{-\frac{1}{2}-1}$ = - $\frac{1}{3}$ · $x^{-\frac{3}{2}}$ = - $\frac{1}{3}$ · $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ = - $\frac{1}{3\sqrt{x^3}}$ (формула 3 при n = - 1/2).

Пример 10. y = $\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. y′ = $(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}.)'$ = 4 · $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})'$ = 4 · $(x^{-\frac{1}{3}})'$ = 4 · (- $\frac{1}{3}$) · $x^{-\frac{1}{3}-1}$ =

= - $\frac{4}{3}$ · $x^{-\frac{4}{3}}$ = - $\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}$ (формула 3 при n = - 1/3).

Пример 11. y = $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Решение. y′ = ($\frac{1}{\sqrt{x^3}}$)′ = $(x^{-\frac{3}{2}})'$ = (- $\frac{3}{2}$) · $x^{-\frac{3}{2}-1}$ = - $\frac{3}{2}$ · $x^{-\frac{5}{2}}$ = - $\frac{3}{2}$ · $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$ = - $\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$ (формула 3 при n = - 3/2).

Пример 12. y = $\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}$

Решение. y′ = $(\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}})'$ = 5· $(x^{-\frac{3}{5}})'$ = 5· (- $\frac{3}{5}$) · $x^{-\frac{3}{5}-1}$ = - 3 · $x^{-\frac{7}{2}}$ = - $\frac{3}{\sqrt{x^7}}$ (формула 3 при n = - 3/5).

Пример 13. y = $3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6$.

Решение. $y' = (3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6)' = (3x^7)' + (5x^5)' - (2x^3)' + (4x)' - 6' = 3(x^7)' + 5(x^5)' - 2(x^3)' + 4x' - 0 = 3\cdot 7x^6 + 5\cdot 5x^4 - 2\cdot 3x^2 + 4\cdot 1 = 21x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$.

Пример 14. $y = 2\sin x - 3\cos x + 4\mathrm{tg}x - 5$;

Решение. $y' = (2\sin x)' - (3\cos x)' + (4\mathrm{tg}x)' - 5' = 2\cos x - 3(-\sin x) + \frac{4}{(\cos x)^2} - 0 = 2\cos x + 3\sin x + + \frac{4}{(\cos x)^2}$ (правило1, формулы 6,7,8,правило 2).

Пример 15. $y = 3\sqrt{x} + 2\ln x$;

Решение. $y' = (3\sqrt{x} + 2\ln x)' = (3\sqrt{x})' + (2\ln x)' = 3(\sqrt{x})' + 2(\ln x)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x}$ (правило 1, формулы 4,12).

Пример 16.

1) $f(x) = 5\arcsin x - 3\arccos x$; вычислить $f'(\sqrt{3/2})$;

2) $f(x) = 3\,arctgx - 2\,\mathrm{arcctg}\,x$; вычислить $f'(2)$.

Решение.

1) $f'(x) = (5\arcsin x - 3\arccos x)' = = (5\arcsin x)' - (3\arccos x)' = 5(\arcsin x)' - 3(\arccos x)' = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{1-3/4}} = 16.$$

2) $f'(x) = (3\mathrm{arctg}\,x - 2\mathrm{arcctg}x)' = (3\mathrm{arctg}\,x)' - (2\mathrm{arcctg}x)' = 3(\mathrm{arctg}\,x)' - 2(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{5}{1+x^2}$; $f'(2) = \frac{5}{1+2^2} = 1$.

Пример 17. $y = 3x^{-3} + \log_3 x$.

Решение. $y' = (3x^{-3})' + (\log_3 x)' = 3\cdot(-3)x^{-3-1} + \frac{1}{x\ln x} = -9\cdot x^{-4} + \frac{1}{x\ln x} = -\frac{9}{x^4} + \frac{1}{x\ln x}$.

Пример 18. $y = (3x-4)\cdot(5-x)$;

Решение. $y' = (3x-4)'\cdot(5-x) + (3x-4)\cdot(5-x)' = 3\cdot(5-x) + (3x-4)\cdot(-1) = 15 - 3x - 3x + 4 = 19 - 6x$.

Сначала применили правило 3, затем формулу 2.

Пример 19. $y = e^x\cdot 2^x$.

Решение. $y' = (e^x\cdot 2^x)' = (e^x)'\cdot 2^x + e^x\cdot(2^x)' = e^x\cdot 2^x + e^x\cdot 2^x\cdot\ln 2$ (правило3, формулы 10,11).

Пример 20. $y = x\cdot\arcsin x$

Решение. $y' = x'\cdot\arcsin x + x\cdot(\arcsin x)' = 1\cdot\arcsin x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 21. $y = 4x^3\cdot\sin x$.

Решение. $y' = (y = 4x^3\cdot\sin x)' = (4x^3)'\cdot\sin x + 4x^3\cdot(\sin x)' = 12x^2\cdot\sin x + 4x^3\cdot\cos x = 4x^2(3\sin x + x\cos x)$.

Пример 22. $y = \frac{3x+1}{3-2x}$;

Решение. $y' = \left(\frac{3x+1}{3-2x}\right)' = \frac{(3x+1)'(3-2x)-(3x+1)(3-2x)'}{(3-2x)^2} = \frac{3(3-2x)-(3x+1)(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{9-6x+6x+2}{(3-2x)^2} = \frac{11}{(3-2x)^2}$ (правило 5, формула 2).

Пример 23. $y = \frac{3x^2}{5x-1}$.

Решение. $y' = \left(\frac{3x^2}{5x-1}\right)' = \frac{(3x^2)'(5x-1) - 3x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} = \frac{6x\cdot(5x-1) - 3x^2\cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{30x^2-6x-15x^2}{(5x-1)^2} = \frac{15x^2-6x}{(5x-1)^2}$.

Пример 24. $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; вычислить $f'(-1)$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x-1)'(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=-\frac{2e}{(e^x-1)^2}.$$

$$f'(-1) = -\frac{2e^{-1}}{(e^{-1}-1)^2}=-\frac{2e}{(1-e)^2}.$$

Пример 25. $f(x)=\frac{1-\mathrm{Sin}\,x}{1+\mathrm{Sin}\,x}$; вычислить $f'(\pi/4)$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\cos x\,(1+\sin)-\cos x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2};$$

$$f'(\pi/4)=-\frac{2\cos(\pi/4)}{(1+\sin(\pi/4))^2}=-\frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}/2)^2}=8-6\sqrt{2}.$$

Пример 26. $f(x)=\frac{tgx-1}{tgx}$; вычислить $f'(\pi/3)$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}tgx-\frac{1}{\cos^2 x}(tgx-1)}{tg^2x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(tgx-tg\,x+1)}{tg^2x}=\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$f'(\pi/3)=\frac{1}{\sin^2(\pi/3)}=\frac{4}{3}.$$

Пример 27. $y=\frac{cosx}{e^x}$

$y' = \left(\frac{cosx}{e^x}\right)' = \frac{(cosx)'e^x-(e^x)'cosx}{(e^x)^2} = \frac{-sinx\cdot e^x-e^x\,cosx}{e^{2x}} = \frac{\cdot e^x(-sinx-cosx)}{e^{2x}} = \frac{-sinx-cosx}{e^x} = -\frac{sinx+cosx}{e^x}$.

Пример 28. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

Решение. $y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'\cdot(x^2-1)-(x^2-1)'\cdot\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} =$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)-2x\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} = -\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}.$$

2.4 Дифференцирование сложных функций

Сложная функция имеет вид y = f (u(x)) и дифференцируется по правилу 6: $f'(u(x)) = f'(u)\cdot u'(x)$, где f (u) функция, а u(x) – аргумент функции.

2.4.1 Производная сложной степенной функции $y = (f(x))^n$

Пример 29. $y = (3x-2)^2$.

Решение. Здесь $u(x) = 3x - 2$, $f(u) = u^2$.

$y' = (u^2)' = 2u \cdot u' = 2(3x - 2) \cdot (3x - 2)' = 2(3x - 2) \cdot 3 = 6 \cdot (3x - 2)$.

Пример 30. $y = (5 - 2x)^3$.

Решение. Здесь $u(x) = 5 - 2x$, $f(u) = u^3$.

$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3\cdot (5 - 2x)^2 \cdot (5 - 2x)' = 3\cdot (2x-5)^2 \cdot (-2) = - 6 \cdot (2x-5)^2$.

Пример 31. $y = (\sin x)^3$.

Решение. Здесь $u(x) = \sin x$, $f(u) = u^3$.

$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3 (\sin x)^2 \cdot (\sin x)' = 3 (\sin x)^2 \cdot \cos x$.

Пример 32. $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^4}$.

Решение. В учебниках приводится правило нахождения производной обратной функции: если функция имеет вид $y = \frac{1}{u}$, где u = u(x), то ее производная находится по формуле $y' = -\frac{u'}{u^2}$ (см. пункт 2.4.3).

Тогда

$$y' = -\frac{1}{\left[(x^2-1)^4\right]^2}\left[(x^2-1)^4\right]' = -\frac{1}{(x^2-1)^8}4(x^2-1)^3(x^2-1)' = -\frac{8x}{(x^2-1)^8}x\,4(x^2-1)^3 \bullet 2x =$$

$$= -\frac{8x(x^2-1)^3}{(x^2-1)^8} = -\frac{8x}{(x^2-1)^5}.$$

Второй способ - это сведение исходной функции к виду $y = (f(x))^n$.

Введем отрицательный показатель $y = (x^2-1)^{-4}$.

Тогда $y' = -4(x^2-1)^{-4-1}(x^2-1)' = -4(x^2-1)^{-5} \bullet 2x = -\dfrac{8x}{(x^2-1)^5}$

2.4.2 Дифференцирование функций, содержащих переменную под знаком радикала (корня)

Пример 33. $y = \sqrt{2-x}$.

Решение. Здесь $u(x) = 2 - x$, $f(u) = \sqrt{u}$.

$y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (2 - x)' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$.

Пример 34. $y = \sqrt[3]{3x^2+2}$.

Решение.

Здесь целесообразно привести исходную функцию к виду $y = (f(x))^n$, а затем продифференцировать.

$y = (3x^2+2)^{\frac{1}{3}}$. Здесь $u(x) = 3x^2 + 2$, $f(u) = u^{\frac{1}{3}}$.

$y' = (u^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' = \frac{1}{3} \cdot u^{\frac{-2}{3}} \cdot u'$.

$y' = ((3x^2 + 2)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot (3x^2 + 2)^{\frac{-2}{3}} \cdot (3x^2 + 2)' = \frac{1}{3} \cdot (3x^2 + 2)^{\frac{-2}{3}} \cdot 6x = \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+2)^2}}$.

Пример 35. $y = \frac{3}{\sqrt[5]{(2x^2+1)^2}}$.

Решение. $y' = \left(\frac{3}{\sqrt[5]{(2x^2+1)^2}}\right)' = 3 \cdot ((2x^2 + 1)^{-\frac{2}{5}})' = 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)(2x^2 + 1)^{\frac{-2}{5}-1} \cdot (2x^2 + 1)' = -\frac{6}{5}(2x^2 + 1)^{\frac{-7}{5}} \cdot 4x = -\frac{24x}{5\sqrt[5]{(2x^2+1)^7}}$.

2.4.3 Дифференцирование обратной функции

Пример 36. $y = \frac{4}{2x-3}$.

Решение. Производную находим по формуле $y' = -\frac{u'}{u^2}$.

Здесь $u = 2x - 3$.

Имеем $y' = -\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} = -\frac{2}{(2x-3)^2}$.

Пример 37. $y = \frac{1}{lnx}$.

Решение. $y' = -\frac{(\ln x)'}{(lnx)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{ln^2 x} = -\frac{1}{x ln^2 x}$.

2.4.4 Дифференцирование показательной функции

Пример 38. $y = e^{3x}$.

Решение.

Здесь $u(x) = 3x$, $f(u) = e^u$.

$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.

Пример 39. $y = e^{-2x}$.

Решение.

Здесь $u(x) = -2x$, $f(u) = e^u$.

$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{-2x} \cdot (-2x)' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{3x}$.

Пример 40. $y = e^{\frac{x}{5}}$.

Решение.

Здесь $u(x) = \frac{x}{5}$, $f(u) = e^u$.

$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\frac{x}{5}} \,' \left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{5} e^{\frac{x}{5}}$.

Вывод: $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

Пример 41. $y = e^{\sin x}$.

Решение. Здесь $u = \sin x$, тогда $y' = (e^u)' = e^u \cdot u'$.

Имеем $y' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$.

Пример 42. $y = 3^{2x^2}$.

Решение. Здесь $u = 3x^2$, тогда $y' = (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

$y' = 3^{2x^2}\ln 3 \bullet (2x^2)' = 3^{2x^2}\ln 3 \bullet 4x = 4x \bullet 3^{2x^2}\ln 3$.

2.4.5 Дифференцирование логарифмической функции

Пример 43. y = ln cosx.

Решение.

Здесь u(x) = cosx, f (u) = ln u.

$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$

Пример 44. $y = \ln\sqrt{x^2-3}$.

Решение.

Используя свойство логарифмов $\log_a x^n = n \log_a x$ можно записать

$y = \ln\sqrt{x^2-3} = ½ \ln(x^2-3)$,

тогда

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-3)'}{x^2-3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2-3} = \frac{x}{x^2-3}.$

Пример 45. $y = \ln\frac{3x+1}{3x-1}$.

Первый способ: $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\frac{3x+1}{3x-1}} \cdot \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)' =$

$= \frac{3x-1}{3x+1} \cdot \frac{(3x+1)'(3x-1)-(3x+1)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{3x-1}{3x+1}\,\frac{3(3x-1)-(3x+1)3}{(3x-1)^2} = \frac{3x-1}{3x+1} \cdot \frac{9x-3-9x-3}{(3x-1)^2} =$

$= \frac{3x-1}{3x+1} \cdot \frac{-6}{(3x-1)^2} = -\frac{6}{(3x+1)(3x-1)} = -\frac{6}{9x^2-1}.$

Второй способ: используем свойство логарифмов

$\log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$

$y' = \left(\log_a\frac{3x+1}{3x-1}\right)' = (\log_a(3x+1))' - (\log_a(3x-1))' = \frac{(3x+1)'}{3x+1} - \frac{(3x-1)'}{3x-1} = \frac{3}{3x+1} -$

$\frac{3}{3x-1} = \frac{3(3x-1)-3(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)} = -\frac{6}{9x^2-1}.$

2.4.6 Дифференцирование тригонометрических функций

Пример 46. y = sin 2x.

Решение. Здесь u = 2x. Тогда $y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = u' \cdot \cos u$.

Имеем $y' = (\sin 2x)' = (2x)' \cdot \cos 2x = 2\cos 2x$.

Пример 47. y = cos3x.

Решение. Здесь u = 2x. Тогда $y' = (\cos u)' = -\sin u \cdot u' = -u' \cdot \sin u$.

Имеем $y' = (\cos 2x)' = -(2x)' \cdot \sin 2x = -2\sin 2x$.

Пример 48. $y = \sin\frac{x}{2}$.

Решение. Здесь $u = \frac{x}{2}$. Тогда $y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = u' \cdot \cos u$.

Имеем $y' = (\sin\frac{x}{2})' = (\frac{x}{2})' \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Пример 49. $y = \cos\frac{x}{3}$.

Решение. Имеем $y' = (\cos\frac{x}{3})' = -(\frac{x}{3})' \cdot \sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$.

Вывод: $(\sin kx)' = (kx)' \cdot \cos kx = k\cos kx$;

$(\cos kx)' = -(kx)' \cdot \sin kx = -k\sin kx$.

Пример 50. y = sin (2x -10).

Решение. Имеем $y' = (\sin(2x-10))' = (2x-10)' \cdot \cos(2x-10) = 2\cos(2x-10)$.

Пример 51. $y = \cos(3x+4)$.

Решение. Имеем $y' = (\cos(3x-4))' = -(3x-4)' \cdot \sin(3x-4) = -3\sin(3x-4)$.

Вывод: $(\sin(kx+b))' = (kx+b)' \cdot \cos(kx+b) = k\cos(kx+b)$;

$(\cos(kx+b))' = -(kx+b))' \cdot \sin(kx+b) = -k\sin(kx+b)$.

Пример 52. $y = \sin 4x^3$.

Решение. Здесь $u = 4x^3$.

Имеем $y' = (\sin 4x^3)' = (4x^3)' \cdot \cos 4x^3 = 12x^2 \cos 4x^3$.

Пример 53. $y = tg\,(4-2x)$.

Решение.

Имеем $y' = (tg\,(4-2x))' = (4-2x)' \cdot \frac{1}{cos^2(4-2x)} = -\frac{2}{cos^2(4-2x)}$.

Пример 54. $y = ctg\,\frac{5}{\sqrt{x}}$.

Имеем $y' = (ctg\,\frac{5}{\sqrt{x}})' = -(\frac{5}{\sqrt{x}})' \cdot \frac{1}{sin^2\frac{5}{\sqrt{x}}} = -(-\frac{5}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{sin^2\frac{5}{\sqrt{x}}} = \frac{5}{2\sqrt{x^3}sin^2\frac{5}{\sqrt{x}}}$.

2.4.7 Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Пример 55.

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos\sqrt{2x}$; 3) $y = arcctg\,3x$.

Решение.

1) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \bullet 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2)
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(\sqrt{2x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \bullet \frac{1}{2\sqrt{2x}} \bullet 2 = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

3) $$y' = -\frac{1}{1+(3x)^2} \bullet (3x)' = -\frac{1}{1+9x^2} \bullet 3 = -\frac{3}{1+9x^2}.$$

2.4.8 Производные высших порядков

*Определение 2***.** Производной второго порядка (второй производной) называется производная от производной и обозначается $y''(x)$:

$y''(x) = (y'(x))'$.

Пример 56. Найти производные второго порядка функций: а) $y = e^{3x}$;

б) $y = \cos 2x$.

Решение.

а) $y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$,

$y'' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x} \cdot 3 = 9e^{3x}$;

б) $y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$,

$y'' = (-2\sin 2x)' = -2\cos 2x \cdot (2x)' = -2\cos 2x \cdot 2 = -4\cos 2x$.

Аналогично формулируются понятия производных высших порядков (третьего, четвертого и так далее). Обозначения содержат столько символов $'$, каков порядок производной.

2.5 Вопросы для самоконтроля по главе 2

1. Дайте определение производной функции.
2. Какое действие называется дифференцированием?
3. В чем заключается суть производной?
4. Укажите физический смысл производной.
5. Запишите правило дифференцирования алгебраической суммы функций.
6. Запишите правило дифференцирования произведения двух функций.
7. Запишите правило дифференцирования частного (деления) функций.
8. Докажите правило $(cu)' = c \cdot u'$.
9. В каких случаях и для чего применяют правила Лопиталя?
10. Как найти производную второго, третьего порядков?
11. Что называется дифференциалом функции?
12. Запишите формулу для нахождения дифференциала.
13. Как найти дифференциалы второго ; третьего, высшего порядков?

2.6 Задания для самостоятельного решения по главе 2

Задание 1. Найдите производные функций, указанных на рисунке 3.

1) $f(x)=3x^2+\frac{7}{x^4}+2\sqrt{x}+\frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}+10x-1$

2) $f(x)=x\sqrt{x}+2x^7+\frac{3}{x^8}-\frac{9}{\sqrt[10]{x^3}}+5$

3) $f(x)=(x+8)(x^5-4x)$

4) $f(x)=(x^2-3x+7)(3x^2+x-9)$

5) $f(x)=\frac{1-x^3}{1+x^3}$

6) $f(x)=\frac{2x^2+4}{x-1}$

7) $f(x)=(3x-7)^4$

8) $f(x)=\frac{-6}{(3-2x)^2}$

9) $f(x)=\sqrt[6]{2x-1}$

10) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{4x-1}}$

11) $f(x)=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$

12) $f(x)=\sin 6x$

13) $f(x)=-2\tan(2x+5)$

14) $f(x)=3\sin(x-\pi)$

15) $f(x)=2^{3x-4}$

16) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}$

17) $f(x)=e^{4x+7}$

18) $f(x)=\ln 4x$

19) $f(x)=\log_5(3x-4)$

20) $f(x)=3\arccos(4+3x)$

21) $f(x)=\frac{1}{2}\arctan 5x$

22) $f(x)=2\arcsin(3x-1)$

23) $f(x)=(6x-1)\tan(2x-1)$

24) $f(x)=e^{4x}(3x-1)^5$

25) $f(x)=3^x\log_{0,5}(6x-1)$

26) $f(x)=\cos x\ln(5x+6)$

Рисунок 3 – Примеры к заданию 1

Задание 2. Выполните упражнения, представленные на рисунке 4.

Производная.
Техника дифференцирования

Вариант I

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - 0{,}5x^2 - 3x + 2,$$

вычислите ее значение при $x = -1$.

а) $-2{,}5$; б) $1{,}5$; в) $-1{,}5$; г) $2{,}5$.

2. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{x}$.

а) $\frac{3}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}}{3}$; в) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$; г) $1{,}5\sqrt{x}$.

3. Найдите производную функции

$$g(x) = \frac{3 + 2x}{x - 5}.$$

а) $-\frac{13}{(x-5)^2}$; б) $\frac{8}{(x-5)^2}$; в) $\frac{-5}{(x-5)^2}$; г) $\frac{1-x}{(x-5)^2}$.

4. Найдите значение $f'(0{,}5)$, если

$$f(x) = \frac{3}{5 - 4x}.$$

а) 3; б) $\frac{4}{9}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) 2.

5. Для функции $f(x) = 3\sin^2 x$ вычислите

$$f'(-\tfrac{\pi}{4}).$$

а) 6; б) -3; в) $-1{,}5$; г) $0{,}5$.

6. $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$.

а) 15; б) $7{,}5$; в) $2{,}75$; г) $0{,}5$.

7. $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$. Решите уравнение

$$f'(x) = 0.$$

а) $0; 2$; в) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{2}$; г) $-2; 2$.

8. $g(x) = (x - 3)(x + 2)^2$. Решите неравенство

$$g'(x) < 0.$$

а) $\left(-1\frac{1}{3}; 2\right)$; в) $(-2; 3)$;

б) $\left(-2;\ 1\frac{1}{3}\right)$; г) $(-0{,}5; 1)$.

9. При каких значениях x функция $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$ не дифференцируема?

а) 1; б) 0; в) $-1; 1$; г) $\varnothing$.

10. $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = 3x - 2$, $f(x) = u(v(x))$.
Решите уравнение

$$f'(x) = 0{,}375.$$

а) 12; б) $8{,}5$; в) $2{,}5$; г) 6.

Рисунок 4 – Примеры к упражнению 2

Задание 3. Найдите производные сложных функций, представленных на рисунке 5, и проверьте ответы.

$$f(x) = \cos 3x$$

$$f(x) = \sin(2x - \pi)$$

$$f(x) = tg\frac{x}{2}$$

$$f(x) = (3 - 4x)^6$$

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$f(x) = ctg\frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$$

$$y' = -3\sin 3x$$

$$y' = 2\cos(2x - \pi)$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$y' = -24(3 - 4x)^5$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sin^2\frac{1}{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Рисунок 5 – Примеры и ответы к упражнению 3

3 Дифференциал функции

Дифференциа́л (от лат. differentia «разность, различие») – линейная часть приращения функции.

Понятие дифференциала функции связано с такими важными математическими разделами как дифференциальное и интегральное исчисление и тесно связано с понятием производной функции. Наиболее часто дифференциал применяется для приближенных вычислений, а также для оценки погрешностей формул и измерений.

3.1 Определение дифференциала

Дифференциал функции – это линейная часть приращения функции. Говоря о значении дифференциала функции, рассматривают конкретную точку функции и бесконечно малое изменение аргумента.

Пусть x_o есть некоторая точка из области определения функции f(x), а Δx - есть бесконечно малая величина. Тогда дифференциал функции находится как произведение значения производной функции и приращения её аргумента. Дифференциал функции f(x) обозначается как df(x) или dy.

Чаще всего открытие дифференциально-интегрального исчисления принято связывать с именем Исаака Ньютона, однако, этот факт активно оспаривают учёные со всего света.

Действительно, открытие целого нового направления в науке, столь значимого для её развития, было бы ошибочно считать заслугой только одного учёного. Изначально интегрирование связывали с вычислением площадей и объёмов криволинейных фигур. Такие задачи, как известно, решались ещё во времена **Архимеда**, поэтому его имя также имеет отношение к открытию дифференциального исчисления.

Также дифференцирование имеет отношение к решению задач на проведение касательных к различным кривым. Данное направление активно развивали греческие математики. В те времена математики столкнулись с трудностью, которую не смогли решить в дальнейшем и представители Нового времени.

Дело в том, что для определения направления прямой требовалось знать координаты как минимум двух точек, а касательная имеет лишь одну точку соприкосновения с кривой. Этот факт натолкнул учёных на мысль о том, что в одной точке кривая может иметь несколько касательных. В то время ученые пришли к выводу, что прямая состоит не из точек, а из отрезков минимальной длины. Таким образом, они считали направление касательной в некоторой точке совпадающим с направлением атомарного отрезка в данной точке.

В дальнейшем учёные Нового времени опровергли данную теорию. В этот период огромный вклад в развитие науки внёс Исаак Ньютон. Ученый сформулировал определения и принципы решения производных, а также основы дифференциального исчисления, которых придерживаются учёные и в наши дни.

3.2 Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала заключается в следующем: дифференциал функции f(x) равен приращению ординаты касательной к графику функции, которая проведена через некоторую точку с координатами **(x,y)** при изменении координаты x на величину $\Delta x = dx$.

Дифференциал является главной линейной частью функции относительно приращения аргумента. Чем меньше приращение функции, тем большая доля приращения приходится на эту линейную часть.

Таким образом, при бесконечно малом **Δx**, приращение функции можно считать равным ее дифференциалу. Это свойство дифференциала позволяет использовать его для приблизительных вычислений и оценки погрешностей измерений.

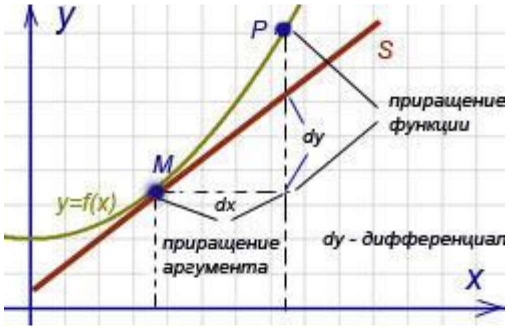


Рисунок 6 – Геометрическое истолкование дифференциала

Дифференциал функции находится по формуле

$$dy = y'\ dx \tag{2}$$

или

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \tag{3}$$

3.3 Связь производной и дифференциала

Коэффициент *к* в первом слагаемом выражения приращения функции равен величине ее производной f '(x). Таким образом, имеет место следующее соотношение - $dy = f'(x)\Delta x$, или же $df(x) = f'(x)\Delta x$. Известно, что приращение независимого аргумента равно его дифференциалу $\Delta x = dx$. Соответственно, можно написать: $f'(x)\, dx = dy$. Нахождение (иногда говорят, «решение») дифференциалов выполняется по тем же правилам, что и для производных.

1.$dc = 0$,где c – постоянная величина.

2.$dx = \Delta x$, где x – независимый аргумент.

3.$d(cu) = c\, du$

4/ $d(u \pm v) = du \pm dv$

5.$d(uv) = udv + vdu$

6.$d(\frac{u}{v}) = \frac{udv - vdu}{v^2}$, $v \neq 0$.

7. df(u) = f′(u) du.

Примеры нахождения дифференциала функции приведены на рисунках 7 – 11.

Пример 57.

1. $y = 2x^2 + 3.$

$$dy = y'dx = (2x^2+3)'dx = 4xdx.$$

2. $y = 3x\sin x + 4.$

$$dy = y'\,dx = (3x\sin x + 4)'dx = (3x\sin x)'dx$$
$$= 3dx(\sin x) + \sin x\, d(3x)$$
$$= 3x\cos x\, dx + \sin x\, 3dx = 3x\cos x\, dx + 3\sin x\, dx.$$

Рисунок 7 – Решение примера 57

Пример 58. y = sinx, y= x^2, y = lnx, y = e^x, y = (x/5) – 27, y=arcsinx.

Решение.

$$d(\sin x) = (\sin x)dx = \cos x\, dx \qquad d(x^2) = 2xdx$$

$$d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \qquad d\left(\frac{x}{5}-27\right) = \left(\frac{x}{5}-27\right)'dx = \left(\frac{1}{5}x-27\right)'dx = \frac{1}{5}dx$$

$$d(e^x) = (e^x)'dx = e^x dx$$

$$d(\arcsin x) = (\arcsin x)'dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Рисунок 8 – Решение примера 58

Пример 59. y = x^3.

Решение.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$$

Рисунок 9 – Решение примера 59

Пример 60.

$$F = \frac{4}{r^2}$$

$$F' = \frac{-8}{r^3} \Rightarrow dF = \frac{-8}{r^3}dr$$

Рисунок10 – Решение примера 60

Пример 61.

$$y = e^{3x}.$$

$$dy = \left(e^{3x}\right)' dx \Rightarrow dy = 3e^{3x}\, dx.$$

Рисунок 11 – Решение примера 61

Нахождение дифференциала сложной функции проводится аналогично: находится производная данной сложной функции и умножается на дифференциал x (dx) (смотрите рисунок 12).

1. $d\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n du\,, \quad xdx = \dfrac{1}{2}dx^2$	7. $d(tgu) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$
2. $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$	8. $d(ctgu) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$
3. $d(e^u) = e^u du$	9. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4. $d\left(\dfrac{a^u}{\ln a}\right) = a^u du$	10. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
5. $d(\sin u) = \cos u du$	11. $d(arctgu) = \dfrac{du}{1+u^2}$
6. $d(\cos u) = -\sin u du$	12. $d(arcctgu) = -\dfrac{du}{1+u^2}$

Рисунок 12 –Правила нахождения дифференциала сложной функции

Аналогично формулируются понятия дифференциалов высших порядков (второго, третьего, четвертого и так далее). Например, обозначение дифференциала третьего порядка имеет вид $d^3y = dx^3$.

3.4 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y=f'(x)\bullet\Delta x+\alpha\bullet\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y=dy+\alpha\bullet\Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha\bullet\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (3) широко применяется в вычислительной практике. Что такое дифференциал с точки зрения современной математики? Он тесно связан с понятием приращения переменной величины. Если переменная y принимает сначала значение $y = y_1$, а затем $y = y_2$, то разность $y_2 - y_1$ называется приращением величины y.

Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Слово «*приращение*» обозначается Δ, запись Δy (читается «*дельта игрек*») обозначает приращение величины y. так что $\Delta y = y_2 - y_1$.

Если величину Δy произвольной функции y = f (x) возможно представить в виде Δy = к Δx + α, где у к нет зависимости от Δx, т. е. к = const при данном x, а слагаемое α при Δx→0 стремится к нему же еще быстрее, чем само Δx, тогда первый («*главный*») член, пропорциональный Δx, и является для y = f (x) дифференциалом, обозначаемым dy или df(x) (читается «*дэ игрек*», «*дэ эф от икс*»). Поэтому дифференциалы – это «*главные*» линейные относительно Δx составляющие приращений функций. Поскольку дифференциал функции является частью ее приращения, то при бесконечно малом приращении аргумента он приблизительно равен приращению функции. При этом чем меньше приращение аргумента, тем точнее значение функции. Этот факт даёт возможность использования дифференциалов для приближённых вычислений (рисунок 13).

С помощью таких вычислений можно решать различные виды задач. Приближённые вычисления практически всегда связаны с наличием погрешности. Результаты измерений в большинстве случаев содержат ошибку, обусловленную неточностью измерительных приборов.

$$f(x) \approx f(x_0) + y'dx$$

или

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$$

Рисунок 13 – Формулы для нахождения приближенного значения функции

Пример 62.

Пример. Вычислить приближенно $2{,}01^{3,02}$.

Решение. Введем функцию $z = x^y$, тогда требуется найти $z(2{,}01;\, 3{,}02)$.

е. $x + \Delta x = 2{,}01, \quad y + \Delta y = 3{,}02, \quad x = 2, \quad \Delta x = 0{,}01, \quad y = 3,\, .\ \Delta y = 0{,}2$

Находим частные производные $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$. Далее вычисляем

$$z(2;3) = 2^3 = 8, \quad z'_x(2;3) = 3 \cdot 2^{3-1} = 12, \quad z'_y = 2^3 \cdot \ln 2 = 8 \cdot 0{,}69 = 5{,}52$$

Подставив найденные значения в формулу (*), получим:

$$2{,}01^{3,02} \approx 8 + 12 \cdot 0{,}01 + 5{,}52 \cdot 0{,}02 \approx 8 + 0{,}12 + 0{,}11 \approx 8{,}23$$

Рисунок 14 – Решение примера 62

Пример 63.

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{1{,}0003}$ с помощью дифференциала.

Для этого используем функцию $y = \sqrt{x}$. Найдем значение этой функции при $x = 1{,}0003$. Ближайшее к нему значение, для которого точно известно значение функции – это $x_0 = 1$, значение функции $y_0 = \sqrt{1} = 1$.

Найдем производную функции, чтобы применить приближенную формулу.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ значение производной } y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

В результате $\sqrt{1{,}0003} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(1{,}0003 - 1) = 1 + \frac{0{,}0003}{2} = 1{,}00015$.

Рисунок 15 – Решение примера 63

Пример 64.

10. С помощью дифференциала функции вычислить приближенно $\sqrt{49,49}$.

Решение. Используем формулу:

$y(x) \approx y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$.

Положим: $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 49$, $x = 49,49$.

Найдем $y(x_0) = \sqrt{49} = 7$, $y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(x_0) = \dfrac{1}{14}$.

Подставляем:

$\sqrt{49,49} \approx \dfrac{1}{14}(49,49 - 49) + 7 = 7,035$.

Рисунок 16 – Решение примера 64

Пример 65.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y = \sqrt{4x - 3},\ x = 1{,}78$

Решение

Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Выберем:

$x_0 = 1{,}75$

Тогда:

$\Delta x = 0{,}03$

Вычисляем:

$$y(1{,}75) = \sqrt{4 \cdot 1{,}75 - 3} = 2$$

$$y' = \left(\sqrt{4x - 3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x - 3}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$$

$$y'(1{,}75) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 1{,}75 - 3}} = \frac{2}{2} = 1$$

Получаем:

$$y(1{,}78) \approx y(1{,}75) + y'(1{,}75) \cdot 0{,}03 = 2 + 1 \cdot 0{,}03 = 2{,}03$$

Рисунок 17 – Решение примера 65

Пример 66.

Пример 4. Найти приближенное значение $\sin 46^0$.

Решение

$$1) f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x.$$

$$2) x + \Delta x = 46^0 \quad \Rightarrow \quad x = 45^0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180}.$$

$$3) \sin 46^0 = \sin(45^0 + 1^0) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx$$

$$\approx \sin\frac{\pi}{4} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}7194.$$

Рисунок 18 – Решение примера 66

Пример 67.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y = x^5,\ x = 2{,}997$

Решение

Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Выберем:

$x_0 = 3$

Тогда:

$\Delta x = -0{,}003$

Вычисляем:

$$y(3) = 3^5 = 243$$
$$y' = \left(x^5\right)' = 5x^4$$
$$y'(3) = 5 \cdot 3^4 = 405$$

Получаем:

$$y(2{,}997) \approx y(3) + y'(3) \cdot (-0{,}003) = 243 - 405 \cdot 0{,}003 =$$
$$= 243 - 1{,}215 = 241{,}785$$

Рисунок 19 – Решение примера 67

Пример 68.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x = 4{,}16$$

Решение

Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Выберем:

$$x_0 = 4$$

Тогда:

$$\Delta x = 0{,}16$$

Вычисляем:

$$y(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$
$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$
$$y'(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$

Получаем:

$$y(4{,}16) \approx y(4) + y'(4) \cdot 0{,}16 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \cdot 0{,}16 = 0{,}49$$

Рисунок 20 – Решение примера 68

Пример 69.

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[4]{16{,}06}$

Решение:
Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).

$$dy = y'dx \quad \text{или} \quad df(x) = f'(x)dx$$

Дифференциал функции $y = \sqrt[4]{x}$

$$dy = \left(\sqrt[4]{x}\right)' dx = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}dx = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}dx$$

Введем в рассмотрение функцию $y = \sqrt[4]{x}$ где $x = x_0 + \Delta x$

$x_0 = 16 = 2^4 \qquad \Delta x = 0{,}06$

Воспользуемся формулой для приближенных вычислений

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

Получим:

$x = 2^4 + 0{,}06$

$y(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$

Производная y'

$$y' = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$y'(16) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2^4\right)^3}} = \frac{1}{4 \cdot 2^3} = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$$

Вычисляем

$$\sqrt[4]{16{,}06} = 2 + \frac{1}{32} \cdot 0{,}06 = 2 + 0{,}001875 = 2{,}001875$$

Рисунок 21 – Решение примера 69

Пример 70.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y = \arcsin x, \ x = 0,08$

Решение

Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Выберем:

$x_0 = 0$

Тогда:

$\Delta x = 0{,}08$

Вычисляем:

$$y(0) = \arcsin 0 = 0$$
$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

Получаем:

$$y(0{,}08) \approx y(0) + y'(0) \cdot 0{,}08 = 0 + 1 \cdot 0{,}08 = 0{,}08$$

Рисунок 22 – Решение примера 70

Пример 71.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $0{,}99^4$

Введем в рассмотрение функцию $y = x^4$, где $x = x_0 + \Delta x$

$x_0 = 1 \qquad \Delta x = -0{,}01$

Воспользуемся формулой $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$

Получим:

$y(x_0) = 1^4 = 1$

$y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$

$y'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4$

Вычисляем

$0{,}99^4 = 1 + 4 \cdot (-0{,}01) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Относительная погрешность определяется по формуле

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$$

Точное значение $0{,}99^4 = 0{,}960596$

где $\Delta = |\Delta y - dy| = |0{,}96 - 0{,}960596| = 0{,}000596$

$\delta = \left|\dfrac{0{,}000596}{0{,}96}\right| \cdot 100\% \approx 0{,}0621\%$

Ответ: $0{,}99^4 = 0{,}96$

Рисунок 23 – Решение примера 71

Пример 72.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y = \sqrt{x^3},\ x = 0{,}98$

Решение

Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Выберем:

$x_0 = 1$

Тогда:

$\Delta x = -0{,}02$

Вычисляем:

$$y(1) = \sqrt{1^3} = 1$$
$$y' = \left(\sqrt{x^3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$y'(1) = \frac{3\sqrt{1}}{2} = \frac{3}{2}$$

Получаем:

$$y(0{,}98) \approx y(1) + y'(1) \cdot (-0{,}02) = 1 - \frac{3}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}97$$

Рисунок 24 – Решение примера 72

Пример 73.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{x^2+5}$ в точке x=1,97.

Решение:

Ближайшая к 1,97 точка, где легко вычислить значение функции и ее производной это2.

Вычисляем:

$$\Delta x = x - a = 1{,}97 - 2 = -0{,}03$$
$$f(a) = f(2) = 3$$
$$f^1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$
$$f^1(a) = f^1(2) = \frac{2}{3}$$

Далее по формуле $f(x) = f(a+\Delta x) \approx f(a) + f^1(a)\Delta x$ получаем:

$$f(1{,}97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0{,}03) = 2{,}98$$

Рисунок 25 – Решение примера 73

Пример 74.

Вычислить приближенно $\sqrt[5]{0{,}98}$.
Решение.

$$f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}} \qquad f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$\sqrt[5]{0,98}=\sqrt[5]{1-0,02}, \qquad x=1, \qquad \Delta x=-0,02$$

$$\sqrt[5]{0,98}\approx\sqrt[5]{1}+\frac{1}{5\sqrt[5]{1^4}}(-0,02)=1-\frac{0,02}{5}=1-0,004=0,996$$

Рисунок 26 – Решение примера 74

Пример 75.

$$y=\sqrt{x^2+2x+5}, \quad x=0.97$$
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$
$$x_0=1, \Delta x=0.03$$
$$y(1)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$y'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}, y'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$v(x)=\sqrt{x}, v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, x_0=1, \Delta x=1$$
$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}\cdot 1=1,5$$
$$y(0,97)=2\cdot 1,5+0,7\cdot 0,03=3+0,021=3,021$$

Рисунок 27 – Решение примера 75

Формулы приближенных вычислений, полученные на основании общей формулы приближенных вычислений, представлены на рисунке 28.

$$(1\pm\alpha)^n\approx 1\pm n\cdot\alpha \qquad (x+\alpha)^3\approx x^3+3x^2\cdot\alpha$$

$$(x+\alpha)^2\approx x^2+2x\cdot\alpha \qquad \sqrt[n]{1+\alpha}\approx 1+\frac{\alpha}{n}$$

$$(x-\alpha)^2\approx x^2-2x\cdot\alpha \qquad \sqrt{\alpha^2+h}\approx\alpha+\frac{h}{2a}$$

$$\sin\alpha\approx\alpha$$

Рисунок 28 – Формулы приближенных вычислений

Примеры применения дифференциала к решению прикладных задач представлены на рисунке 29 и в задаче 2.

Задача 1.

З а д а ч а. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Требуется определить величину изменения объема этого куба.

Р е ш е н и е. Обозначая ребро куба через x, имеем для объема $v = x^3$. Отсюда: $dv = 3x^2\Delta x$. В нашем случае $\Delta x = 0{,}1$ и, значит, $dv = 3 \cdot 900 \cdot 0.1 = 270$. Следовательно, $\Delta v \approx 270$ (см^3).

Рисунок 29 – Применение дифференциала к решению прикладных задач

Задача 2. Найдите абсолютную погрешность в определении объема цилиндра, если при измерениях были получены радиус $r = (6 \pm 0{,}1)$ см и высота $h = (10 \pm 0{,}2)$ см.

Решение. Объем цилиндра находится по формуле $V = \pi r^2 h$. Принимая за погрешность дифференциал функции получаем

$\Delta V = dV = V'(r)\,dr + V'(h)dh = 2\pi rh\Delta h + \pi r^2\Delta h = \pi r\,(2h\Delta r + r\Delta h) = 3{,}14 \cdot 6(2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2) = 603$ см^3.

3.5 Механическое истолкование дифференциала

Пусть $s = f(t)$ – расстояние прямолинейно движущейся материальной точки от начального положения (t – время пребывания в пути). Приращение Δs – это путь точки за интервал времени Δt, а дифференциал $ds = f'(t)\,\Delta t$ – это путь, который точка прошла бы за то же время Δt, если бы она сохранила скорость $f'(t)$, достигнутую к моменту t.

При бесконечно малом Δt воображаемый путь ds отличается от истинного Δs на бесконечно малую величину, имеющую высший порядок относительно Δt. Если скорость в момент t не равна нулю, то ds дает приближенную величину малого смещения точки.

4 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали

4.1 Секущая графика функции. Уравнение секущей графика функции

Рассмотрим график некоторой функции $y = f(x)$, точки $A = (x_0;\ f(x_0))$ и $B = (x_1;\ f(x_1))$ на графике, прямую, проходящую через точки A и B, и произвольную точку $C = (x; y)$ на этой прямой (рисунок 30).

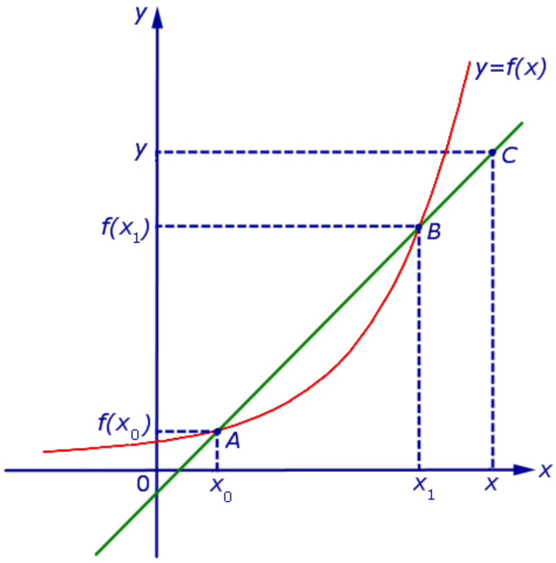


Рисунок 30 – Изображение секущей к графику функции

Определение 3.

Прямую, проходящую через две произвольные точки графика функции, называют *секущей графика функции*.

В соответствии с определением 3 прямая, проходящая через точки A и B графика функции $y = f(x)$, является секущей этого графика. Уравнение секущей известно из школьного курса алгебры: у = кх + в.

4.2 Касательная к графику функции и ее уравнение

Проведем секущую графика функции $y = f(x)$, проходящую через точки A и B этого графика, и рассмотрим случай, когда точка A неподвижна, а точка B неограниченно приближается к точке A по графику функции $y = f(x)$ (рисунок 31).

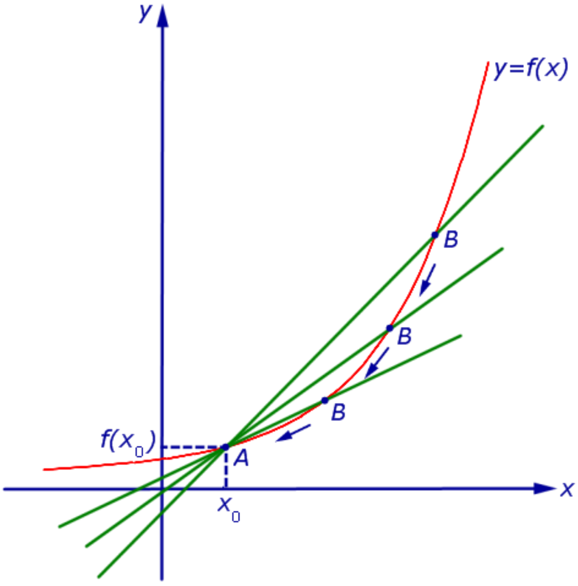


Рисунок 31 – Изменение положения секущей

Неограниченное приближение точки B к точке A принято обозначать
$B \to A$ и произносить «B стремится к A».

Заметим, что, если $B \to A$ для точек $A = (x_0;\ f(x_0))$ и $B = (x_1;\ f(x_1))$ графика функции $y = f(x)$, то это означает, что $x_1 \to x_0$.

Определение 4. Если при $x_1 \to x_0$ существует предельное положение секущей графика функции $y = f(x)$, то это предельное положение секущей называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $A = (x_0;\ f(x_0))$ (рисунок 32) .

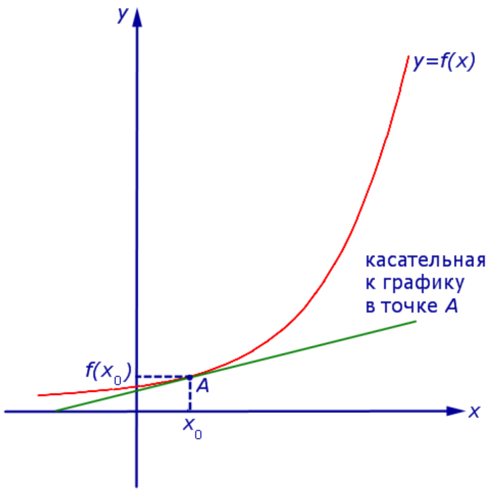


Рисунок 32 – Изображение касательной к графику функции

Итак, если у функции $y = f(x)$ существует производная в точке x_0 , то к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0;\ f(x_0))$ можно провести касательную, а уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0) \qquad (5)$$

4.3 Геометрический смысл производной

Рассмотрим сначала возрастающую функцию $y = f(x)$ и проведем секущую графика этой функции, проходящую через точки $A = (x_0;\ f(x_0))$ и $B = (x_1;\ f(x_1))$ (рисунок 33).

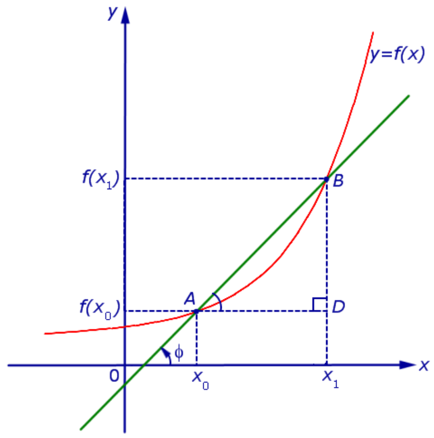


Рисунок 33 – Изображение острого угла наклона секущей

Обозначим буквой φ угол, образованный секущей и положительным направлением оси Ox, отсчитываемый против часовой стрелки. Тогда угол BAD в треугольнике ABD на рисунке 4 равен φ, и по определению тангенса угла получаем равенство

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

причем по определению углового коэффициента прямой $\operatorname{tg}\varphi$ является угловым коэффициентом секущей графика функции $y = f(x)$, проходящей через точки $A = (x_0;\ f(x_0))$ и $B = (x_1;\ f(x_1))$ этого графика.

Случай, когда функция $y = f(x)$ убывает, изображен на рисунке 5

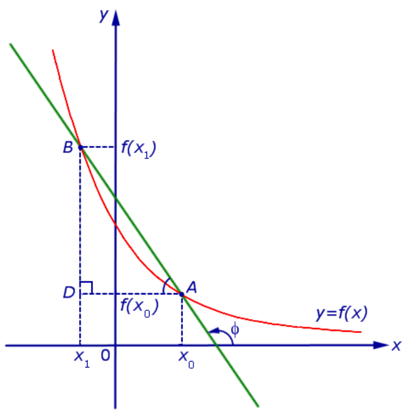


Рисунок 34 – Изображение тупого угла наклона секущей

В этом случае угол φ является тупым, причем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\measuredangle BAD = -\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

то есть эта формула справедлива и для случая, когда функция $y = f(x)$ убывает. Отсюда в соответствии с определением производной функции вытекает соотношение:

$$f'(x_0) = \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \lim_{x_1\to x_0}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

где буквой α обозначен угол, образованный касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A = (x_0;\ f(x_0))$ с положительным направлением оси Ox (рис. 6).

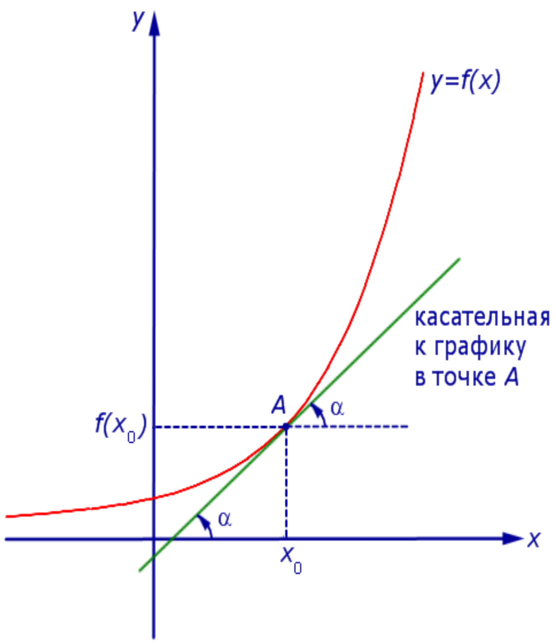


Рисунок 35 – Изображение острого угла наклона касательной

Таким образом, если у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует производная, то эта производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, то есть угловому коэффициенту прямой :

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha, \tag{6}$$

где угол наклона α образован касательной и положительным направлением оси Ox и отсчитывается в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).

На рисунках 36 – 41 приведены примеры с геометрическим смыслом производной

Пример 76.

№ 1 Найти угловой коэффициент и тангенс угла наклона касательной к графику функции:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение

$f'(x) = 2x - 2;$

$k = f'(x_0) = f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2;$

$f'(x_0) = tg\alpha \quad \alpha = arctg\,(-2) = -arctg\,2 = -63°26'6''$

$\alpha = -63°26'6'' + 180° = 116°33'54''$

Рисунок 36 – Решение примера 76

Пример 77.

№ 2 Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной к графику функции:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3; \; x_0 = -1$

Решение

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(-1) = 3 + 6 = 9$

$k = f'(-1) = 9$

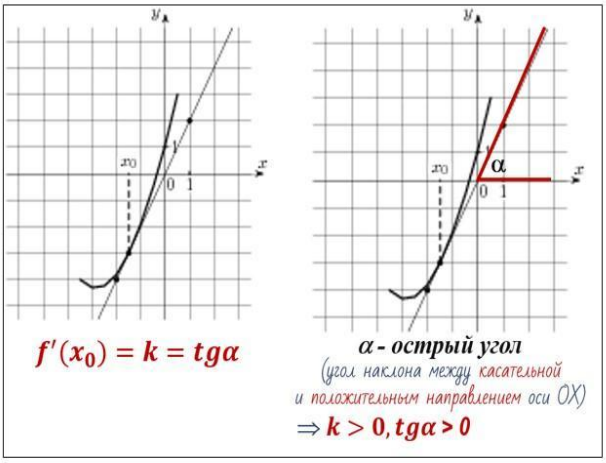
$tg\alpha = 9$

$\alpha = arctg\,9 = 83°39'35''$

Рисунок 37 - Решение примера 77

Пример 78.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



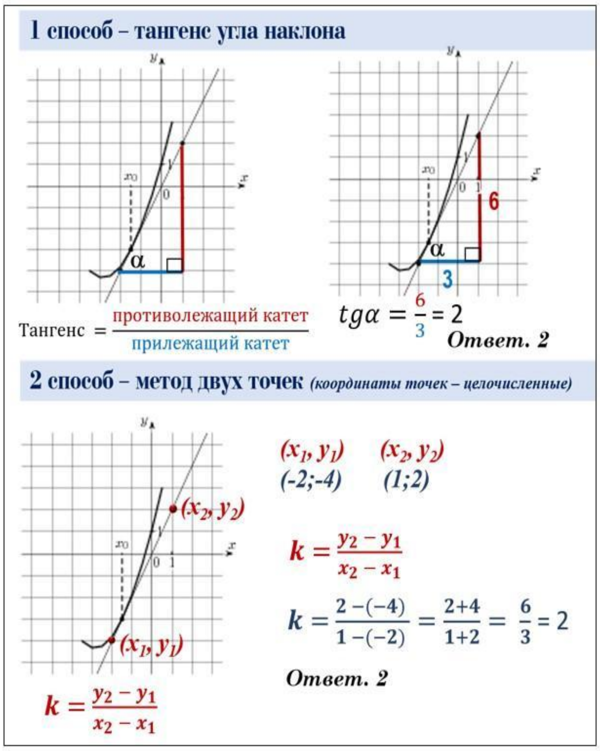
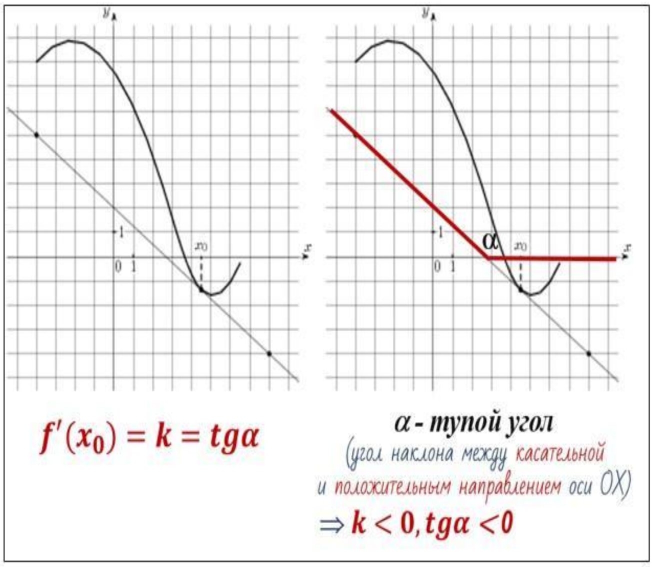


Рисунок 38 - Решение примера 78

Пример 79.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



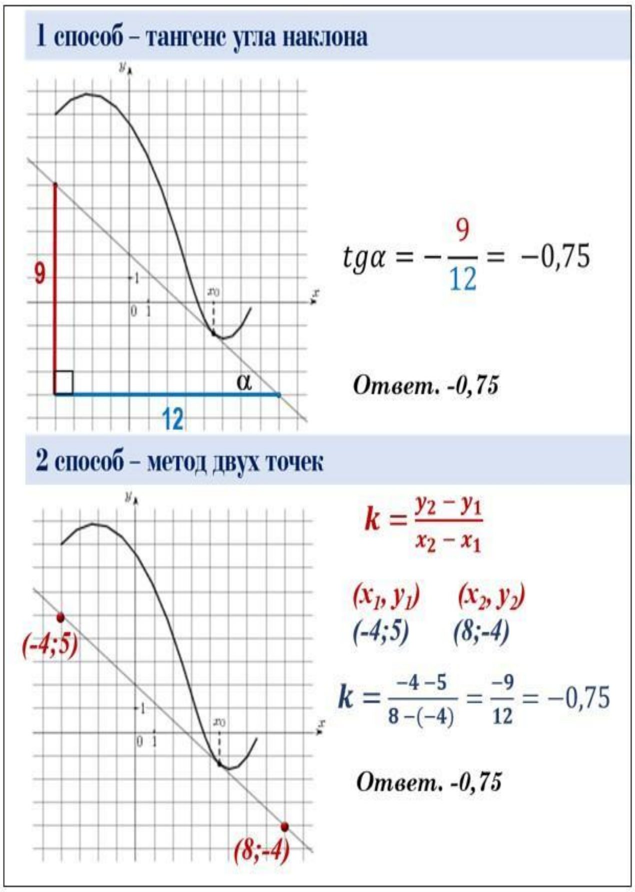


Рисунок 39 – Решение примера 79

Пример 80.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.

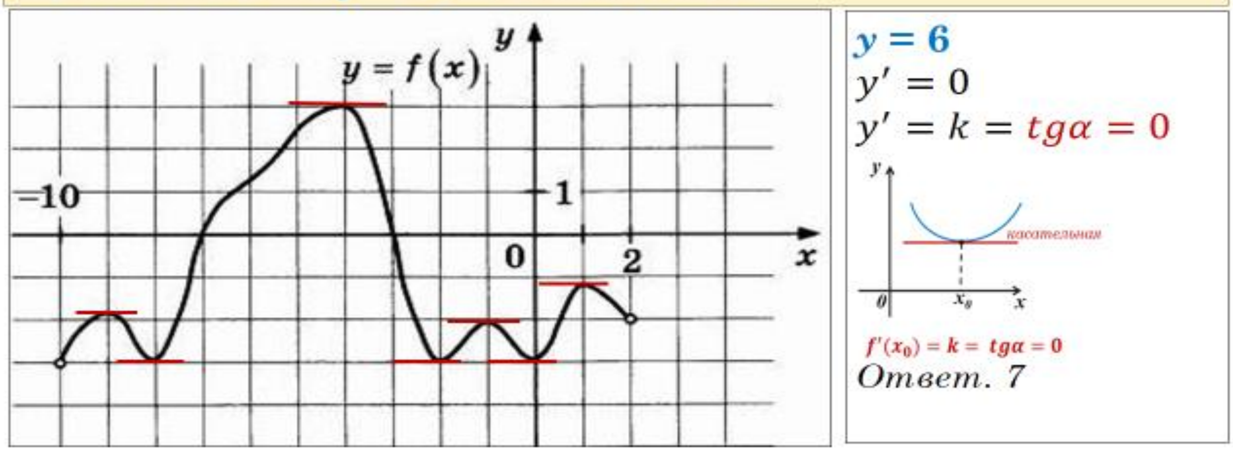
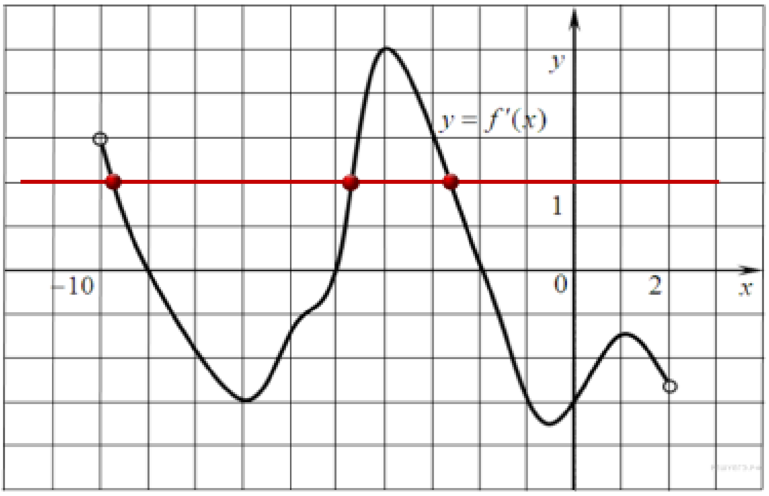


Рисунок 40 – Решение примера 80

Пример 81.

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.



$y = 2x - 5$

$y' = 2$

$y' = k = 2$

Ответ. 3

Рисунок 41 - Решение примера 81

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции в данной точке представлен на рисунке 42.

№ П.п.	Алгоритм	Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0	
		$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$, $x_0 = 2$	$f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 1$
1.	Вычислить значение $f(x_0)$	$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 = 11$	$f(1) = 1^2 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$
2.	Найти производную функции $f'(x)$	$f'(x_0) = 3x^2 + 4x$	$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}(2 - x)$
3.	Вычислить значение производной: $f'(x_0)$	$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 20$	$f'(1) = 1 \cdot e^{-1}(2 - 1) = \frac{1}{e}$
4.	Подставить значения x_0, $f'(x_0)$, $f'(x_0)$ в уравнение касательной	$y = 11 + 20(x - 2) = 11 + 20x - 40 = 20x - 29$	$y = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x - 1) = \frac{1}{e} + \frac{x}{e} - \frac{1}{e} = \frac{x}{e}$
5.	Записать ответ	$y = 20x - 29$	$y = \frac{x}{e}$

Рисунок 42 - Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции в данной точке

Задачи по нахождению уравнений касательных к функциям представлены на рисунках 43 – 48.

Задача 3. Написать уравнение касательной к функции $y = -4 \cdot \mathrm{tg}(\pi x/2)$ в точке $x = -2$.

Решение. Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ имеет вид:

$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем значение функции: $y(-2) = -4 \cdot \mathrm{tg}(-2\pi/2) = 0$.

Найдем производную:

$$y' = (-4 \cdot \mathrm{tg}(\pi x/2))' = -4 \cdot \frac{1}{\cos^2(\pi x/2)}(\pi/2).$$

В точке $x = -2$ получаем:

$$y'(-2) = -4 \cdot \frac{1}{\cos^2(-2\pi/2)}(\pi/2) = -2\pi.$$

Подставляем все в уравнение и получаем уравнение касательной:

$y = 0 - 2\pi(x + 2)$,

$y = -2\pi x - 4\pi$.

Рисунок 43 – Решение задачи 3

Задача 4. Составьте уравнение касательной к кривой y = ln(x-3), параллельной прямой, проходящей через точки A(-8;0) и B(0; 4).

Решение. Уравнение касательной имеет вид: $y = y_0 + k(x - x_0)$, где точку касания (x_0, y_0) нужно будет найти из условия $k = y'(x_0)$, а угловой коэффициент определим из второго условия: что касательная параллельна прямой AB.

Угловой коэффициент прямой AB: $k = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{0-4}{-8-0} = \dfrac{1}{2}$.

Найдем (x_0, y_0) из условия $k = y'(x_0) = \dfrac{1}{2}$.

Производная: $y' = \ln(x-3) = \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 5$, тогда $x_0 = 5, y_0 = \ln 2$.

Подставляем все в уравнение касательной:

$$y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 5),$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \ln 2.$$

Рисунок 44 – Решение задачи 4

Задача 5. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке M(1; ½).

Решение.

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y' = \frac{0 - 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$y'(1) = -\frac{2\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2} = -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y - 1 = 1 - x$$

$$2y + x - 2 = 0$$

Рисунок 45 – Решение задачи 5

Задача 6. Найдите ошибку в решении задачи: составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x)\cdot(x - x_0) \quad (1)$

В этом примере x_0 **= 2.**

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 1 = 1$$

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - \left(2x^2\right)' + 1' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 1 = 5$$

Подставим эти числа в уравнение (1), получаем уравнение
У = 1 + 5(х – 2) = 1 + 5х – 10- = 5х – 11.
Ответ: у = 5х - 11

Рисунок 46 - Решение задачи 6

Задача 7.

Задача 1. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

Решение. Так как касательные параллельны прямой $y = 2x - 1$ то их угловые коэффициенты совпадают. Т. е. угловой коэффициент касательной в этой точке есть k = 2 $(y'(x) = (2x-1)' = 2)$.

Находим $y'(x) = x^2 - 2x - 1;\ k = y'(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 1 = 2$

Решив уравнение $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 2$

$$x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0,$$

получим $(x_0)_1 = 3,\ (x_0)_2 = -1,$ откуда $(y_0)_1 = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 + 1 = -2,$ $(y_0)_2 = \frac{-1^3}{3} - (-1)^2 - (-1) + 1 = \frac{2}{3}.$

Итак, искомыми точками касания A(3;-2) и B(-1; $\frac{2}{3}$) .

Ответ: (3;-2) и (-1; $\frac{2}{3}$) .

Рисунок 47 - Решение задачи 7

Задача 8. К графику функции y = sinx постройте касательную в точке x = 0.

Решение.

$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

$a = 0$

$f(a) = sin\,a = sin\,0 = 0$

$f'(x) = (sin\,x)' = cos\,x$

$f'(a) = cos\,0 = 1$

$y = 0 + 1(x - 0)$

$y = x$

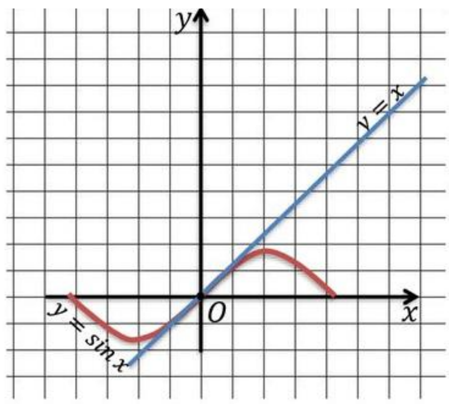


Рисунок 48 - Решение задачи 8

Какой угол (острый, тупой) касательная образует к графику функции с положительным направлением к оси OX? Ответ найдите на рисунке 49.

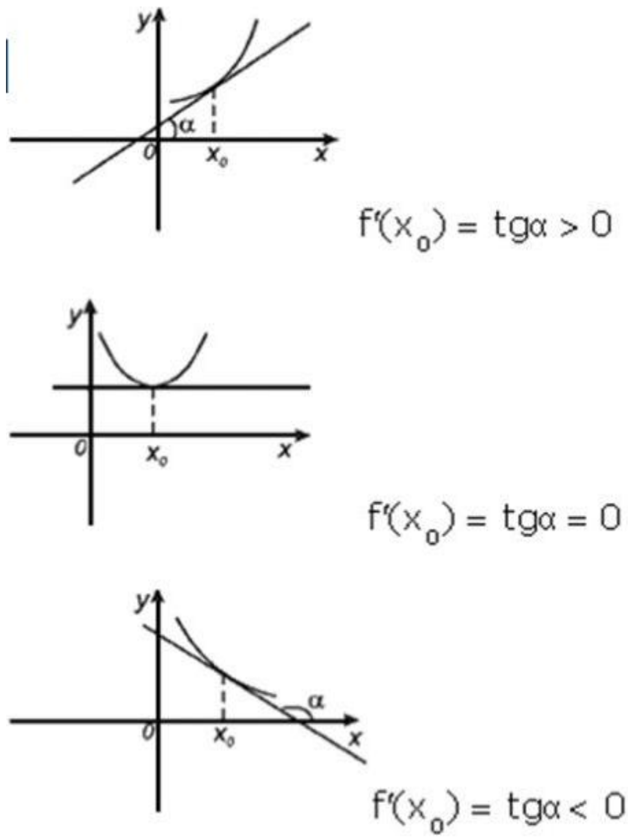


Рисунок 49 – Величины улов наклона касательной

Как находится угол между двумя кривыми? Ответ найдите на рисунке 50.

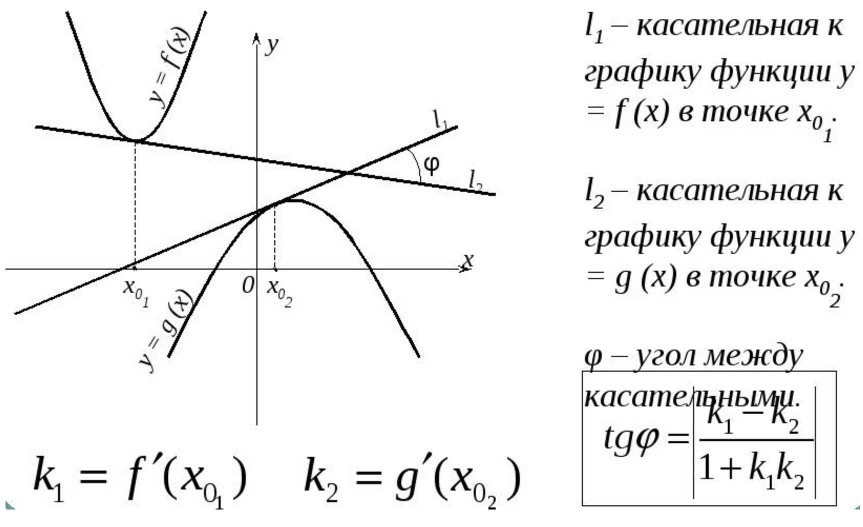


Рисунок 50 – Угол между двумя кривыми

4.4 Уравнение нормали

Определение 5. Прямая, проведенная перпендикулярно касательной и проходящая через точку касания, называется нормалью к кривой.

Угловые коэффициенты касательной и нормали, как коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых, связаны равенством, представленным на рисунке 51.

$$k_N = -\frac{1}{k_K}$$

Рисунок 51 – Формула связи угловых коэффициентов касательной и нормали

График и уравнение нормали представлен на рисунке 52

Уравнение нормали к графику функции *f(x)* в точке x_0:

$$y_н = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

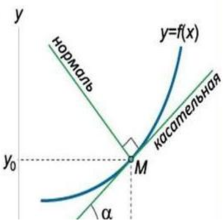


Рисунок 52 – График и уравнение нормали

Если функция f(x) не имеет производной в точке x_0, но непрерывна в этой точке, то у графика функции в этой точке либо вообще нет касательной, либо есть вертикальная касательная.

Если в некоторой точке нет касательной, то в этой точке нет и нормали. Если в некоторой точке есть вертикальная касательная, то в этой точке есть и горизонтальная нормаль.

Задачи составления уравнения нормали представлены на рисунках 53 – 55.

Задача 9.

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x_0 = 3$$

Решение:

1) $f(x_0) = 3^2 - 4 = 5$;

2) $f'(x) = 2x$;

3) $f'(x_0) = 2 \cdot 3 = 6$;

4) $y_к = 5 + 6 \cdot (x - 3)$

$y_к = 6x - 13$

5) $y_н = 5 - \frac{1}{6} \cdot (x - 3)$

$y_н = -\frac{1}{6}x + 5\frac{1}{2}$

Рисунок 53 – Решение задачи 9

Задача 10.

$$y = x^2 - 2x - 5, \quad x_0 = 4$$

$$y' = \left(x^2 - 2x - 5\right)' = 2x - 2$$

$$y(x_0) = 3$$

$$y'(x_0) = 6$$

Уравнение касательной к графику в точке x_0

$$f_к = y(x_0) + y'(x_0)\cdot\left(x - x_0\right)$$

$$f_к = 3 + 6\cdot\left(x - 4\right) = 6x - 21$$

Уравнение нормали к графику в точке x_0:

$$f_н = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}\cdot\left(x - x_0\right)$$

$$f_н = 3 - \frac{1}{6}\cdot\left(x - 4\right) = -\frac{x}{6} + 3\frac{2}{3}$$

Рисунок 54 – Решение задачи 10

Задача 11.

Составить уравнение нормали к данной кривой в точке x_0 абсциссой

$y = x + \sqrt{x^3}$; $x_0 = 1$

Уравнение нормали:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'_0}(x - x_0)$$

Найдем y_0 и y'_0

Ордината точки касания

$$y_0 = 1 + \sqrt{1^3} = 1 + 1 = 2$$

В любой точке

$$y' = \left(x + \sqrt{x^3}\right)' = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

В точке касания

$$y'_0(1) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{1} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$y - 2 = \frac{-1}{\frac{5}{2}}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{5}(x - 1)$$

$$5y - 10 = -2x + 2$$

$$5y = -2x + 12$$

$$y = \frac{-2x}{5} + \frac{12}{5}$$

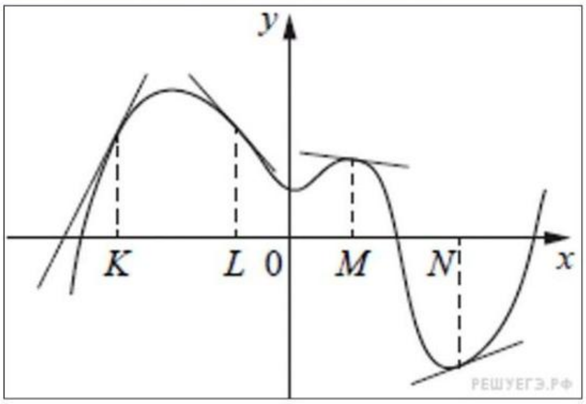
Рисунок 55 – Решение задачи 11

4.5 Вопросы для самоконтроля по разделу 4

1. Дайте определение касательной.
2. Сформулируйте определение секущей.
3. Дайте определение нормали.
4. Запишите уравнение касательной, проведенной к графику функции y = f(x) в точке x_0.
5. Запишите уравнение нормали, проведенной к графику функции y = f(x) в точке x_0.
6. Укажите расположение касательной, проходящей через точку x_0, в системе координат, если производная функции в указанной точке равна нулю.
7. Укажите расположение нормали, проходящей через точку x_0, в системе координат, если производная функции в указанной точке равна нулю.
8. Какой формулой связаны угловые коэффициенты касательной и нормали?

4.6 Задания для самостоятельного решения по разделу 4

Задача 12. На рисунке 56 изображен график функции, к которому проведены касательные в четырех точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.



ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
А) K	1) -5
Б) L	2) 4
В) M	3) $\frac{2}{3}$
Г) N	4) $-0,5$

Рисунок 56 – График к задаче 12

Задача 13. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции f(x) в точке M.

а) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$, $M(-3; 9)$;

б) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $M(2; 3)$.

Задача 14. Составьте уравнение касательной к графику $y = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{3}{7}} - x^{-3}$ в точке $x = -1$.

Задача 15. Составьте уравнение касательной к графику $y = 5x - 3 + e^{x-1}$ в точке $x = 1$.

Задача 16. Касательная к графику функции $y = 5x - 4e^{2x}$ параллельна прямой $y = -3x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Задача 17. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$.

Задача 18. Найдите угол наклона нормали к графику функции $y = e^{x}$ в точке $x = 0$.

5 Физические приложения производной

5.1 Механический смысл производной

Механический смысл производной представлен на рисунке 57, на котором изображено движение точки вдоль оси x. Тогда мгновенная скорость движения точки есть производная пути от времени.

$$\boxed{v(t) = s'(t)}$$

Рисунок 57 – Движение точки по оси

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

Рисунок 58 – Определение скорости и ускорения при прямолинейном неравномерном движении

При свободном падении $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}$, $v(t) = x'(t) = gt$, $a(t) = v'(t) = g$.

Рисунок 59 – Определение скорости и ускорения при свободном падении

5.2 Прикладные задачи с использованием физического смысла производной

Если рассматривать другие неравномерные процессы в природе и технике, то можно дать определения скорости протекания этих процессов как производную (смотрите приложения). Нахождение скорости протекания какого – либо процесса рассмотрим на конкретных задачах.

Задача 19.

Задан закон прямолинейного движения точки $x(t) = (t-1)^3, где\_t \in [0;10]$

1. Найти среднюю скорость движения на указанном отрезке

$$\upsilon_{cp} = \frac{x(10) - x(0)}{10 - 0} = \frac{9^3 - (-1)^3}{10} = \frac{730}{10} = 73\, м/с$$

2. Найти мгновенную скорость в момент времени t=3 сек.

$$\upsilon(t) = x'(t) = 3(t-1)^2$$

$$\upsilon_{мгн} = \upsilon(3) = 3(3-1)^2 = 3 \cdot 4 = 12\, м/с$$

3. Найти ускорение при t=3 сек

$$a(t) = \upsilon'(t) = 6(t-1)$$

$$a(3) = 12\, м/с^2$$

Рисунок 60 – Решение задачи 19

Задача 20.

Задача 1. Материальная точка движется по закону $x(t) = (½)×t^2 - t – 4$. Определите в какой момент времени t -- скорость V = 6м/с .

Решение.

1) $(x(t))' = ((½)×t^2 - t - 4)'$

2) $V(t) = (s(t))'$; $(s(t))' = (x(t))'$;

$V(t) = ((½)×t^2 – t – 4)'$

$V(t) = ((½)×t^2)' – (t)' – (4)'$

3) V(t) = 6м/с (по условию)

V(t)=t-1

6=t – 1;

t=1+6; t=7;

Ответ: 7 с.

Рисунок 61 – Решение задачи 20

Задача 21.

Задание 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$

(где *x*- расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения).

В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение.

Найдём закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = t^2 - 6t - 5$ м/с.

Чтобы найти, в какой момент времени скорость была равна 2 м/с, решим уравнение:

$$t^2 - 6t - 5 = 2 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1; \\ t = 7 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 7 \text{ с.}$$

Ответ: 7.

Рисунок 62 – Решение задачи 21

Задача 22. Найдите количество особей некоторой популяции, подчиняющейся закону $p(t)=3000+100t^2$ в моменты времени 5 часов,10 часов.

Решение.

Если популяция в момент времени t насчитывает $p(t)=3000+100t^2$ особей (t измеряется в часах), то скорость роста популяции есть $p'(t)=200t$.

Скорость роста популяции увеличивается со временем.

Если t =5, то скорость роста составляет $p'(5)=200\cdot 5=1000$ особей в час.

Если t=10, то $p'(10)=200\cdot 10=2000$ особей в час.

Задача 23. Ракета при движении совершает колебательное движение вокруг своей оси по закону $\alpha(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$. Найти угловую скорость и ускорение движения в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{2}c$. Дать характеристику движения.

Решение: $\omega(t) = \alpha'(t) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$

$\omega(t_0) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 12\sin\frac{\pi}{6} = 6$ (рад/с)

$\varepsilon(t) = \omega'(t) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$

$\varepsilon(t_0) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 36\cos\frac{\pi}{6} = 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ (рад/с^2)

$\omega(t) \neq const, \varepsilon(t) \neq const$ неравномерное движение

Ответ: $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$=6 рад/с, $\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)$=18$\sqrt{3}$ рад/с^2.

Задача 24. Пуля, попадая в твердое тело, движется в нем по закону S(t)=$\frac{1}{k}$ ln(1+kV_0t), где V_0 - скорость, с которой пуля входит в тело, k – постоянная положительная величина.

Решение: V(t)=S′(t)

$$V(t)=\left(\frac{1}{k}\ln(1+kV_0t)\right)' = \frac{kV_0}{k(1+kV_0t)} = \frac{V_0}{1+kV_0t}$$

$$a(t)=V'(t), a(t)=\left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)' = -\frac{kV_0\cdot V_0}{(1+kV_0t)^2} = -k\cdot\left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)^2 = -k\cdot V^2$$

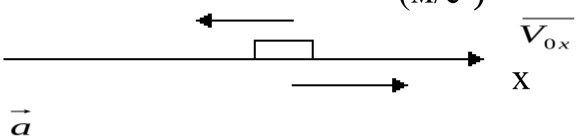
Ответ: $V=\frac{V_0}{1+kV_0t}$; a=-k·V^2.

Задача 25. Материальная точка движется вдоль оси OX согласно закону x(t). Найти скорость и ускорение движения в начальный момент времени. Описать характер движения и схематически изобразить движение материальной точки, если:

а). x(t)=$\frac{3}{4}-8t+\frac{5}{6}t^2$

$V(t)=x'(t)=-8+\frac{5}{3}t; V(0)=-8$ (м/с)

$a(t)=V'(t)=\frac{5}{3}$ $a=\frac{5}{3}$ (м/с^2)

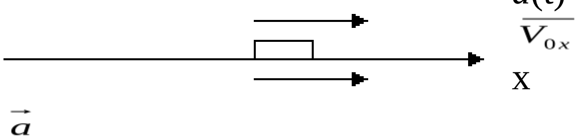


Равнозамедленное движение в сторону, противоположную оси OX.

б). $x(t)=\sqrt{3}+5t+\frac{1}{2}t^2$

V(t) = x′(t) = 5+t; V(0) 5 (м/с).

a(t) = V′(t) =1; a = 1 (м/с^2)

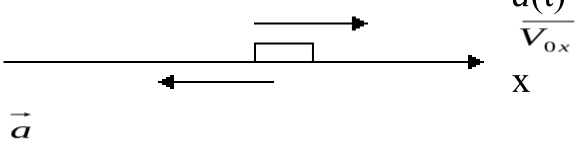


Равноускоренное движение в сторону оси OX.

в). x(t)=-$\frac{3}{4}t^2+\frac{7}{2}t-2\sqrt{5}$;

V(t)=x′(t)=-$\frac{3}{2}t+\frac{7}{2}t$; V(0)=$\frac{7}{2}$=3,5 (м/с)

a(t)=V′(t)=-1,5; a=-1,5 (м/с^2)



Равнозамедленное движение в сторону оси OX.

Задача 26. Материальная точка движется по прямой. Уравнение движения: S(t)= $t^3-3\frac{t^2}{2}+2t-1$ (м). Найдите ее скорость в момент времени t=3 (с). В какой момент времени ускорение будет равно 9 м/с^2?

Решение: а) V(t) = S′(t) =3t^2 - 3t+2;

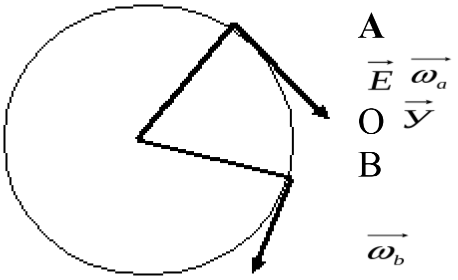
V(3) = 27-9+2 = 20 (м/с).

б) a(t) = V′(t) = 6t-3;

6t-3=9; 6t=12; t=2 (с).

Ответ: V(3)=20 м/с; a=9 м/с^2 в момент времени t=2с.

Задача 27. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону φ(t). Найти угловую скорость и угловое ускорение движения. Дать характеристику движения, если:



а) φ(t)=12t+4, $\omega(t)=\varphi'(t)=12(рад/с)$, E(t)=$\omega'(t)=0$, $\omega=const$.

E=0 - равномерное движение по окружности.

б) φ(t)=5t^3+6t, $\omega(t)=\varphi'(t)=15t^2+6$, E(t)=$\omega'(t)=30t$, $\omega\neq const$, $\varepsilon=const$ - неравномерное движение по окружности.

в) φ(t)=2t^2+8t, $\omega(t)=\varphi'(t)=4t+8$, E(t)=$\omega'(t)=4$, $\omega\neq const$, $\varepsilon\neq const$ - равнопеременное движение по окружности.

Задача 28. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону S(t)=(5-t)(2t-6)+50. Найти кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

Решение: $E_к=\frac{mv^2}{2}$,

V(t) = S′(t) = - (2t-6)+2(5-t) = - 2t+6+10-2t = -4t+16.

V(t$_0$) = -4·2+16 =- 8+16=8 (м/с).

$E_к=\frac{5\cdot 64}{2}=5\cdot 32=160$ (Дж).

Ответ: $E_к$=160Дж.

Задача 29. Материальная точка массой 10 кг движется прямолинейно по закону S(t) = $2t^3-\frac{5t^2}{2}-7t+3$. Найти скорость и силу, действующую на эту точку в момент времени t=1с.

Решение: F = ma, V(t) = S′(t) = 6t^2-5t-7, V(t$_0$) = 6-5-7 = -6 (м/с),
a(t) =12t-5; a(t$_0$) =12-5=7 (м/с^2).
F=10·7=70 (Н).
Ответ: F=70 Н.

Задача 30. Температура тела изменяется в зависимости от времени по закону T=100-$\frac{4}{t+1}$.

а) Какова скорость изменения температуры тела в момент времени t=1с?

б) В какой момент времени скорость изменения температуры равна 4^0 в секунду?

Решение.

а) $T' = \frac{4}{(t+1)^2}; T'(1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1^0$ (в сек);

б) $\frac{4}{(t+1)^2} = 4;$ $(t+1)^2=16$; t+1=4; t = 3 (с).

Ответ: а) скорость изменения температуры 1^0 в сек.

б) скорость изменения температуры 4^0 в сек достигается в момент времени 3с.

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 31. Найдите скорость и ускорение материальной точки в момент времени $t=t_0$, движущейся прямолинейно по закону S(t), где t измеряется в секундах, а S – в метрах, если:

а) $S(t)=5t^2$; $t_0=10$;

б) $S(t)=5t^2-2t$; $t_0=5$;

в) $S(t)=-5t^2+24t$; $t_0=2$;

г) $S(t)=(6-5t)(5t+2)-10$; $t_0=1$;

д) S(t)=$\sqrt{3}-\frac{4}{5}t+\frac{3}{4}t^2$; $t_0=8$.

Задача 32. Материальная точка массой m движется прямолинейно по закону S(t), где t измеряется в секундах, а S – в метрах. Найдите скорость и силу, действующую на эту точку в момент времени t, если:

а) S(t)=$t^3-\frac{3t^2}{2}+2t-1$; t=3 с; m=2 кг;

б) S(t)=(6-t)(2t+3)-18; t=2 с; m=5 кг;

в) $S(t)=2t^3-2,5t^2+3t+1$; t=1 с; m=8 кг;

г) S(t)=$0,5+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{6}t^3$; t=3 с; m=4.

Задача 33 (1, 2, 3). Решите задачи, представленные на рисунке 63.

Задача 1. Объем продукции V цеха в течение дня зависит от времени по закону $V(t) = -\frac{5}{3}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 50t + 70$ Вычислите производительность труда $П(t)$ в момент времени t = 2.	Указание: $П(t) = V'(t)$, $П(2)$-?
Задача 2. Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью: $p(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 3$ *(моль)* Найти скорость химической реакции через 3 секунды.	Указание: $v(t) = p'(t)$ $v(3)=?$
Задача 3. Пусть популяция бактерий в момент t (с) насчитывает x(t) особей. $x(t) = 3000 + 100t^2$ Найти скорость роста популяции в момент времени t = 1 с.	Указание: $v(t)=x'(t)$ $v(1)=?$

Рисунок 63 – Условие задачи 33

6 Применение производной к исследованию функций и построению графиков

6.1 Монотонность функции

<u>**Теорема**</u> (*критерий постоянства*). Функция $y = f(x)$ является постоянной на интервале $(a\ ;\ b)$ тогда и только тогда, когда её производная тождественно = 0 ($f'(x) = 0$) .

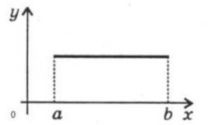
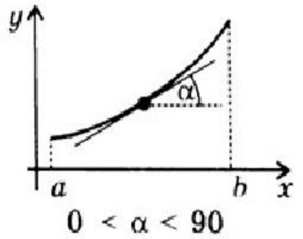


Рисунок 64 - Геометрическая интерпретация постоянной функции

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условия возрастания функции)
Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ неубывающая на $[a;b]$, то ее производная неотрицательна на этом отрезке, $f'(x)\geq 0$.
<u>Обратно.</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и ее производная f '(x) ≥ 0 на этом отрезке для $a<x<b$, то $f(x)$ не убывает на$[a, b]$.

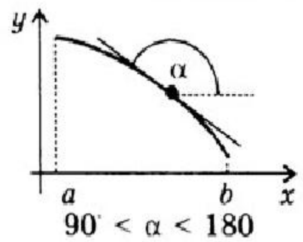
Теорема 2. (Необходимое и достаточное условия убывания функции)
Если дифференцируемая функция $f(x)$ невозрастающая на $[a;b]$, то на этом отрезке $f'(x) \leq 0$.
<u>Обратно.</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f'(x) \leq 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ не возрастает на $[a, b]$.

Рисунок 65 - Необходимые и достаточные условия монотонности функции



Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.

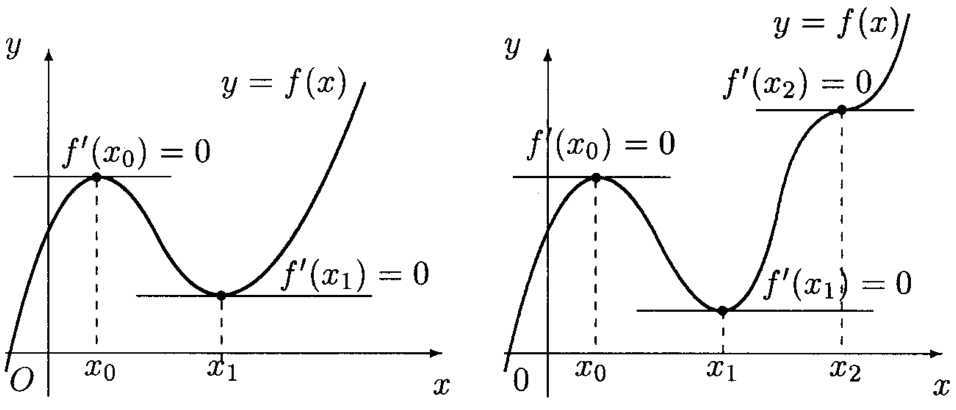


Достаточное условие убывания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

Рисунок 66 - Геометрическая интерпретация достаточных условий монотонности

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными. Промежутки монотонности функции разделяются критическими точками.



а) б)

Рисунок 67 – Расположение касательной: а) в стационарных точках; б) –в критических точках

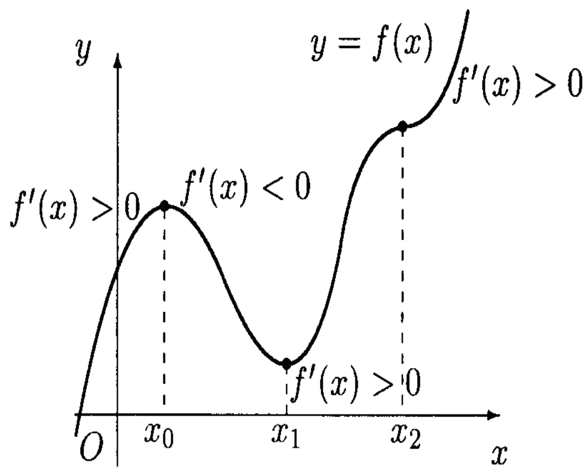


Рисунок 68 – Знаки производной в окрестности критических точек

Алгоритм исследования функции на монотонность:

1. Найти производную функции f ′(x).
2. Найти критические точки функции из условия f ′(x) = 0.
3. Отметить критические точки на числовой прямой (оси), отражающей область определения функции.
4. Определить знаки производной на получившихся промежутках (интервалах).
5. По знаку производной в промежутках определить характер монотонности функции.

Задание: исследовать функции на монотонность.
Пример 82.

$$y = x^3 - 6x^2 + 4$$

Решение: 1)Найдем производную функции $y' = \left(x^3 - 6x^2 + 4\right)' = 3x^2 - 12x$.

2) Определим знак производной на всей области определения функции. Для этого используем метод интервалов.

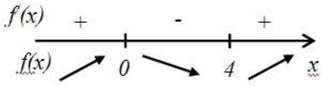
а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$,

б) $3x^2 - 12x = 0$,

$3x(x-4) = 0$,

$x = 0$ или $x = 4$.

Отмечаем данные точки на числовой прямой.



Ответ: функция возрастает на $(-\infty;0] \cup [4;+\infty)$, функция убывает на $[0;4]$.

Рисунок 69 – Решение примера 82

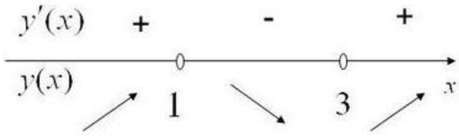
Пример 83.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right)' = x^2 - 4x + 3$$

$y'(x) = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$



x	(-∞;1)	(1;3)	(3;+∞)
y'	+	-	+
y	возрастает	убывает	возрастает

Рисунок 70 – Решение примера 83

Пример 84.

- Исследовать на монотонность функцию $y = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

$$y' = \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)' = \frac{(3x-1)'(2x+1) - (3x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} > 0$$

- функция возрастает на всей области определения

Рисунок 71 – Решение примера 84

Пример 85.

Пример 1. Доказать, что функция $y = 2x^5 + \sqrt{5}x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение.

$\boxed{f'(x) = 10x^4 + 3\sqrt{5}x^2}$

$10x^4 + 3\sqrt{5}x^2 \geq 0.$

Ответ: по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой.

Рисунок 72 – Решение примера 85

6.2 Экстремумы функции

ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

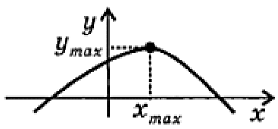
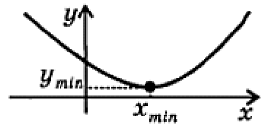
Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство: $f(x) < f(x_{max})$. Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.	Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство: $f(x) > f(x_{min})$. Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.
	
x_{max} — точка максимума y_{max} — максимум	x_{min} — точка минимума y_{min} — минимум

Рисунок 73 – Определение экстремумов

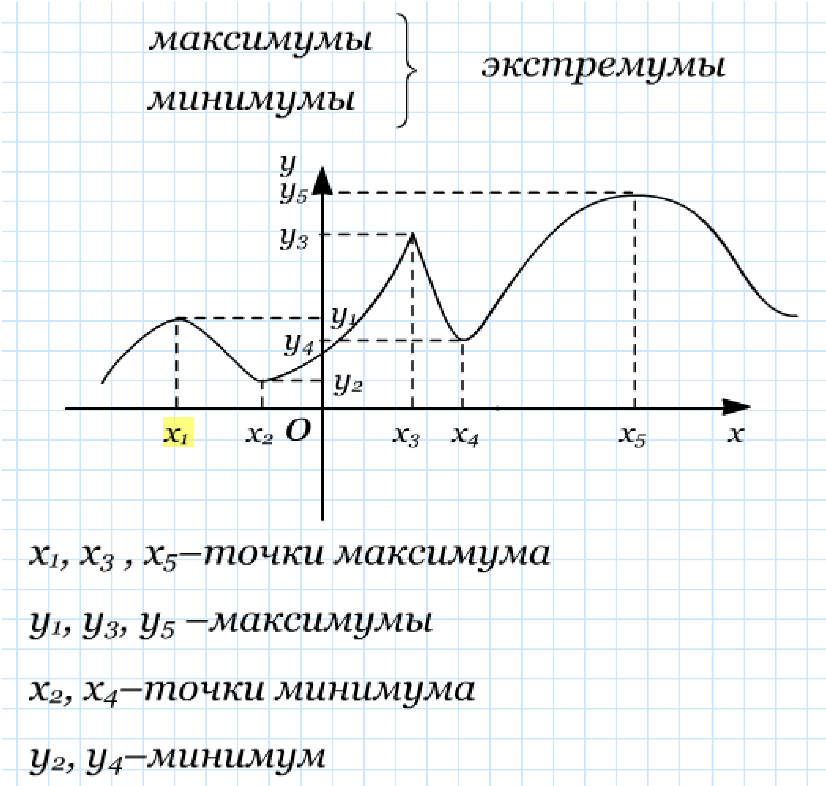


Рисунок 74 –Графическое изображение экстремумов

Теорема (необходимый признак экстремума). Если точка x_0 - точка экстремума дифференцируемой функции f(x), то $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума:

1) если производная функции y = f(x) при переходе через стационарную точку меняет знак с «+» на «-» , то эта стационарная точка является точкой максимума (на рисунке 68 точка x_0);
2) если производная функции y = f(x) при переходе через стационарную точку меняет знак с «-» на «+» , то эта стационарная точка является точкой минимума (на рисунке 68 точка x_1);
3) если производная функции y = f(x) при переходе через стационарную точку не меняет знак, то эта стационарная точка не является точкой экстремума (на рисунке 68 точка x_2).

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. Найти производную функции $f'(x)$.

2. Найти стационарные точки функции из условия $f'(x) = 0$.

3. Отметить точки на числовой прямой (оси), отражающей область определения функции.

4. Определить знаки производной на получившихся промежутках (интервалах).

5. По смене знака производной при переходе через стационарные точки определить вид экстремума функции (максимум, минимум).

В следующих примерах необходимо исследовать функции на экстремум.

Пример 84.

Рисунок 75 – Решение примера 84

Пример 85.

Вопрос №8. Исследуйте функцию на экстремум:

$f(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+15$.

Решение. Найдем первую производную:

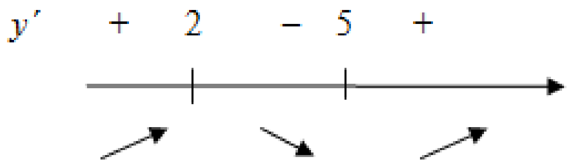
$f'(x)=\left(x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+15\right)'=3x^2-21x+30=3(x^2-7x+10)$.

Приравняем к нулю и найдем критические точки:

$3(x^2-7x+10)=0$,

$x_1=2$ и $x_2=5$.

Строим точки на числовой прямой, отмечаем знаки производной на каждом интервале, на которые точки делят числовую прямую.



Функция убывает на интервале $(2;5)$, возрастает на интервалах $(-\infty;2)$, $(5;+\infty)$. Функция имеет максимум при $x=2$, $f(2)=41$, минимум при $x=5$, $f(5)=27,5$.

Рисунок 76– Решение примера 85

Пример 86.

Стр.107, №14(2) ***Найти точки экстремума функции***

$$2)\ y=\frac{x^5}{5-x}$$

$$y'=\left(\frac{x^5}{5-x}\right)'=\frac{5x^4(5-x)-x^5\cdot(-1)}{(5-x)^2}=\frac{-4x^5+25x^4}{(5-x)^2}=$$

$$=\frac{x^4(-4x+25)}{(5-x)^2}=0,$$ ***Критические точки:*** ***x=0, x=6,25***

y': + (0!) + (6,25) - ***x=6,25- точка максимума***

Рисунок 77– Решение примера 86

Пример 87.

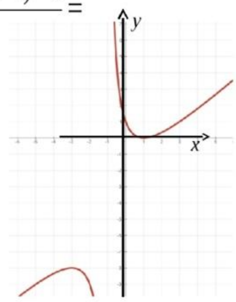
Стр.107, №14(4) ***Найти точки экстремума функции***

$$4)\ y=\frac{(x-1)^2}{x+1}\qquad y'=\left(\frac{(x-1)^2}{x+1}\right)'=\frac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2-x^2+2x-1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}=0,$$

Стационарные точки: x=-3, x=1



y': + (- 3) - (1) +

x=-3 точка максимума

x=1 точки минимума

Рисунок 78– Решение примера 87

Пример 88.

Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{\ln x}{x}$.

Решение:

$$y'(x)=(x^{-1}\cdot\ln x)'=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+x^{-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1=\ln x\Leftrightarrow x=e$$

$$\left.\begin{matrix}x<e\Rightarrow y'>0\\ x>e\Rightarrow y'<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow e\text{- точка максимума}$$

max (e)

$$y_{max}=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

Рисунок 79 – Решение примера 88

Очевидно, что исследование функции на монотонность и экстремум имеют много общего. Обобщим два этих исследования.

Функция $y = f(x)$	Производная $y' = f'(x)$
возрастает	$f'(x) > 0$
убывает	$f'(x) < 0$
имеет экстремум	$f'(x) = 0$, меняет знак
имеет максимум	$f'(x) = 0$, меняет знак с «+» на «–»
имеет минимум	$f'(x) = 0$, меняет знак с «–» на «+»

Рисунок 80 - Обобщение исследования функции на монотонность и экстремум

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум

1. Найти производную функции f ′(x).
2. Найти стационарные (f ′(x) = 0) и критические точки (f ′(x) не существует) функции.
3. Отметить точки на числовой прямой (оси), отражающей область определения функции.
4. Определить знаки производной на получившихся промежутках (интервалах).
5. Сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума (максимум, минимум).

В последующих примерах необходимо исследовать функцию на монотонность и экстремум.

Пример 89.

Исследование функции $y = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

1) Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2) Точки пересечения с осями координат

$x = 0 \Rightarrow y = 6$

3) Функция четная

4) Экстремумы и монотонность

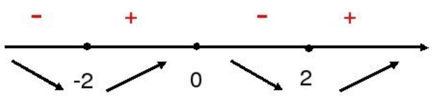
$y' = 2x^3 - 8x$

$2x^3 - 8x = 0$

$x^3 - 4x = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0; x = 2; x = -2$



$f_{\min}(\pm 2) = -2 \qquad f_{\max}(0) = 6$

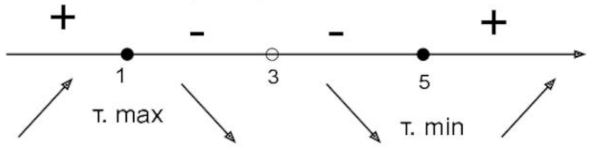
Рисунок 81 – Решение примера 89

Пример 90.

Пример $f(x)=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

$$f'(x)=0 \qquad \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0 \qquad x=1, \quad x=5$$



$$f(1)=\frac{1-6+13}{1-3}=\frac{8}{-2}=-4 \quad f(5)=\frac{25-30+13}{5-3}=\frac{8}{2}=4$$

Рисунок 82 – Решение примера 90

Пример 91.

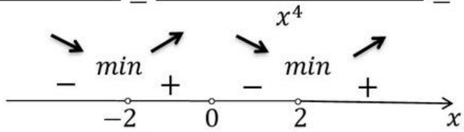
Исследовать функцию $y=\frac{x^4+16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$x=0$

$$f'(x)=\frac{(x^4+16)'\cdot x^2-(x^4+16)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{4x^3\cdot x^2-2x(x^4+16)}{x^4}=$$

$$=\frac{4x^5-2x^5-32x}{x^4}$$



$f'(x)=0$ при $x=-2, x=2$

при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$ функция убывает, при $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ функция возрастает

$x=-2$ – точка минимума $y_{min}=\dfrac{(-2)^4+16}{(-2)^2}=8$

$x=2$ – точка минимума $y_{min}=\dfrac{2^4+16}{2^2}=8$

Рисунок 83 – Решение примера 91

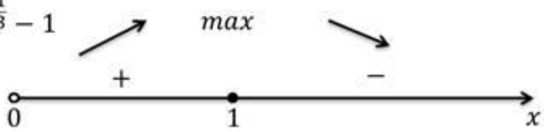
Пример 92.

Исследовать функцию $y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-x$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$D(y)=[0;+\infty)$

$$y'=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-x\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-1=x^{-\frac{1}{3}}-1$$



y'– не существует при $x=0$

$y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Функция возрастает при $x\in(0;1)$

Функция убывает при $x\in(1;+\infty)$

$x=1$ – точка максимума

$y_{max}=y(1)=\frac{1}{2}$

Рисунок 84 – Решение примера 92

6.3 Выпуклость функции и точки перегиба

Определения выпуклой функции представлены на рисунках 85,86.

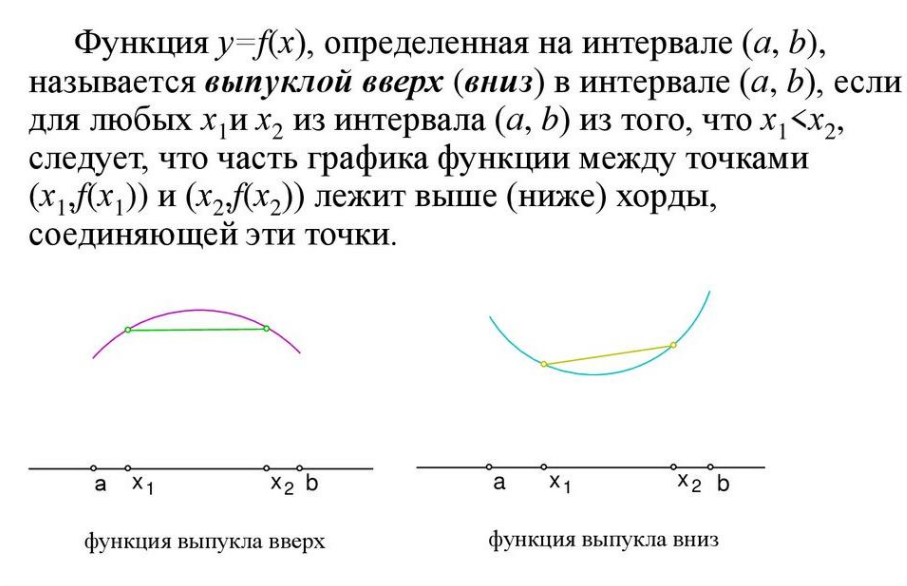


Рисунок 85 – Первое определение функции выпуклой вверх (вниз)

График функции f(x) называется выпуклым вверх (вниз) на интервале $(a;b)$, если все точки графика лежат ниже (выше) любой его касательной на этом интервале

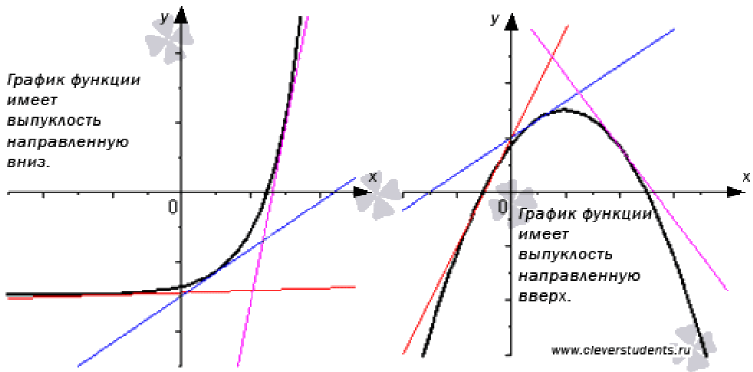


Рисунок 86 – Второе определение функции выпуклой вверх (вниз)

Если график функции в точке $(x_0; f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точка x_0 называется точкой перегиба функции f(x).

Достаточные условия выпуклости функции и существование точек перегиба: если на интервале $(a;b)$ $f''(x) > 0$, то на этом интервале функция выпукла вниз, и если на интервале $(a;b)$ $f''(x) < 0$, то на этом интервале функция выпукла вверх; если при переходе через некоторую точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка x_0 – точка перегиба функции.

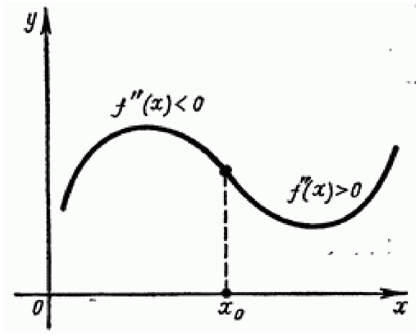


Рисунок 87 – Достаточные условия выпуклости

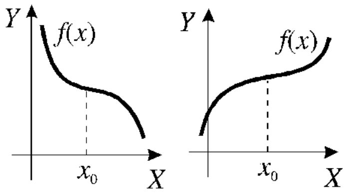


Рисунок 88 – Примеры точек перегиба

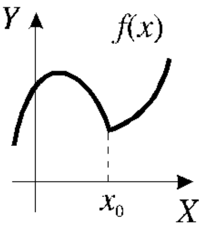


Рисунок 89 – Угловая точка, не являющаяся точкой перегиба

Правило нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба:

а) Найти производную функции f ′(x).

б) Найти вторую производную функции f ″(x).

в) Найти критические точки по второй производной (f ″(x) = 0).

г) Исследовать знак второй производной на промежутках, определить промежутки выпуклости и точки перегиба.

д) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 93.

Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$$

Ответ: выпукла вверх на интервале

выпукла вниз на интервалах

Рисунок 90 – Решение примера 93

Пример 94. Найдите точки перегиба функции $f(x) = x^5 - 80x^2$.

Решение.

Находим первую производную: $f'(x) = (x^5 - 80x^2)' = 5x^4 - 160x$.

Находим вторую производную: $f''(x) = (5x^4 - 160x)' = 20x^3 - 160$.

Находим стационарные точки по второй производной: $20x^3 - 160 = 0$, $x = 2$.

Определяем знаки второй производной слева и справа от стационарной точки (рисунок 91):

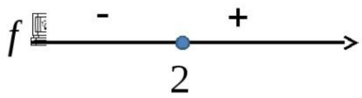


Рисунок 91 –Знаки второй производной примера 94

Смена знака второй производной показывает, что x = 2 – точка перегиба. Обратите внимание, что неважно, с какого на какой знак меняется вторая производная при переходе через точку x = 2!

Ответ: x = 2.

Пример 95. Найдите промежутки выпуклости функции.

$$y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$$

1. D(y)= $(-\infty;+\infty)$

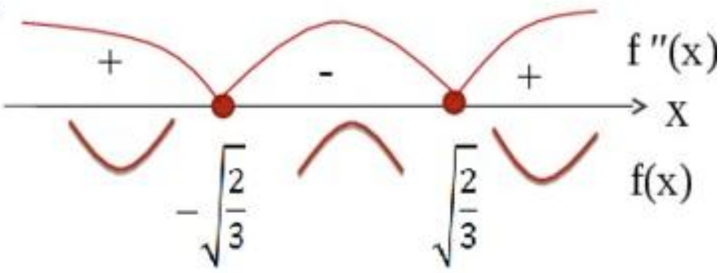
2. $f''(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$

3. $3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$



Точки перегиба: $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\ 7\frac{4}{9}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ 7\frac{4}{9}\right)$

Рисунок 92 – Решение примера 95

6.3 Нахождение экстремума функции с помощью второй производной

Основные теоретические сведения представлены на рисунках 93, 94.

Теорема. Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а $f''(x_0)$ в этой точке > 0, то точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$; если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Рисунок 93 – Второе достаточное условие экстремума

1. Найти производную функции $f'(x)$
2. Найти критические точки *($f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует)*
3. Найти вторую производную $f''(x)$
4. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то –минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум надо искать с помощью первой производной;
5. Вычислить значения функции в точках экстремума

Рисунок 94 –Правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной

Пример 96. Исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной.

$$y = x^3 - 3x^2.$$

Решение

1. $D(y) = R$.

2. $y' = 3x^2 - 6x$.

3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 2$ - критические точки (обе принадлежат $D(y)$).

4. $y'' = 6x - 6$.

5. $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ – точка максимума;

$y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow x = 2$ – точка минимума.

6. $y_{max} = y(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 = 0$, $y_{min} = y(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 = -4$.

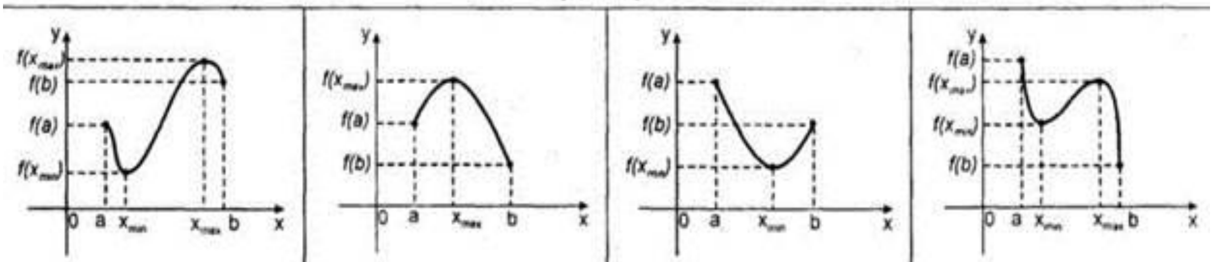
Рисунок 95 – Решение примера 96

6.5 Наименьшее и наибольшее значения функции

Свойство

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, которые принадлежат этому отрезку, или на концах отрезка.

Примеры



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

Рисунок 96 – Изображения наибольших и наименьших значений функции

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.
2. Найти значения функции на концах промежутка.
3. Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Пример 97. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$, [1; 4].

Решение.

$f'(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x-3)$. Производная определена всюду.

Две стационарные точки:

$x_1 = 3/2 \in [1;4]$

$x_2 = 0 \notin [1;4]$ – точка нас не интересует.

Сравниваем значения исходной функции в выбранной точке и на концах отрезка:

$$f(1) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\cdot 27}{3\cdot 8} - \frac{3\cdot 9}{4} = \frac{9}{2} - \frac{27}{4} = -\frac{9}{4}, \quad f(4) = \frac{4\cdot 64}{3} - 3\cdot 16 = \frac{112}{3}.$$

$$\underset{[1;4]}{f_{наим}}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}; \qquad \underset{[1;4]}{f_{наиб}}(4) = \frac{112}{3}.$$

Рисунок 97 – Решение примера 97

Пример 98. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$, $[-3; 0]$.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая. Найдем критические точки. Вычислим производную и приравняем к нулю:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1\right)' = x^2 + x + 0 = x(x+1) = 0..$$

Получаем критические точки: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$. Первая лежит на конце отрезка, последняя принадлежит отрезку $[-3, 0]$.

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке

$y(0) = 1,\ y(-1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{6},\ y(-3) = -\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 1 = -\frac{7}{2}.$

Наименьшее значение функции -7/2, наибольшее 7/6.

Рисунок 98 – Решение примера 98

Пример 99.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5x - 5\sqrt{2}\sin x \quad \text{на отрезке} \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Найдем производную заданной функции:

$$\left(3 - \frac{5\pi}{4} + 5x - 5\sqrt{2}\sin x\right)' = 0 - 0 + 5 - 5\sqrt{2}\cos x$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - 5\sqrt{2}\cos x = 0$$

$$\cos x = \frac{-5}{-5\sqrt{2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Точка $\frac{\pi}{4}$ принадлежит заданному интервалу, вычислим значения функции в точках: $0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}$

$$y(0) = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5 \cdot 0 - 5\sqrt{2} \cdot \sin 0 = 3 - \frac{5\pi}{4}$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5 \cdot \frac{\pi}{4} - 5\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 3 - 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5 \cdot \frac{\pi}{3} - 5\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = 3 - \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В ответе должно быть целое число, значит, наименьшее значение функции равно -2. Для проверки можно полученные значения вычислить приближенно, и вы убедитесь, что они больше -2.

Ответ: -2

Рисунок 99 – Решение примера 99

6.6 Прикладные задачи на экстремум

Задачи, решение которых привело к понятию производной функции, ставились с давних пор. Здесь выделяются два круга, казалось бы, совершенно не связанных между собой задач. Первый – нахождение наибольших и наименьших значений, или как сейчас говорят, экстремумов различных величин. Второй – проведение касательных к кривым и вычисление скорости. Задачи на экстремум постоянно возникали в практической деятельности, поскольку люди всегда интересовались вопросами: Что больше? Кто быстрее? Что длиннее?

В Древней Греции задачи на отыскание наибольших и наименьших значений были достаточно популярны. Задачи такого типа содержатся в трудах Евклида и Архимеда. Но в древности и в средние века такие задачи решались геометрическими и механическими способами, не связанными общей идеей. И только в 17 веке было обнаружено, что все эти задачи можно решить единым методом, используя бесконечно малые величины. Развитие этого метода в трудах Ньютона и Лейбница привело к созданию математического анализа, появление которого широко раздвинуло границы применения математики.

В 1638 году Пьер Ферма, используя алгебраические методы, сформулировал необходимое условие существования в точке экстремума. На современном языке оно звучит так: если производная в точке равна нулю или не существует, то в этой точке функция имеет экстремум. В 1683 году Лейбниц печатает статью «Новый метод максимумов и минимумов», в которой содержится достаточный признак экстремума функции: если в точке X первая производная функции равна нулю, а вторая отлична от нуля, то X – точка экстремума функции, причем, если вторая производная в этой точке положительна, то X – точка минимума; если отрицательна, то X – точка максимума.

Работы Лейбница составляют фундамент математического анализа. В основу новой науки он положил понятие дифференциала. Лейбниц дал правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения, дроби, степени. Разработанными Лейбницем алгоритмами и обозначениями мы пользуемся и поныне, как и большинством введенных им математических терминов: функция, переменная, постоянная, координаты, абсцисса, алгоритм, дифференциал. Многие из этих терминов употреблялись и раньше, но не имели того конкретного значения, которое придал им Лейбниц. После его работ и трудов его ближайших сподвижников не только появился математический анализ, но вся математика вступила в новую эпоху.

Замечательный русский поэт Валерий Брюсов посвятил ученому такие строки:

О Лейбниц, о мудрец, создатель вещих книг!
Ты выше мира был, как древние пророки.
Твой век, дивясь тебе, пророчеств не достиг
И с лестью смешивал безумные упреки.

Обратимся к экстремальным задачам, для решения которых применяется теорема, сформулированная Лейбницем.

Уже в глубокой древности возникали ситуации, когда требовалось решать задачи на экстремум. Одна из первых, дошедших до нас, задач подобного рода связана с легендой об основании города Карфагена. Как повествует в «Энеиде» римский поэт Вергилий, давным-давно финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом преданных ей людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе.

Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Король нубидийцев Ярб воинственно и презрительно разговаривал с непрошеной гостьей. Он принял драгоценности, предложенные Дидоной для покупки земли, но решительно заявил, что взамен он согласен уступить ей лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Царевна безропотно согласилась. Ярб понял хитрость и коварство финикиянки слишком поздно: Дидона приказала разрезать шкуру на очень тонкие ремни и сшить их. Получив, таким образом, тонкий, но очень длинный ремень, она отгородила им от берега значительную территорию. Простодушный, но честный Ярб не стал отказываться от данного слова. А Дидона на этом месте основала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская крепость была названа «Бирса», что на языке обитателей Карфагена означает «бычья шкура».

Легенда относит события к 825 году до н.э. и нам, конечно, судить об их достоверности трудно. Но для нас интересна математическая задача, которую, видимо, пришлось решать Дидоне. Предположим, что длина изготовленного тонкого ремня равна 600м. Тогда на современном языке задача Дидоны формулируется так:

Задача 34. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу моря, а три другие огораживаются ремнем, длина которого 600м. Каковы должны быть стороны этого участка, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Пусть одна сторона прямоугольника равна x м, тогда другая сторона равна $(600 - 2x)$м. Площадь прямоугольника будет функцией от переменной x: $y = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$, область определения которой $(0; 300)$.

Найдем наибольшее значение этой функции на промежутке $(0; 300)$.
Производная этой функции $y' = 600 - 4x$. Критическая точка найдется из уравнения $600 - 4x = 0$ $x = 150$.
Исследуем знак производной на каждом интервале: $(0; 150)$ $y' > 0$, $(150; 300)$ $y' < 0$.

Так как при переходе через точку $x = 150$ производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = 150$ функция имеет максимум. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник со сторонами 150 м и 300 м. Найдем площадь огороженного участка земли $S = 45000$ м^2.

Эта задача называется задачей Дидоны при условии, что участок имеет форму прямоугольника. Решение подобных задач, если форма границы – кривая линия вызвало к жизни новый важный раздел математики – вариационное исчисление, в котором основным понятием является не функция, а функционал. В настоящее время этот раздел плодотворно используется во многих областях математики, физики, техники, экономики.

В повседневной жизни, в практических задачах часто возникает необходимость определения условий, при которых мы получаем наилучшие результаты труда.

Задача 35. Из прямоугольного листа жести размером 25 х 40 см надо изготовить открытую коробку наибольшего объема. Для изготовления коробки надо вырезать квадратные уголки. В зависимости от длины вырезаемого квадрата получаются коробки, имеющие различные объемы. (Преподаватель демонстрирует три коробки, полученные при вырезании квадратов разных размеров и их развертки.) Поэтому необходимо рассчитать размеры вырезаемых квадратов, при которых коробка имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через х. Дном коробки является прямоугольник, стороны которого равны $a = 25 - 2x$ и $в = 40 - 2x$.

Высота коробки равна х.

Следовательно, объем коробки равен $V = (25 - 2x)(40 - 2x)x$, т.е. является функцией от переменной х.

$y = (25 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$.

Область определения этой функции промежуток (0; 12,5).

Найдем экстремумы этой функции.

$y' = (4x^3 - 130x^2 + 1000x)' = 12x^2 - 260x + 1000$,

$12x^2 - 260x + 1000 = 0$.

Критическая точка функции $x_1 \approx 16,7$ – не входит в область определения функции.

Итак, $x_2 = 5$

Определим знак производной в промежутках слева и справа от критической точки $x = 2$:

(0; 5) $y' > 0$, (5; 12,5) $y' < 0$.

Так как при переходе через точку $x = 5$ производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = 5$ функция $y = (25 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$ имеет максимум.

Следовательно, коробка будет иметь наибольший объем при вырезании квадратов со стороной 5 см. Найдем объем полученной при этом коробки: $V(5) = 2250см^3$.

В электротехнике большое значение имеют задачи на поиск оптимального решения: расчет параметров электротехнических приборов, при которых в цепи будет наименьшее сопротивление или наибольшая мощность.

Задача 36. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно

2Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Обозначим сопротивление прибора R = x. С учетом данных задачи составим функцию $y = P(x) = \frac{9x}{(2+x)^2} = \frac{9x}{x^2+4x+4}$. Область определения этой функции промежуток (0; + ∞). Исследуем полученную функцию на экстремум.

$$y' = P'(x) = \left(\frac{9x}{x^2+4x+4}\right)' = \frac{36-9x^2}{(x^2+4x+4)^2}$$

Критические точки найдутся из уравнения $36 - 9x^2 = 0$.

$x_1 = -2$ - точка не входит в область определения функции, $x_2 = 2$.
Найдем знак производной на каждом промежутке:

(0; 2) $y' > 0$, (2; $+\infty$) $y' < 0$

Так как при переходе через точку x = 2 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом.

Ответ: 2 Ом.

Задача 37. Требуется соорудить канал с поперечным сечением ABDC, где AB=CD, AB и CD перпендикулярны к BD. Сумма длин AB, BD и CD должны быть равной P метрам.

Спрашивается, какими надо сделать ширину и глубину канала, чтобы площадь его поперечного сечения, т.е. площадь прямоугольника с вершинами в точках A, B, C, D, оказалась бы наибольшей?

Поскольку мы еще не знаем, какими надо сделать глубину и ширину канала, то естественно обозначить эти переменные какими-либо подходящими буквами. Например, положить AB = x и BD = y. Далее надо выразить через x и y ту величину, наибольшее значение которой нам надо найти, т.е. площадь сечения канала. Эта площадь выразится произведением xy, т.е. будет зависеть от двух переменных величин x и y. Но наше исследование облегчится, если нам удастся выразить площадь в зависимости только от одной переменной. Очевидно, что в данном случае это сделать легко, т.к. по условию задачи 2x + y = P.

Решение.

Пусть AB = x, тогда и CD = x, а BD = P - 2x. Площадь сечения будет равна x (P - 2x). Задача сводится к определению наибольшего значения функции x (P - 2x), которая представляет собой многочлен второй степени, имеющий вид -2x2+Px. Очевидно, что

$$-2x^2+Px=-2(x^2-\frac{P}{2}x)=-2(x^2-\frac{P}{2}x-\frac{P^2}{16}-\frac{P^2}{16})=-2[(x-\frac{P}{4})^2-\frac{P^2}{16}]=\frac{P^2}{8}-2(x-\frac{P}{4})^2.$$

Отсюда видно, что наибольшая площадь получится в том случае, когда мы сделаем глубину канала x = P/4. Тогда окажется ширина y равной P/2, а наибольшая площадь равной P2/8.

Ответ: P2/8.

Задача 38.

15.181. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе (рис. 15.5). Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

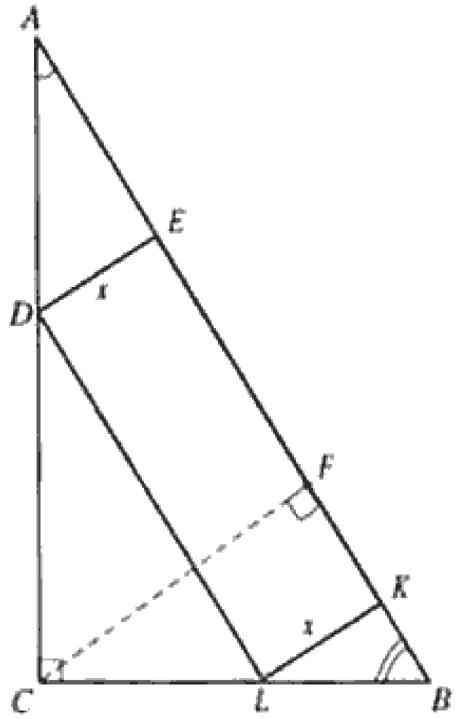


Рис. 15.5

Решение.

Рассмотрим прямоугольник $DEKL$, вписанный в ΔABC, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. Если $DE = LK = x$, то

$AE = x\operatorname{ctg}30° = x\sqrt{3}$, $BK = x\operatorname{ctg}60° = x\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$EK = AB - AE - BK = 24 - x\sqrt{3} - x\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 24 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}x$. Площадь прямоугольника $DEKL$: $S(x) = x\left(24 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}x\right) = 24x - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}x^2$. $S'(x) = 24 - \dfrac{8\sqrt{3}}{3}x = 0$

при $x = 3\sqrt{3} < CF = 6\sqrt{3}$. Так как ветви параболы направлены вниз, то свое наибольшее значение $S(x)$ принимает при $x = 3\sqrt{3}$, $EK = 24 - 12 = 12$ см.

Ответ: $3\sqrt{3}$ и 12 см.

Рисунок 100 - Решение задачи 38

6.7 Задачи для самостоятельного решения

Задача 39.

Статистическим путем установлено что объём продукции цеха u(t) в течение рабочего дня описывается формулой: u(t)= $-\dfrac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 160t + 240$**,** где- время , ч. Найти в какой момент времени производительность труда будет наибольшей?

Задача 40.

Грузовой самолет движется по закону: $S(t) = -t^3 + 6t^2 + 37t + 30$ Найти наибольшую скорость самолета и момент времени , в который скорость была максимальной.

Задача 41.

Фирме по производству металлопластиковых окон требуется изготовить окно прямоугольной формы, израсходовав при этом 20 м профиля. Какими должны быть размеры окта, чтобы оно пропускало максимальное количество света?

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q усл. ед. C(Q)- функция затрат P(Q)- функция цены.

$$C(Q) = Q^3 - 15Q + 7$$

$$P(Q) = \frac{2}{3}Q^2 - Q$$

.

Найти максимальную прибыль предприятия. Объём и цену продукции, соответствующие максимальной прибыли.

6.8 Полное исследование функции с помощью производной и построение графиков

Алгоритм (схема) исследования функции

1. Найти область определения функции D(y):

а) для многочленов: $x \in (-\infty;\ +\infty)$;

б) для дробных функций учесть, что знаменатель $\neq 0$;

в) для иррациональных функций учесть: подкоренное выражение ≥ 0;

г) для логарифмических функций учесть: все, что есть под знаком логарифма, > 0.

2. Исследовать на четность / нечетность:

а) $f(-x) = f(x)$ - четная функция, график симметричен относительно оси Oy;

б) $f(-x) = -f(x)$ - нечетная функция, график симметричен относительно начала координат (0; 0);

в) $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ - ни четная, ни нечетная функция, НЕТ симметрии (функция общего вида).

3. Найти точки пересечения с осями координат (если это возможно):

а) график $\cap\ OX \Rightarrow y = 0$, тогда найдите x ;

б) график $\cap\ OY \Rightarrow x = 0$, тогда найдите y.

4. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

а) найти y' ;

б) $y' = 0$ и найти x (если это возможно);

в) D(y) из пункта (1) разбить значениями x из пункта (4б), если таковые есть;

г) заполнить таблицу 1.

Таблица 1 – Исследование функции на монотонность и экстремум

Промежутки D(у) из пункта (1) разбить значениями х из пункта (4б), если таковые есть	
Знаки производной на каждом промежутке	
«поведение» графика функции	

Если $y' > 0,$ то $y \uparrow$, а если $y' < 0,$ то $y \downarrow$. Определить точки экстремума: максимум или минимум.

5. Исследовать функцию на выпуклость и перегиб:

а) найти y'' ;

б) $y'' = 0$ и найти х (если это возможно);

в) D(у) из пункта (1) разбить значениями х из пункта (5б), если таковые есть;

г) заполнить таблицу 2.

Таблица 2 – Исследование функции на выпуклость и перегиб

Промежутки D(у) из пункта (1) разбить значениями х из пункта (5б), если таковые есть	
Знаки производной на каждом промежутке	
«поведение» графика функции	

Если $y'' > 0,$ то $y \cup$, а если $y'' < 0,$ то $y \cap$. Определить точки перегиба.

6. Схематично построить график функции, используя данные по исследованию функции.

Задание: исследовать функции с помощью производной и построить графики.

Задача 42. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение.

1. Область определения функции D(у) = R, так как данная функция - многочлен.

2. Функция ни четная, ни нечетная (смотрите степени), симметрии относительно оси Ох и точки О(0;0) нет.

3. Точки пересечения с осями координат найти затруднительно.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

1) находим производную $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9$;

2) приравниваем производную к нулю: $y' = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

3) заполняем таблицу (таблица 3):

Таблица 3 – Исследование функции задачи 42 на монотонность и экстремум

x	(-∞; 1)	1	(1; 3)	3	(3; +∞)
y′	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$y_{max} = 1$	$\searrow$	$y_{min} = -3$	$\nearrow$

5. Исследуем функцию на выпуклость и перегиб.

1) находим вторую производную $y'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$;

2) приравниваем вторую производную к нулю: $y'' = 0$, $6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$;

3) заполняем таблицу 4:

Таблица 4 – Исследование функции задачи 42 на выпуклость и перегиб

x	(-∞; 2)	2	(2; +∞)
y″	-	0	+
y	∩	$y_{перег} = -1$	∪

6. По проведенному исследованию строим график функции:

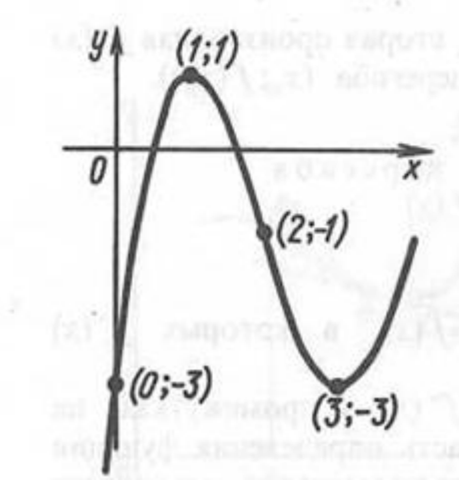


Рисунок 101 – График функции задачи 42

Задача 43. $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Решение. 1) D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$, т. к. дан многочлен

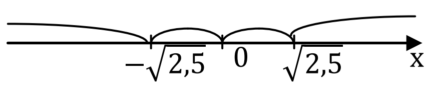
2) $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$ функция четная, график симметричен относительно оси Оу

3) а) График $\cap OX \Rightarrow y = 0$, тогда $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Т.к. $x^2 = t$ то $t^2 - 5t + 4 = 0$, $D = 9$, $t_{1,2} = 4; 1$

$\leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm 1$ и $x^2 = 4 \leftrightarrow x = \pm 2$ график $\cap OX$ в точках (-1; 0), (1; 0), (-2; 0) и (2; 0)

б) График $\cap OY \Rightarrow x = 0$, тогда $y = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4$ $\leftrightarrow$ график $\cap OY$ в точке (0; 4)

4) $y' = 4x^3 - 10x$;



$4x^3 - 10x = 0; x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2,5} \approx \pm 1,6$.

Таблица 5 – Исследование функции задачи 43 на выпуклость и перегиб

x	$-\infty; -\sqrt{2,5}$	$-\sqrt{2,5}$	$-\sqrt{2,5}; 0$	0	$0; \sqrt{2,5}$	$\sqrt{2,5}$	$\sqrt{2,5}; +\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+
	↓	-2,25 min	↑	4 max	↓	-2,25 min	↑

4) $y'' = 12x^2 - 10$; $12x^2 - 10 = 0$; $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0{,}9$.

Таблица 4 – Исследование функции задачи 43 на выпуклость и перегиб

	$-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{6}}; +\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	∪	0,5 перегиб	∩	0,5 перегиб	∪

6) т.к. D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$, значит, точек разрыва нет, следовательно, и асимптот нет.

7) Строим график

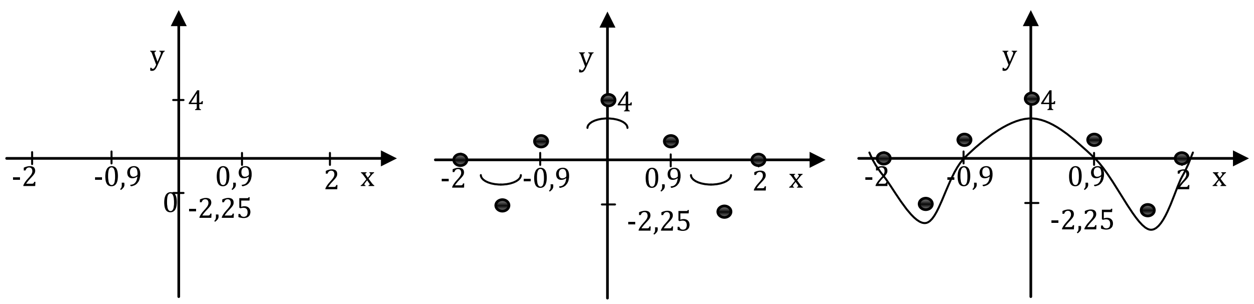
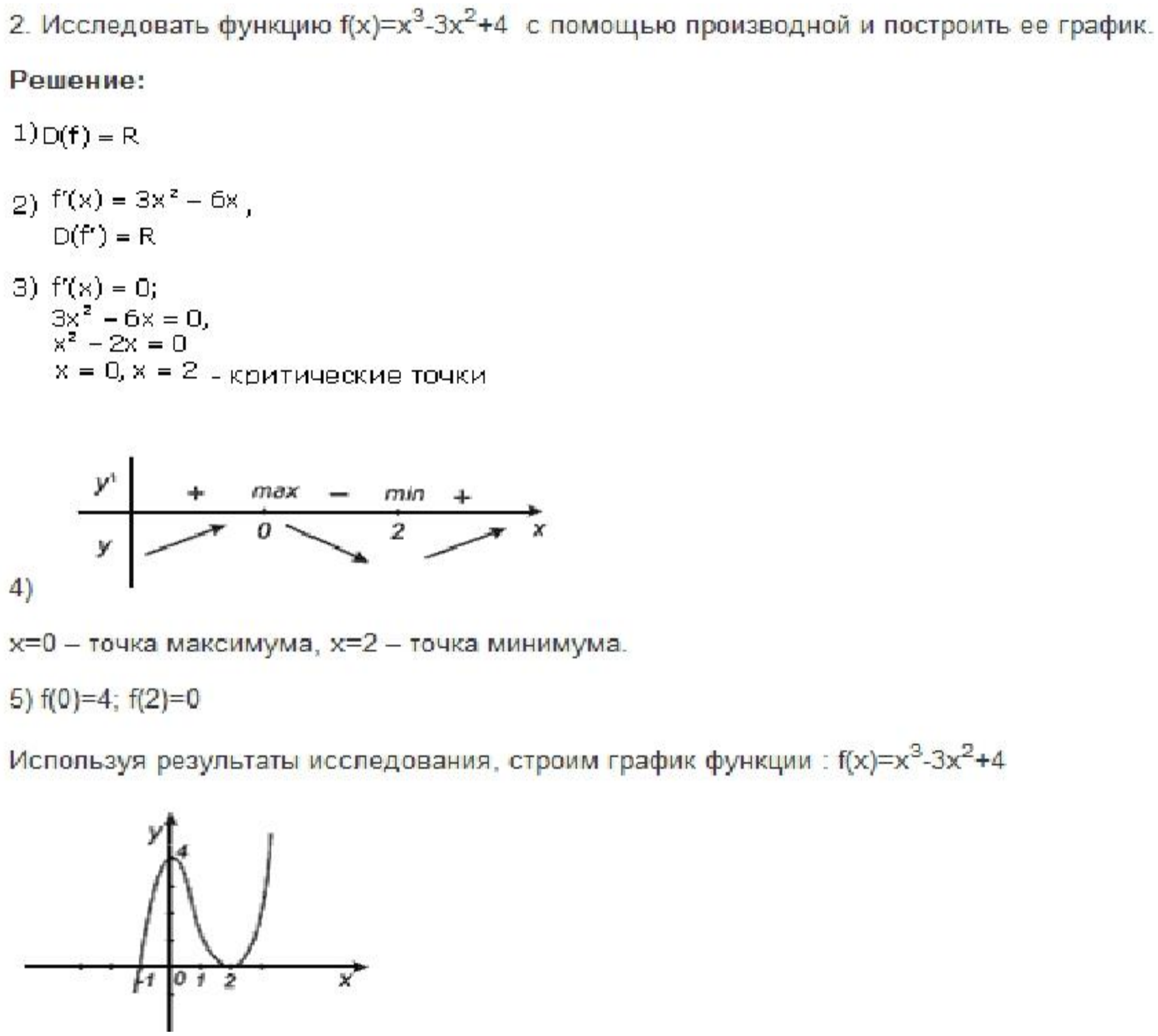


Рисунок 102 – График функции задачи 43

Задача 44. Задачу и ее решение смотрите на рисунке 103.



2. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x^2+4$ с помощью производной и построить ее график.

Решение:

1) $D(f) = R$

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
$D(f') = R$

3) $f'(x) = 0$;
$3x^2 - 6x = 0$,
$x^2 - 2x = 0$
$x = 0, x = 2$ - критические точки

4)

x=0 – точка максимума, x=2 – точка минимума.

5) f(0)=4; f(2)=0

Используя результаты исследования, строим график функции : $f(x)=x^3-3x^2+4$

Рисунок 103 – Решение задачи 44

Задача 45. Задача и ее решение указаны на рисунке 104.

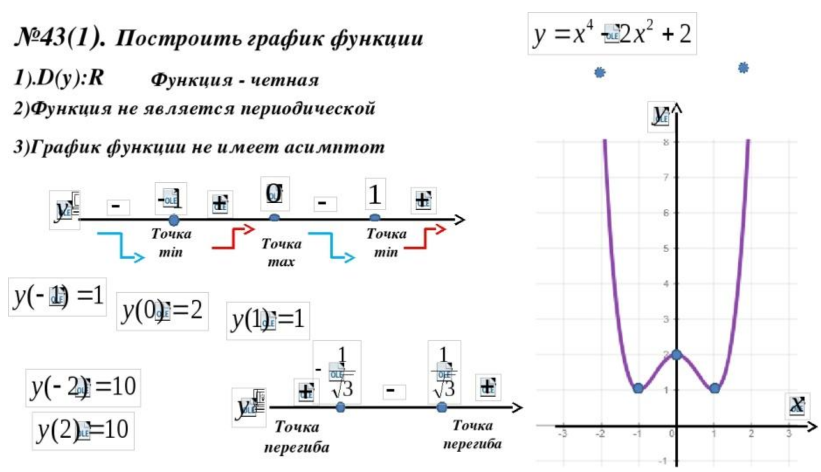


Рисунок 104 - Решение задачи 45

На рисунке 105 представлен график биквадратного трехчлена с отрицательным старшим слагаемым. Сравните графики функций, представленных на рисунках 104 и 105.

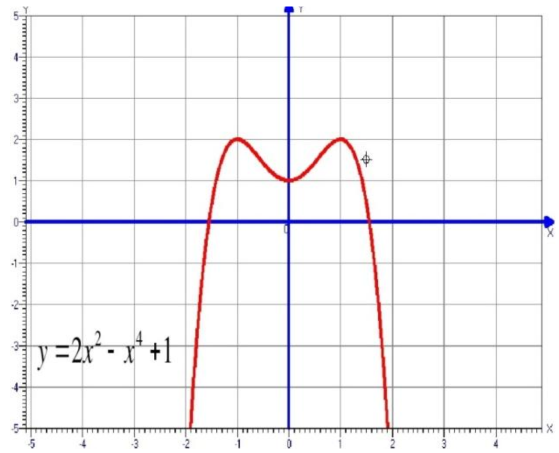


Рисунок 105 - График биквадратного трехчлена с отрицательным старшим слагаемым

Далее представлены исследования и графики более сложных функций.

Задача 46. Условие задачи и ее решение представлены на рисунке 106.

5. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

I. $D(y) = (-\infty, +\infty)$; общего вида; непериодична; непрерывна; $y = 0$ при $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$;

$y(x)$ отрицательна на интервале $(2, 3)$ и положительна вне этого интервала;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = 1$, следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

II. $y' = \dfrac{(2x-5)(x^2+1) - 2x(x^2-5x+6)}{(x^2+1)^2} = 5\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} = 0$ при $x = 1 \pm \sqrt{2}$;

$x_3 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.41$, $x_4 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.41$.

x	$-\infty < x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x < +\infty$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{7+5\sqrt{2}}{2} \approx 7.04$; $y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{7-5\sqrt{2}}{2} \approx -0.04$.

III. $y'' = 5\left[(x^2-2x-1)(x^2+1)^{-2}\right] = 5\left[(2x-2)(x^2+1)^{-2} - 2 \cdot 2x \cdot (x^2-2x-1)(x^2+1)^{-3}\right] =$

$= 5\dfrac{(2x-2)(x^2+1) - 4x(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^3} = 10\dfrac{(x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^3} = 10\dfrac{-x^3+3x^2+3x-1}{(x^2+1)^3} =$

$= -10\dfrac{(x^3+1) - 3x(x+1)}{(x^2+1)^3} = -10\dfrac{(x+1)(x^2-x+1-3x)}{(x^2+1)^3} = -10\dfrac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$.

$y'' = 0$ при $x_5 = -1$, $x_6 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.27$, $x_7 = 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, каждая из этих точек – абсцисса точки перегиба.

Распределение знаков второй производной очевидно:

+ – + –.

Окончательный график функции:

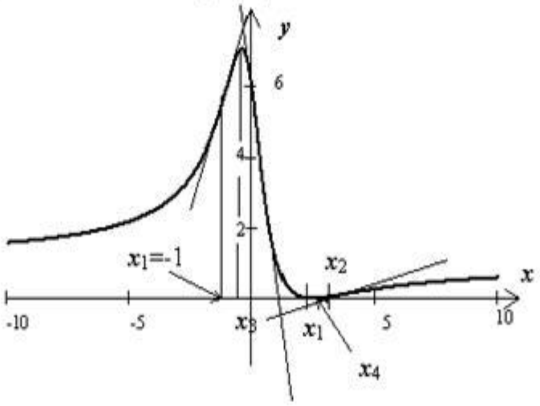


Рисунок 106 – Решение задачи 46

Задача 47. Исследовать «Трезубец Ньютона» с помощью производной и построить его график.

Решение задачи 47 представлено на рисунке 107.

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \quad \textit{(трезубец Ньютона)}.$$

◄ 1. О.О.Ф. — вся числовая ось, исключая точку $x = 0$.

2. Точка разрыва функции $x = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0+0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

так что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной (*функция общего положения*); непериодическая.

4. Полагая $y = 0$, получаем $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ или $\frac{x^3+1}{x} = 0$, откуда $x = -1$, т. е. график функции пересекает ось Ox в точке $(-1, 0)$.

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \pm\infty$ — наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. $y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — критическая точка. Вторая производная функции $y'' = 2 + \frac{2}{x^3} > 0$ в точке $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, так что $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — точка минимума.

7. Вторая производная $y'' = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$ обращается в нуль в точке $x = -1$ и меняет свой знак с «+» на «−» при переходе через эту точку. Следовательно, точка $(-1, 0)$ — точка перегиба кривой. Для $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (0, +\infty)$ имеем $y'' > 0$, т. е. выпуклость кривой направлена вниз; для $-1 < x < 0$ имеем $y'' < 0$, т. е. выпуклость кривой направлена вверх.

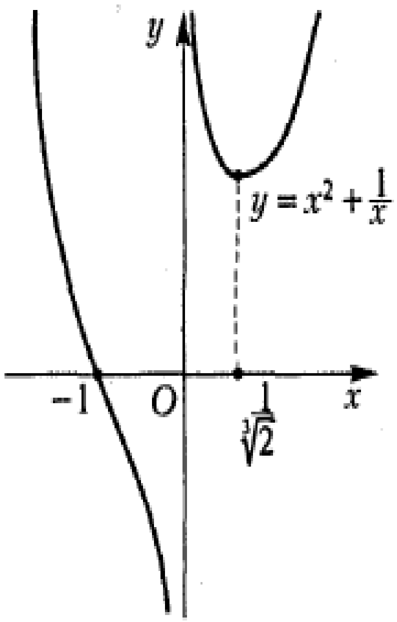


Рис. 34

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	−	−	−	Не существует	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	Не существует	+	+	+
$f(x)$	↘	Точка перегиба $f(-1) = 0$	↘	Не существует. Вертикальная асимптота $x = 0$	↘	$\min f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 1{,}89$	↗

Рисунок 107 – Решение задачи 47

6.9 Вопросы для самоконтроля по главе 6

1. Перечислите этапы исследования функции.
2. Что и как можно исследовать с помощью производной?
3. Как определить промежутки возрастания или убывания функции?
4. Как найти точки минимума, максимума функции?
5. Как определить промежутки выпуклости графика функции?
6. Сформулируйте правило нахождения точек перегиба функции.
7. Как найти область определения дробно – рациональной функции?
8. Как найти область определения иррациональной функции?
9. Что является областью определения многочлена (рациональной функции)?
10. Как установить, является функция четной, нечетной?
11. Какова особенность расположения графика четной функции в прямоугольной системе координат?
12. Какова особенность расположения графика нечетной функции в прямоугольной системе координат?
13. Как найти точки разрыва функции?
14. Перечислите этапы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.
15. Как находятся точки экстремума функции с помощью второй производной?

Заключение

Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание какого – либо процесса, а именно

- неравномерное механическое движение;
- переменный ток;
- химические реакции;
- радиоактивный распад;
- изменение атмосферного давления в зависимости от высоты;
- рост народонаселения (любой популяции);
- размножение бактерий и другие процессы.

Производная и ее приложения – важная тема в математике. Производная имеет большое значение в исследовании не только функций, но и процессов науки и техники, в возможности конструирования, составления математической модели по реальным событиям, тем самым помогая решать очень важные задачи.

Ученые, внёсшие значительный вклад в развитие дифференциального исчисления:

Николо Тарталья (около 1499 – 13 или 14 декабря 1557) – итальянский математик. Труды посвящены вопросам математики, механики, баллистики, геодезии, фортификации и др.

Галилео Галилей (15 февраля 1564 – 8 января 1642) – итальянский философ, математик, физик, механик и астроном, оказавший значительное влияние на науку своего времени.

Рене Декарт (31 марта 1596 – 11 февраля 1650) – французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике.

Жиль Роберваль (8 августа 1602 – 27 октября 1657) – выдающийся французский математик, астроном и физик. Занимался проблемами бесконечно малых, пределами, проблемой квадратуры круга и вычислением объёмов различных тел. Роберваль нашел метод построения касательных, рассматривая кривые, как результат перемещения точки, которое складывалось из нескольких более простых движений.

Джеймс Грегори (ноябрь 1638 – октябрь 1675) – шотландский математик и астроном. Один из основоположников математического анализа, предшественник Ньютона, который называл его в числе своих учителей и вдохновителей. Разработал приём вычисления площади сектора круга, гиперболы и эллипса; попытался доказать, что круговые и логарифмические функции не могут быть сведены к алгебраическим операциям. Для вычисления площадей пользовался рядами. Грегори вывел формулу приближённого интегрирования, впоследствии вновь найденную английским математиком Т. Симпсоном.

Исаак Ньютон (25 декабря 1642(4 января 1643) – 20 (31) марта 1727) – великий английский физик, математик и астроном. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он описал закон всемирного тяготения и так называемые Законы Ньютона, заложившие основы классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление (автор знаменитого бинома Ньютона), теорию цветности и многие другие математические и физические теории.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (21 июня (1 июля) 1646 – 14 (25) ноября 1716) – немецкий философ, математик, юрист, дипломат. Независимо от Ньютона создал математический анализ – дифференциальное и интегральное исчисление, сформулировал основные понятия и четко указал на взаимно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования.

Якоб Бернулли (27 декабря 1654 – 16 августа 1705) – швейцарский математик. Внёс огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления.

Гийом Франсуа Лопиталь (1661 – 1704) – французский математик, автор первого учебника по математическому анализу «Анализ бесконечно малых» (1696). Ему принадлежит также решение ряда задач, в том числе задача о кривой, по которой должен двигаться груз, прикрепленный к цепи и удерживающий в равновесии подъемный мост. Решение этих задач помогло ему стать в один ряд с Ньютоном, Лейбницем и Бернулли.

Леонард Эйлер (4 (15) апреля 1707 – 7 (18) сентября 1783), немецкий и русский математик, механик и физик. Ему принадлежат сочинения о дифференциальном и интегральном исчислениях, где рассматриваются не только данные разделы математики, но и развивается теория обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. Эйлеру принадлежит первое изложение вариационного исчисления, он является создателем теории специальных функций, известны его работы по теории чисел.

Жозеф Луи Лагранж (25 января 1736 – 10 апреля 1813) – французский математик и механик итальянского происхождения. Лучший математик 18 века. Внёс огромный вклад в развитие анализа, теории чисел, теорию вероятностей и численные методы, создал вариационное исчисление.

Список использованных источников

Основные источники:

1 Кундышева, Е.С. Математика : учебник / Е.С. Кундышева. - 4-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. - 562 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр.: с. 552-553. - ISBN 978-5-394-02261-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452840

Дополнительные источники**:**

2 Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Интернет – ресурсы:

3 http: // www.math test.ru.

4 http: // www.webmath.ru.

5 http: // e - scince.ru.

6 http: // mathem lib.ru.

Приложение А

Приложения производной в физических процессах

Рисунок А.1 – Производная в физике

Рисунок А.2 – Область определения производной

Приложение Б

Производная в задачах механики

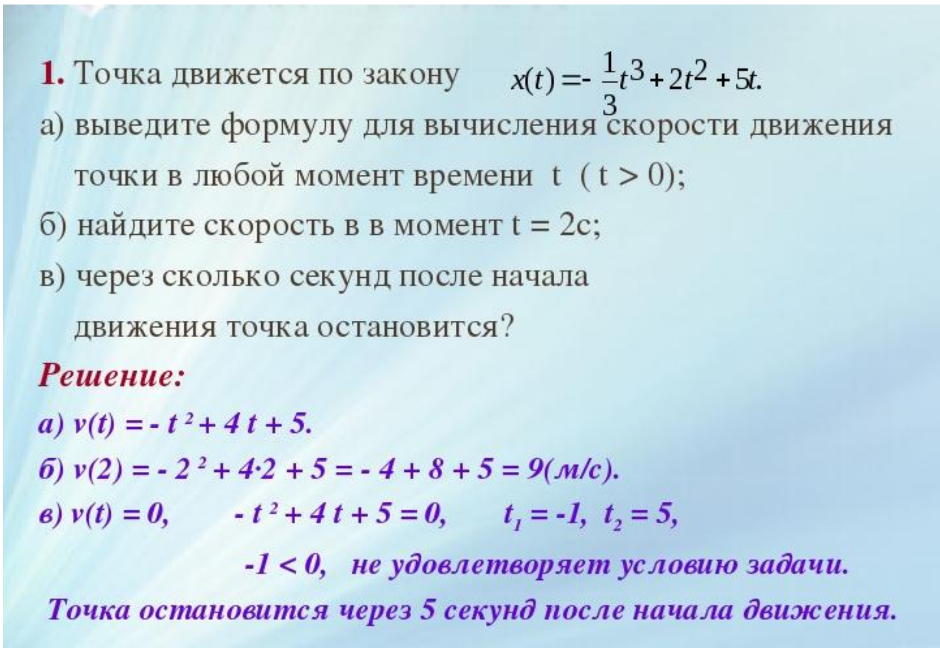


Рисунок Б.1 – Применение производной в механическом движении

Рисунок Б.2 – Применение производной при вертикальном движении тела

Приложение В

Производная в задачах физики

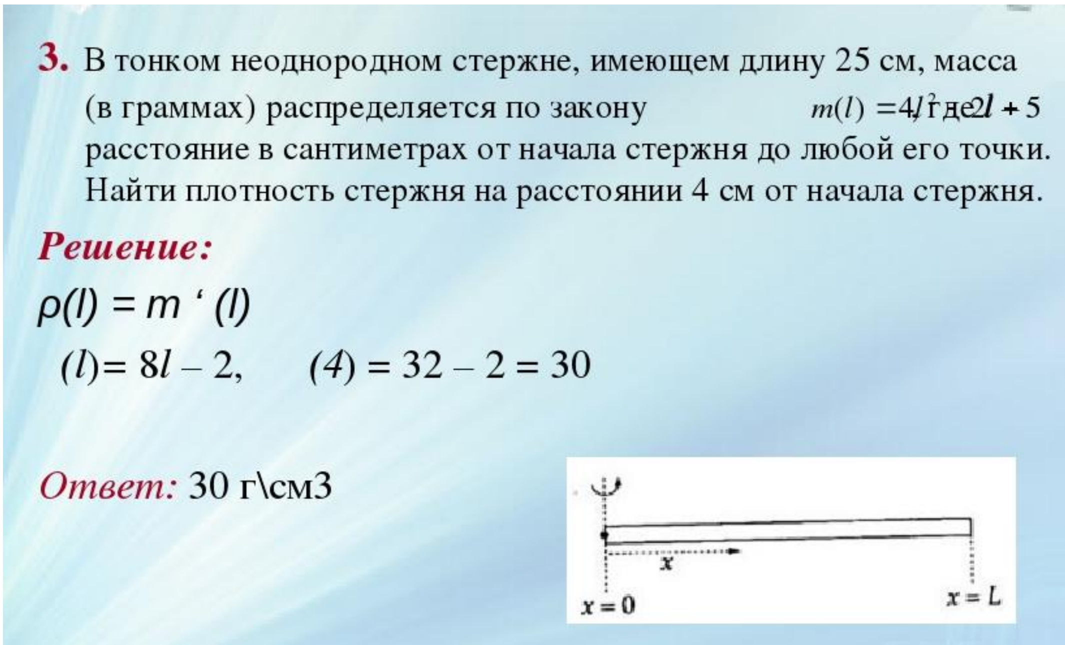


Рисунок В.1 –Применение производной при определении плотности неоднородного стержня

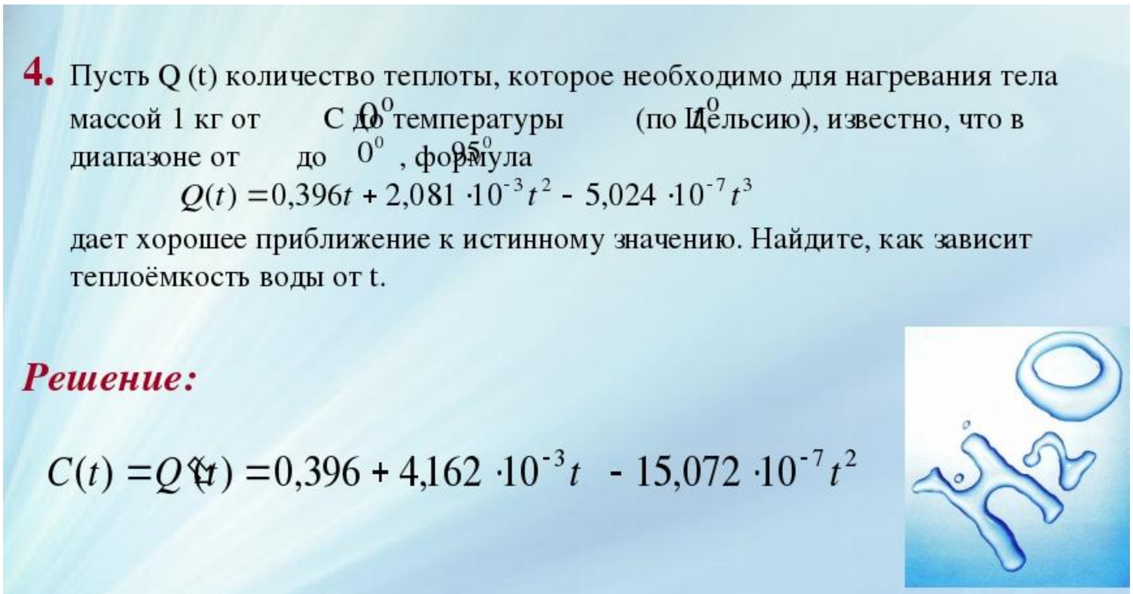


Рисунок В.2 –Применение производной для определения теплоемкости

Приложение Г

Производная в задачах электротехники

- Сила тока- предел отношения электрического заряда, прошедшего через проводник, к промежутку времени его прохождения.
    - $I=\lim \Delta q/\Delta t(\Delta t \to 0)= q'(t)$
- ЭДС индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность ограниченную данным контуром.
    - $e = -\Phi'(t)$

Рисунок Г.1 - Физический смысл производной в электродинамике

5. Количество электричества, протекающее через проводник, задаётся формулой q(t) = t+4/t. В какой момент времени ток в цепи равен нулю?

Решение:

$I(t) = q'(t)$, $I(t) = 1 - 4/t^2$,

$1 - 4/t^2 = 0$

Отсюда, t = 2 или t = -2; t = -2 не подходит по условию задачи.

Ответ: t = 2.

Рисунок Г.2 – Применение производной для нахождения количества электричества

Приложение Д

Производная в механическом движении

Скорость тела массой 5 т возрастает по закону $\upsilon = 0{,}1t^3 + 0{,}2t$.

Определить равнодействующую всех сил, действующих на него в момент времени 2 с.

Решение

$$F = ma = m\upsilon'$$

$$F = m(0{,}1t^3 + 0{,}2t)' = m(0{,}3t^2 + 0{,}2)$$

$$F = 5000(0{,}3 \cdot 4 + 0{,}2) = 7000(H) = 7кH$$

Рисунок Д.1 - Производная в динамике

- **Прямолинейное движение.**

$$x = x_0 +(-)\, v_0 t +(-)\, at^2/2$$

- **Движение по окружности.**

$$\varphi = \varphi_0 +(-)\, \omega_0 t +(-)\, \beta t^2/2$$

- **Колебания.**

$$X = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = x'(t) \qquad a = v'(t)$$

Рисунок Д.2 – применение производной в различных видах движения

Приложение Е

Производная в оптике и в химии

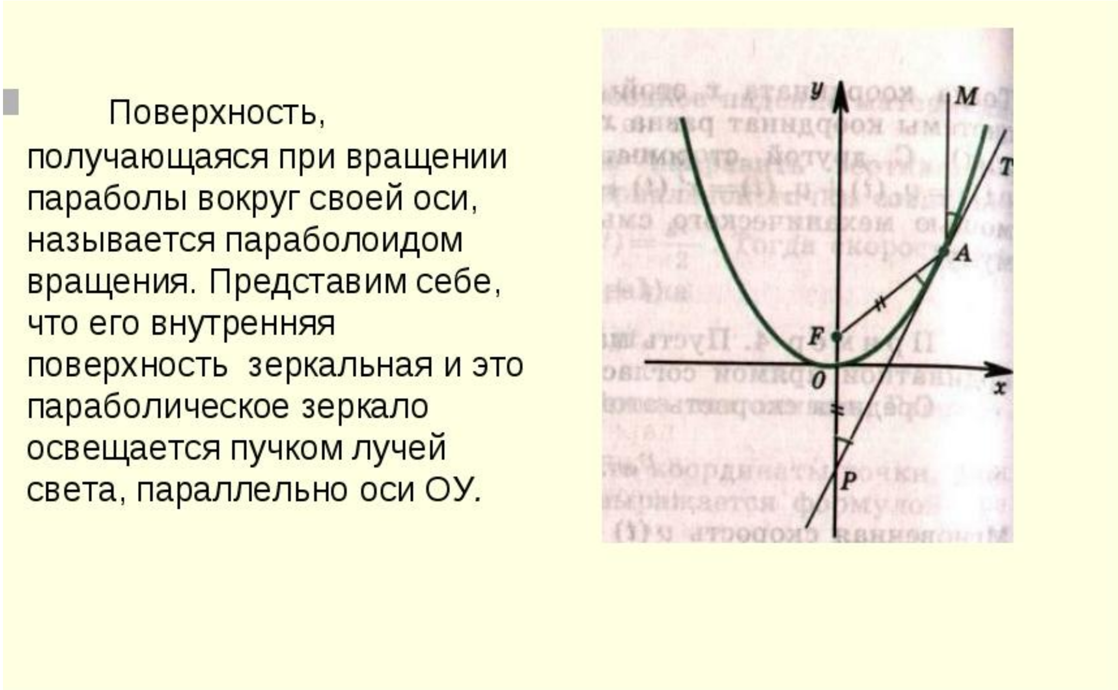


Рисунок Е.1 – Применение производной в оптике

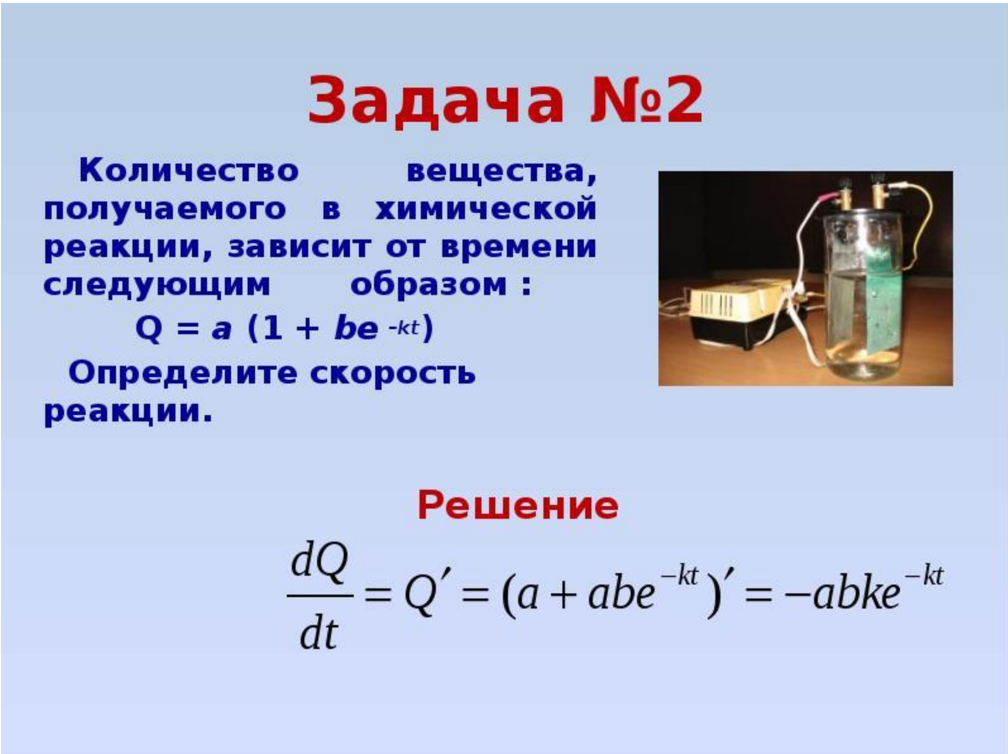


Рисунок Е.22 – Применение производной для нахождения скорости химической реакции

Приложение Ж

Производная в химии

Применение производной в изучении естественно-научных дисциплин

Производная в химии

Количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задается зависимостью:

$$p(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + 3$$

Скорость химической реакции задается зависимостью:

$$v(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 3t + 3\right) = t - 3$$

Скорость химической реакции в момент времени t=3:

$$v(3) = 3 - 3 = 0$$

Итак, скорость химической реакции в момент времени 3 равна нулю

Рисунок Ж.1 - 2 – Применение производной в химии

Производную в химии используют для определения скорости химической реакции. Это необходимо:

1) инженерам – технологам при определении эффективности химических производств;
2) химикам, разрабатывающим препараты для медицины и сельского хозяйства;
3) врачам и агрономам, использующим эти препараты для лечения людей и для внесения их в почву.

Для решения производственных задач в медицинской, сельскохозяйственной и химической промышленности просто необходимо знать скорости реакций химических веществ.

Рисунок Ж.2 – Применение производной для решения производственных задач

Приложение И

Производная в экономике

Производная решает важные вопросы:

- В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении таможенных пошлин?
- Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию?

Для решения этих вопросов нужно построить функции связи входящих переменных, которые затем изучаются методами дифференциального исчисления.

Также с помощью экстремума функции в экономике можно найти наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск и минимальные издержки.

Рисунок И.1 – Применение производной в экономике

Издержки производства y (в экономике TC) будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x (Q). Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy – приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная y = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции: J(x) = y (x) (MC = TC`)

Рисунок И.2 – Применение производной для нахождения предельных издержек

Задача 1. Объем продукции V, произведенный бригадой рабочих, задается уравнением

$$V = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50, \quad 1 \le t \le 8,$$

где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда через час после начала работы и за час до ее окончания.

Рисунок И.3 – Применение производной для нахождения производительности труда

Приложение К

Производная в биологии

Задача по биологии:

- По известной зависимости численности популяции *x(t)* определите относительный прирост в момент времени *t*.

Справка: Популяция это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.

$$P = x'(t)$$

Рисунок К.1 – 2 – Применение производной в биологии

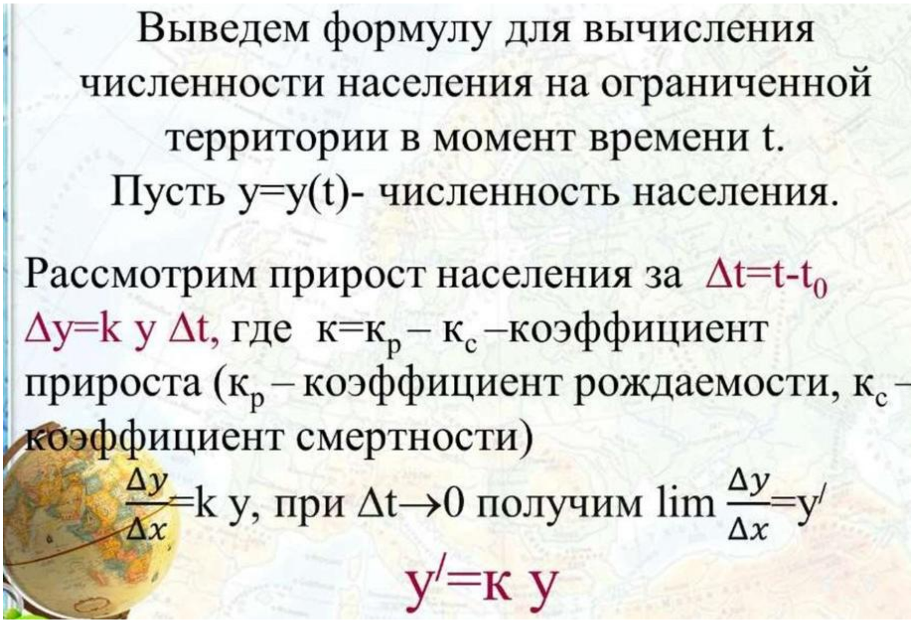


Рисунок К.2 – Применение производной доля нахождения численности населения

Приложение Л

Производная в задачах биологии

Рисунок Л.1 – Задача о численности популяции

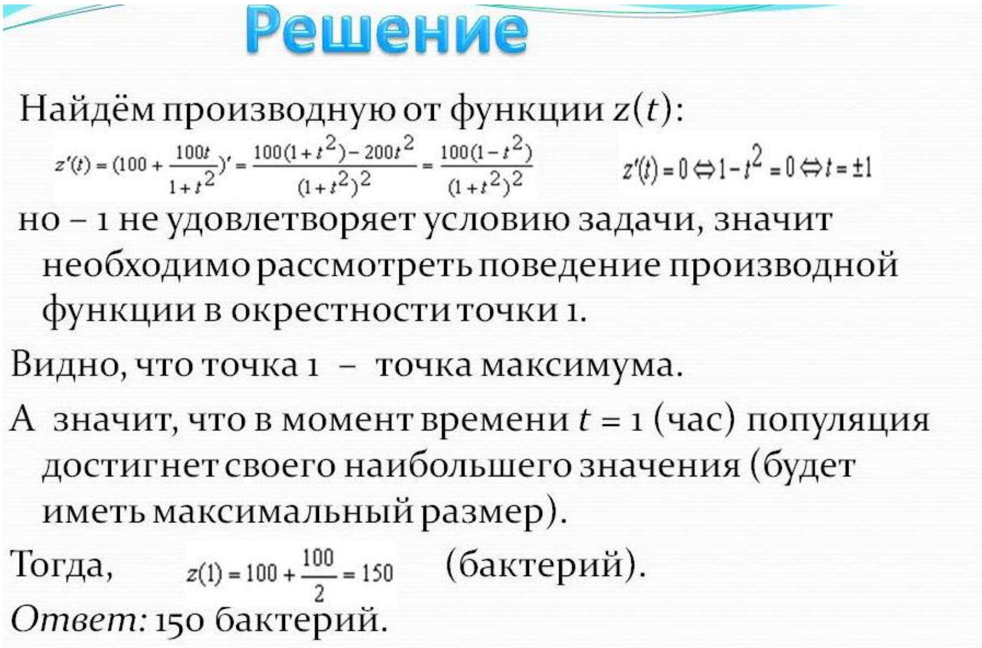


Рисунок Л.2 – Решение задачи о численности популяции

Приложение М

Производная в медицине

Рисунок М.1 – Задача о численности популяции

В медицине и биологии, используя производную, можно определить скорость изменения различных параметров системы или процесса в живом организме.

Пример:

При воздействии внешней среды давление на поверхность тела с течением времени меняется по закону: **p = (3t² - t +2)** мм. рт.ст. Определить с какой скоростью изменяется давление на 10-ой секунде.

Решение

$$p' = dp/dt = (3t^2 - t + 2)' = (6t - 1) \text{ мм. рт.ст./с}$$

$$p(10) = 6*10 - 1 = 59 \text{ мм. рт.ст./с}$$

Итак, в момент времени t=10с. давление изменяется со скоростью 59 мм. рт.ст. в секунду.

Рисунок М.2 – Применение производной для нахождения скорости изменения давления в живом организме

Приложение Н

Производная в биохимии и географии

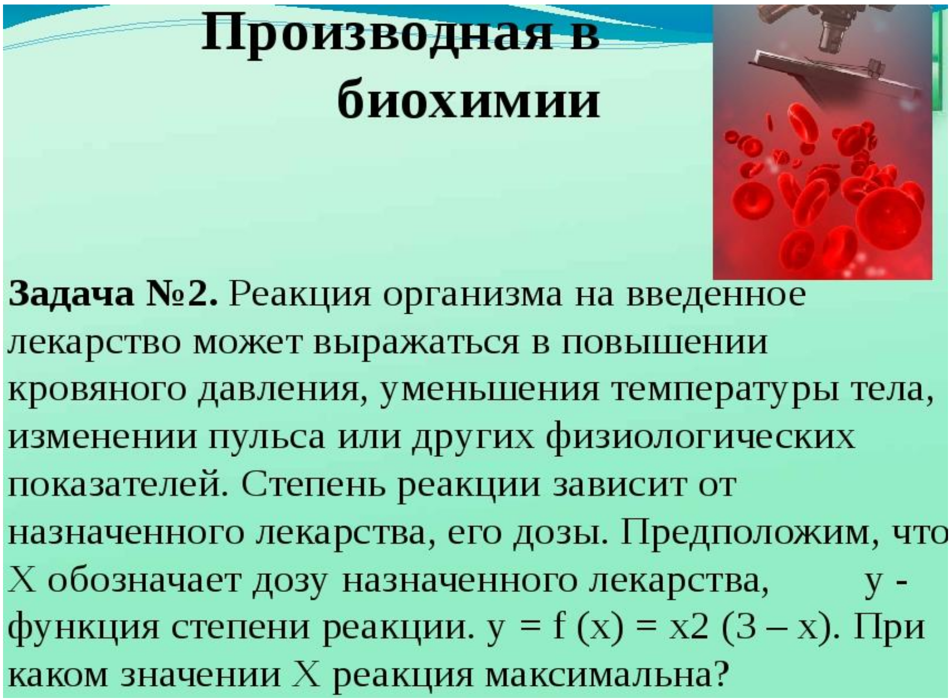


Рисунок Н.1 – Производная в биохимии

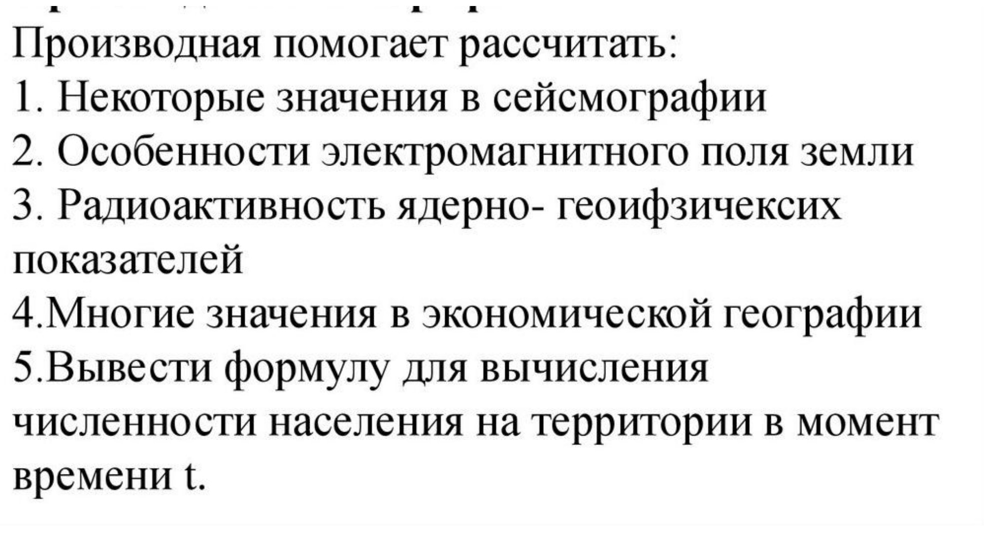


Рисунок Н.1 – Производная в географии