МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

основные теоретические сведения и методические указания
к решению упражнений и практических задач

для студентов любых специальностей всех форм обучения

Братск, 2021

Разработал: Степанова И.Ф., преподаватель высшей категории кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«   » 2021 г.   ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2021 г.   №______

Рецензия на методическое пособие

«Интегральное исчисление функции одной переменной»

Данное методическое пособие содержит основные теоретические сведения и упражнения по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной» дисциплины «Элементы высшей математики (математика)».

Пособие отражает связь фундаментальной теории практики. Несомненным достоинством пособия является наличие большого количества примеров и упражнений, которые сопровождаются подробными объяснениями с указанием методов решения.

Для более прочного усвоения материала студентам предлагаются разноуровневые задания, вопросы и упражнения для самостоятельного решения, вопросы и задачи для самостоятельного контроля с ответами. Также в пособии имеются необходимые справочные материалы – таблица интегралов, формулы сокращенного умножения, формулы тригонометрии.

Материал систематизирован и изложен в форме, доступной для изучения и понимания для студентов любых специальностей и форм обучения.

Методическое пособие может быть использовано преподавателями , ведущими указанный раздел дисциплины «Математика», и преподавателями специальных дисциплин, в которых применяется интегральное исчисление.

Содержание

Введение

Математика представляет собой одну из самых важных фундаментальных наук. Слово «математика» от греческого слова «матема», что означает знание. Возникла математика на первых же этапах создания человеческой культуры в связи с практической деятельностью людей. С самых древних времен люди, производя различные работы, встречались с необходимостью выделения и обозрения тех или иных совокупностей объектов, участков земли, жилищных помещений и т.п. Во всех этих случаях нужно было устанавливать количественные оценки рассматриваемых множеств, определить формы плоских и пространственных фигур, измерять их площади и объемы, сравнивать, вычислять , преобразовывать.

В результате многовековой трудовой деятельности людей возникли основные абстрактные математические понятия такие как число, геометрическая фигура, функция, производная, интеграл и т. д.

Создание математики переменных величин относят к 17 – середине 19 века. В этом периоде в работах И.Ньютона и Г.В. Лейбница создается дифференциальное и интегральное исчисление, без которых было бы невозможно развитие техники, новых областей других фундаментальных наук (астрономии, физики, механики и др.), научно – технического прогресса.

Цель данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту овладеть основными принципами интегрирования, так как в большинстве учебников и учебных пособий методы интегрирования сопровождаются недостаточным количеством примеров. А интегральное исчисление является очень трудным разделом математического анализа. Кроме того, в пособии представлены основные приложения интегрального исчисления к решению технических задач. После каждого раздела приводятся вопросы для самоконтроля, которые преподаватели могут использовать для контроля знаний студентов.

В конце пособия имеются приложения с кратким справочным материалом и список рекомендуемой к ознакомлению литературы, содержащей разделы «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл» и их приложения.

Пособие предназначено для студентов любых специальностей всех форм обучения и для преподавателей математики.

Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Напомним, что основная задача дифференциального исчисления заключается в следующем: дана функция $F(x)$, требуется найти ее производную. При этом если производная существует в каждой точке x некоторого промежутка X, то это также некоторая функция $f(x)$ на X такая, что $f(x) = F'(x)$.

Однако часто приходится решать и обратную задачу: дана функция $f(x)$,требуется найти функцию $F(x)$ такую, что

$F'(x) = f(x)$.

Для решения обратной задачи служит операция интегрирования, обратная операции дифференцирования.

Определение1. Дифференцируемая функция $F(x)$, определенная на некотором промежутке X, называется первообразной для функции $f(x)$, определенной на том же промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$, или, что то же самое,

$$dF(x) = f(x)\,dx \qquad (1)$$

Пример1. Найти какую-нибудь первообразную для функции $f(x) = 3x^2$.

Решение. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$, так как

$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Нетрудно заметить, что первообразная x^3 не является единственной для функции $3x^2$. В самом деле, в качестве первообразной можно было взять и функции: $x^3 + 5$, $x^3 - 2$ и вообще $x^3 + C$, где C – произвольная постоянная, потому что $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Сформулируем **основное свойство первообразных**: если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для f(x) на том же промежутке. Выражение F(x) +C называется совокупностью первообразных для функции f(x)

Определение 2. Совокупность первообразных для функции f(x), определенных на некотором промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции f(x) на этом промежутке и обозначается символом ∫ f(x) dx (читается: «интеграл от эф от икс де икс»).

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{2}$$

Определение 3. Функция f(x) называется подынтегральной функцией, f(x) dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, символ ∫ - знаком неопределенного интеграла, C – постоянной интегрирования.

Определение 4. График какой – нибудь первообразной называется интегральной кривой.

Тогда геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси Oy.

1.2 Основные свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т.е.

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) \cdot dx = \int f_1(x) \cdot dx \pm \int f_2(x) \cdot dx \tag{3}$$

Это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых непрерывных функций.

Свойство 2.Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если к = const ≠ 0, то

$$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx \tag{4}$$

Свойство 3.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx \tag{5}$$

Свойство 4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C \tag{6}$$

1.3Таблица основных интегралов

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$; при n=0 $\int dx = x + C$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4) $\int \cos\ x\ \ dx = \sin x + C$

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\ \ x + C$

9) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

10) $\int e^x dx = e^x + C$

11) $\int tg\ \ x\ dx = -\ln|\cos x| + C$

12) $\int ctg\ \ x\ dx = \ln|\sin x| + C$

13) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right| + C$

14) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

15) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C$

16) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

17) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C\right|$

20) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

21) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

Докажите самостоятельно свойство: 22) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$

Раздел 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

2.1 Непосредственное интегрирование функций

Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Задание: найти неопределенные интегралы.

Пример 2.

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

Комментарии к решению: число 5 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 1.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{7} = \frac{1}{7}\int dx = \frac{1}{7}x + c$$

Комментарии к решению: число 1/7 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 2.

Пример 4.

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

Комментарии к решению: применили формулу интегрирования № 1 при n=1.

Пример 5.

$$\int 4xdx = 4\int xdx = 4\cdot\frac{x^2}{2} + c = 2x^2 + c$$

Комментарии к решению: число 4 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 1 при n=1 .

Пример 6.

$$\int \frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\int xdx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{8} + c$$

Комментарии к решению: число 1/4 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 1 при n=1 .

Пример 7.

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

Комментарии к решению: применили формулу интегрирования № 1 при n=2.

Пример 8.

$$\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\cdot\ln|x| + c$$

Комментарии к решению: число 1/3 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 2 .

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Комментарии к решению: использовали свойство степени, применили формулу интегрирования № 1 при n = -2 .

Пример 10.

$$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = 5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + c = 5\frac{x^4}{4} + c = \frac{5x^4}{4} + c$$

Комментарии к решению: число 5 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 1 при n =3 .

Пример 11.

$$\int \frac{5dx}{x^3} = 5\int x^{-3}dx = 5\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{5x^{-2}}{-2} + c = -\frac{5}{2x^2} + c$$

Комментарии к решению: число 5 вынесли за знак интеграла по свойству 2 и применили формулу интегрирования № 1 при n = -3 .

Пример 12.

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

Комментарии к решению: корень квадратный заменили степенью ½ и применили формулу интегрирования №1.

Пример 13.

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{x}} = 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 8\sqrt{x} + c$$

Комментарии к решению: число 4 вынесли за знак интеграла по свойству 2, использовали свойства степени и формулу интегрирования №1 .

Пример 14.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = -\frac{1}{\sqrt{x}} + c$$

В примерах 14 и 15 комментарии аналогичны комментариям к примерам 12 и 13.

Пример 16.

$$\int (3x^2 - x + 1)dx = 3\int x^2dx - \int xdx + \int dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + c$$

Комментарии к решению: сначала применили свойство №1 для трех функций, получили три несложных интеграла; в первом интеграле вынесли постоянный множитель 3 за знак интеграла и применили формулу интегрирования № 1 к каждому интегралу.

Пример 17.

$$\int (x^2-1)\cdot(2-x)dx=\int (2x^2-2-x^3+x)dx=2\int x^2dx-2\int dx-\int x^3dx+\int xdx=$$

$$=2\cdot\frac{x^3}{3}-2x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c=\frac{2}{3}x^3-2x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

Комментарии к решению: в подынтегральном выражении сначала раскрыли скобки, затем воспользовались решением примера №16.

Пример 18.

$$\int\frac{2+x}{x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x}+1\right)dx=\int\frac{2}{x}dx+\int dx=2\int\frac{dx}{x}+\int dx=2\ln|x|+x+c$$

Комментарии к решению: в подынтегральном выражении сначала выполнили деление, затем разбили на два интеграла и применили формулы интегрирования №2 и № 1 соответственно.

Пример 19.

$$\int\frac{t^2-\sqrt{t^3}+3}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{t^2}{\sqrt{t}}dt-\int\sqrt{\frac{t^3}{t}dt}+3\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{\frac{3}{2}}dt-\int tdt+3\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{t^2}{2}+3\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{t^2}{2}+6\sqrt{t}+c$$

Комментарии к решению: см. решение предыдущего примера; формулы интегрирования подберите самостоятельно.

Пример 20.

$$\int 3^x\cdot 4^{2x}dx=\int 3^x\cdot 16^x dx=\int 48^x dx=\frac{48^x}{\ln 48}+c$$

Комментарии к решению: сначала по свойствам степени 4^2 заменили на 16, 3 умножили на 16(получили 48) и применили формулу интегрирования №9.

Пример 21.

$$\int\frac{dx}{9+x^2}=\int\frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3}+c$$

Комментарии к решению: 9 представили как 3^2 и воспользовались формулой интегрирования №15.

Пример 22.

$$\int \frac{dx}{9-x^2}=\int \frac{dx}{3^2-x^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+c$$

Комментарии к решению:сравните условие с предыдущим примером и воспользуйтесь формулой интегрирования №16.

Пример 23.

$$\int \frac{x^2dx}{3+x^2}=\int \frac{(3+x^2)-3}{3+x^2}dx=\int \frac{3+x^2}{3+x^2}dx-3\int \frac{dx}{3+x^2}=\int dx-3\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2+x^2}=$$

$$=x-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c=x-\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

Комментарии к решению:сначала выполнены алгебраические преобразования в числителе дроби, затем интеграл разбит на два интеграла, оба табличные - №1 и №15.

Пример 24.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}}+c=\frac{1}{3}\arcsin 3x+c$$

Комментарии к решению: сначала выносим общий множитель 9 в подкоренном выражении и сводим интеграл к табличному - №18.

Пример 25.

$$\int \frac{3dx}{25+4x^2}=\frac{3}{4}\int \frac{dx}{\frac{25}{4}+x^2}=\frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}arctg\frac{x}{\frac{5}{2}}+c=\frac{3}{10}arctg\frac{2x}{5}+c$$

Комментарии к решению: применяем алгебраические преобразования и сводим интеграл к табличному - № 15.

Пример 26.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}=\int \frac{dx}{\sqrt{7\left(x^2-\frac{8}{7}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right|+c$$

Комментарии к решению: применяем алгебраические преобразования и сводим интеграл к табличному - № 19.

Пример 27.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} dx = 2\int \cos x dx = 2\sin x + c$$

Комментарии к решению: в числителе применяем формулу тригонометрии

sin 2x = 2 sin x · cos x, дробь сокращаем и применяем формулу интегрирования №4.

Пример 28.

$$\int (3e^x + 5\sin x + 3\cos x - 4)dx = 3\int e^x dx + 5\int \sin x dx + 3\int \cos x dx - 4\int dx =$$

$$= 3e^x - 5\cos x + 3\sin x - 4x + c$$

Пример 29.

$$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + c$$

Комментарии к решению: используем формулу тригонометрии $1+ctg^2 x = 1/ \sin^2 x$. Отсюда $ctg^2 x = 1-1/ \sin^2 x$. Полученный интеграл разбиваем на два интеграла и подбираем формулы интегрирования для каждого.

Пример 30.

$$\int \frac{5\cos 2x}{\sin x \cos x} dx = 5\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = 5\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} dx - 5\int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = 5\int \frac{\cos x}{\sin x} dx -$$

$$-5\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 5\int ctgx dx - 5\int tgx dx = 5\ln|\sin x| + 5\ln|\cos x| + c$$

Комментарии к решению: в числителе cos 2x разложим по формуле: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, затем каждое слагаемое числителя поделим на знаменатель. Получим два интеграла. Подынтегральные функции сокращаем на cosx и sinx соответственно и используем табличные интегралы.

Последующие примеры решаем с помощью свойства 22.

Пример 31.

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Пример 32.

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

Пример 33.

$$\int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} + c$$

Пример 34.

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

Пример 35.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}tg5x + c$$

Пример 36.

$$\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}} = -5ctg\frac{x}{5} + c$$

Пример 37.

$$\int \sin 7x\cos 3xdx = \int\frac{1}{2}(\sin(7x = 3x) + \sin(7x - 3x))dx = \frac{1}{2}\int \sin 10xdx + \frac{1}{2}\int \sin 4xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}(-\cos 10x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(-\cos 4x) + c = -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{8}\cos 4x + c$$

Комментарии к решению: используем формулу тригонометрии

sin x cos y = ½(sin(x +y) + sin(x-y)).

Пример 38.

$$\int \cos 8x\cos 3xdx = \int\frac{1}{2}(\cos(8x + 3x) + \cos(8x + 3x))dx = \frac{1}{2}\int \cos 11xdx + \frac{1}{2}\cos 5xdx =$$

$$= \frac{1}{22}\sin 11x + \frac{1}{10}\sin 5x + c$$

Комментарии к решению: используем формулу тригонометрии: cosx cosy = ½(cos(x+y) + cos(x-y)).

Пример 39.

$$\int \cos^2 xdx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Комментарии к решению: используем формулу тригонометрии: cos ^{2} x = (1+ cos 2 x) / 2.

Пример 40.

$$\int \sin^2 7x dx = \int \frac{1-\cos 14x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 14) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 14x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{28}\sin 14x + c$$

Комментарии к решению: используем формулу тригонометрии: $\sin^2 x = ½(1- \cos 2x)$.

В примерах 38 – 40 подробных рассуждений не приводится, так как решения находятся легко.

2.2 Интегрирование методом замены переменной (методом подстановки)

Найти данный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. В этих случаях применяют другие приемы. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно. Теоретические разъяснения вы можете изучить в учебной литературе, практические рекомендации приводятся ниже.

Алгоритм применения метода подстановки :

а)выбор подстановки осуществляйте сравнивая интеграл с табличным, новую переменную можно обозначать любой буквой латинского алфавита, если она не использована в условии примера;

б) найдите дифференциал новой переменной по формуле $dy = y' \, dx$;

в)из последнего выразите dx или выражение, содержащее постоянные величины и dx;

г) осуществите замену в подынтегральном выражении и примените непосредственное интегрирование;

д) выполните обратную замену.

Найти неопределенные интегралы.

Пример 41.

$$\int (2x-10)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-10 \\ dt = 2dx \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t^5 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^6}{6} + c = \frac{(2x-10)^6}{12} + c$$

Комментарии: за новую переменную выбрали основание сложной степенной функции 2x – 10, нашли дифференциал этого выражения и выразили dx; выполнили замену в в подынтегральном выражении и применили свойство 2 и формулу интегрирования №1.

Пример 42.

$$\int \frac{dx}{(3x+2)^4} = \int (3x+2)^{-4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \int t^{-4} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{-4} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{9t^3} + c =$$

$$= -\frac{1}{9(3x+2)^3} + c$$

Пример 43.

$$\int \sqrt{7-2x}dx = \left| \begin{array}{l} t = 7-2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(7-2x)^3} + c$$

Пример 44.

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{9+x}} = 2\int (9+x)^{-\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 9+x \\ dt = dx \end{array} \right| = 2\int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{t} + c = 4\sqrt{9+x} + c$$

Пример 45.

$$\int \sqrt[5]{(4-3x)}dx = \int (4-3x)^{\frac{1}{5}}dx = \left| \begin{aligned} &t = 4-3x \\ &dt = -3dx \\ &dx = -\frac{dt}{3} \end{aligned} \right| = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = -\frac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + c =$$

$$= -\frac{3}{18}\sqrt[5]{(4-3x)^6} + c$$

Примеры 42 -45 выполнены аналогично примеру 41.

Пример 46.

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{aligned} &t = 1-x^2 \\ &dt = -2xdx \\ &xdx = -\frac{dt}{2} \end{aligned} \right| = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{t^3} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Пример 47.

$$\int \frac{3x}{\sqrt[3]{(5+x^2)}}dx = \left| \begin{aligned} &t = 5+x^2 \\ &dt = 2xdx \\ &xdx = \frac{dt}{2} \end{aligned} \right| = 3\int \frac{dt}{2\sqrt[3]{t^4}} = \frac{3}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + c = -\frac{9}{2\sqrt[3]{(5+x^2)}} + c$$

В примерах 46 и47 произведена замена подкоренных выражений. Остальные преобразования такие же, как в примерах 41 -45.

Решения последующих примеров разберите самостоятельно. Если у Вас возникли затруднения, то обратитесь за помощью к преподавателю.

Пример 48.

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx = \left| \begin{aligned} &t = 1-x^2 \\ &dt = -2xdx \\ &dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\left(-\frac{dt}{2}\right)}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + c = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c$$

Пример 49.

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{aligned} &t = x^2 \\ &dt = 2xdx \\ &xdx = \frac{dt}{2} \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt + c = \frac{1}{2}arctgx^2 + c$$

Пример 50.

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2} dx \\ \dfrac{1}{x^2} dx = -dt \end{array} \right| = \int e^t (-dt) = -e^t + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

Пример 51.

$$\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\arcsin^3 x}{3} + c$$

Пример 52.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}} = \left| \begin{array}{l} t = arctgx \\ dt = \dfrac{1}{1+x^2 dx} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{arctgx} + c$$

Пример 53.

$$\int \sin x \cos^7 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^7 dt = -\frac{t^8}{8} + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + c$$

Пример 54.

$$\int \sin x \cos^7 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^7 dt = -\frac{t^8}{8} + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + c$$

Пример 55.

$$\int \frac{3\cos x dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = 3\int \frac{dt}{t^2} = 3\int t^{-2} dt = \frac{3t^{-1}}{-1} + c = -\frac{3}{t} + c = -\frac{3}{\sin x} + c$$

Пример 56.

$$\int \frac{3\sin x dx}{5-2\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = 5-2\cos x \\ dt = -2\sin x dx \\ \sin x dx = -\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{3}{2}\ln|t| + c = -\frac{3}{2}\ln|5-2\cos x| + c$$

Пример 57.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = \frac{2}{3}\int e^t dt = \frac{2}{3}e^t + c = \frac{2}{3}e^{\sqrt{x}} + c$$

Пример 58.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+8x+7\right)} = \int \frac{dx}{\left(x^2+8x+16\right)-9} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-3^2} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-3^2} = \left| \begin{array}{l} t=x+4 \\ dt=dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + c$$

Пример 59.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)+4}\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \left| \begin{array}{l} t=x+1 \\ dt=dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2} + c$$

Пример 60.

$$\int e^{2\cos x}\sin x dx = \left| \begin{array}{l} t=2\cos x \\ dt=-2\sin x dx \\ \sin x dx = -\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int e^t \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{2\cos x} + c$$

Пример 61.

$$\int \frac{3\cos x dx}{9+\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{array} \right| = 3\int \frac{dt}{3^2+t^2} = 3\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3} + c = arctg\,\frac{\sin x}{3} + c$$

Пример 62.

$$\int \frac{4x-3}{x^2+25}dx = \int \frac{4xdx}{x^2+25} - 3\int \frac{dx}{x^2+25} = \left| \begin{array}{l} t=x^2+25 \\ dt=2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = 4\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} - 3\int \frac{dx}{5^2+x^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{5}arctg\,\frac{x}{5} + c$$

Пример 63.

$$\int \frac{x^2}{x-3}dx = \begin{vmatrix} t = x-3 \\ dt = dx \\ x = t+3 \end{vmatrix} = \int \frac{(t+3)^2}{t}dt = \int \frac{t^2+6t+9}{t}dt = \int \left(t+6+\frac{9}{t}\right)dt = \int tdt + 6\int dt + 9\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 6t + 9\ln|t| + c = \frac{(x-3)^2}{2} + 6(x-3) + 9\ln|x-3| + c$$

Пример 64.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+3}} = \begin{vmatrix} t = 2x+3 \\ dt = 2dx \\ dx = \dfrac{dt}{2} \\ x = \dfrac{t-3}{2} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{t-3}{2}\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\int \frac{t-3}{t^{\frac{1}{2}}}dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt - \frac{3}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt - \frac{3}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} - \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{t} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(2x+3)^3} - \frac{3}{2}\sqrt{2x+3} + c$$

Пример 65.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}} = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} =$$

$$= \ln\left|t + \sqrt{t^2+3} + c = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+3}\right| + c\right|$$

Пример 66.

$$\int 5x^2\sqrt[3]{4-2x^3}dx = \begin{vmatrix} t = 4-2x \\ dt = -6x^2dx \\ x^2dx = -\dfrac{dt}{6} \end{vmatrix} = 5\int \sqrt[3]{t}\left(-\frac{dt}{6}\right) = -\frac{5}{6}\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{5}{6}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c =$$

$$= -\frac{5}{6}\sqrt[3]{t^4} + c = -\frac{5}{8}\sqrt[3]{(4-2x^3)^4} + c$$

2.3Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u\cdot dv = uv - \int vdu \qquad (7)$$

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv. Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

В интегралах вида

$\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\, dx$, $\int P(x)\cos ax\, dx$,

где $P(x)$ – многочлен относительно x, a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители за dv.

В интегралах вида

$\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin ax\, dx$, $\int P(x)\arccos ax\, dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\, ax\, dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\, ax\, dx$

полагают $P(x)\,dx = dv$, а все остальные сомножители – за u.

В интегралах вида

$\int e^{ax}\sin bx\, dx$, $\int e^{ax}\cos bx\, dx$,

где a и b- числа, за u можно принять любую из функций e^{ax} или $\sin bx$ ($\cos bx$).

Пример 67.

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{x}dx, v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Пример 68.

$$\int xarctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+c+arctgx$$

Пример 69.

$$\int(2x-5)e^{-3x}dx=\begin{vmatrix}u=2x-5, dv=e^{-3x}dx\\ du=2dx, v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{vmatrix}=(2x-5)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\cdot 2dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+c=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}-\frac{2}{9}$$

Пример 70.

$$\int x\cos\frac{x}{2}dx=\begin{vmatrix}u=x, dv=\cos\frac{x}{2}dx\\ du=dx, v=2\sin\frac{x}{2}\end{vmatrix}=x2\sin\frac{x}{2}-\int 2\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=$$

$$=2x\sin\frac{x}{2}-2\cdot\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)+c=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+c$$

Пример 71.

$$\int x^2\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x^2, dv=\sin xdx\\ du2xdx, v=-\cos x\end{vmatrix}=x^2(-\cos x)-\int(-\cos xdx)\cdot 2xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x, dv=\cos xdx\\ du=dx, v=\sin x\end{vmatrix}=x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin xdx\right)=-x^2\cos x+2(x\sin x-(-\cos x))=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$$

Пример 72.

$$\int\arccos xdx=\begin{vmatrix}u=\arccos, dv=dx\\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v=x\end{vmatrix}=x\arccos x-\int x\left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=x\arccos x+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\begin{vmatrix}t=1-x^2\\ dt=-2xdx\\ xdx=-\frac{dt}{2}\end{vmatrix}=x\arccos x+\int\frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=x\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=x\arccos x-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+c=$$

$$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$$

Пример 73.

$$\int e^x\cos xdx=\begin{vmatrix}u=e^x, dv=\cos xdx\\ du=e^xdx, v=\sin x\end{vmatrix}=\sin xe^x-\int e^x\sin xdx=\begin{vmatrix}u=e^x, du=\sin xdx\\ du=e^xdx, v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$= e^x \sin x - (e^x(-\cos x) - \int (-\cos x) e^x dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Так как в правой части стоит искомый интеграл, то, перенеся его в левую часть, получим

$$2\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + 2c$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

Пример 74.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 + x^2}, dv = dx \\ du = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \sqrt{a^2 + x^2} - \int x \cdot \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x\sqrt{a^2 + x^2} -$$

$$-\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{\left(x^2 + a^2\right) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx + a^2 \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right|$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx + a^2 \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + 2c$$

$$2\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + 2c$$

Выше были приведены некоторые приемы в вычисления неопределенных интегралов. Но не у каждой элементарной функции первообразная есть элементарная функция.

2.4 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.

Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n + \mathrm{C} \qquad (8)$$

Интеграл от дробной рациональной функции $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_n}$ можно найти путем разложения дроби на слагаемые, которые всегда преобразуются к табличным интегралам.

Всякую неправильную рациональную дробь (n≥m) можно представить в виде суммы многочлена степени (n-m) и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)} \qquad (9)$$

Известно, что если $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь (n<m), причем $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x-b)^l \cdot (x^2+px+q)^s \cdot \ldots \cdot (x^2+cx+d)^r$, где a, …, b - действительные корни многочлена $Q_m(X)$ кратности k, …, l, а трехчлены $x^2+px+q, \ldots, x^2+cx+d$ не имеют действительных корней, т.е. $p^2-4q<0$, $c^2-4d<0$, то дробь можно единственным образом представить в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots +$$
$$+ \frac{B_k}{(x-b)^k} + + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n} + \cdots + \qquad (10)$$
$$+ \frac{C_1x+D_1}{(x^2+cx+d)} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \cdots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r}$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots, M_1, \ldots, N_1, \ldots, C_1, \ldots, D_1, \ldots -$ некоторые постоянные, подлежащие определению.

Таким образом, интегрирующие рациональные дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ сводится к интегрированию дробей, которые называются *простейшими дробями:*

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C;$

3. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \\ x + \frac{p}{2} = t, q - \frac{p^2}{4} = k^2, x = t - \frac{p}{2}, dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+k^2} dt = \int \frac{At}{t^2+k^2} dt + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2+k^2)}{t^2+k^2} + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{k} \cdot$$
$$\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{k} = \frac{A}{2} \ln(t^2+k^2) + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \cdot$$

$\cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{k} + C$;

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s} dx$, вычисляется с помощью рекуррентной формулы (Приложение Б).

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+6)}$

Разобьем подынтегральную дробь $\frac{1}{(x-3)(x+6)}$ на простейшие:

$$\frac{1}{(x-3)(x+6)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+6)}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+6)} = \frac{A(X+6)+B(x-3)}{(x-3)(x+6)}$$

Тогда:

$$\frac{1}{(x-3)(x+6)} = \frac{A(X+6)+B(x-3)}{(x-3)(x+6)}$$

Дроби равны, их знаменатели равны, следовательно, числители также равны.

Приравниваем числители:

$1=A(x+6)+B(x-3)$

Найдем коэффициенты, используя метод частных значений, который основан на утверждении: если два многочлена равны, то равны и их значения при одинаковых значениях переменной *x*. Его удобно использовать, когда многочлен, стоящий в знаменателе имеет действительные корни, в качестве значений переменной *x* рекомендуется выбирать значения этих корней.

Для нахождения коэффициентов A и B придадим *x* значения -6 и 3:

$x=-6 \Rightarrow 1= A(-6+6)+B(-6-3) \Rightarrow -9B=1 \Rightarrow B= -\frac{1}{9}$.

$x=3 \Rightarrow 1= A(3+6)+B(3-3) \Rightarrow 9B=1 \Rightarrow A= \frac{1}{9}$.

Подставляем значения коэффициентов A и B в разложение дроби на простейшие:

$$\frac{1}{(x-3)(x+6)} = \frac{\frac{1}{9}}{x-3} - \frac{\frac{1}{9}}{x+6} = \frac{1}{9(x-3)} - \frac{1}{9(x+6)}.$$

Тогда:

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+6)} = \int \left(\frac{1}{9(x-3)} - \frac{1}{9(x+6)}\right) dx = \frac{1}{9}\left[\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+6}\right] = \frac{1}{9}(\ln|x-3| -$$

−lnx+6+C=19lnx−3x+6+C.

2. $\int \frac{xdx}{(x-3)(x+6)}$

Разобьем подынтегральную дробь $\frac{x}{(x-3)(x+6)}$ на простейшие:

$$\frac{x}{(x-3)(x+6)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+6)}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+6)} = \frac{A(X+6)+B(x-3)}{(x-3)(x+6)}$$

Тогда:

$$\frac{x}{(x-3)(x+6)} = \frac{A(X+6)+B(x-3)}{(x-3)(x+6)}$$

Дроби равны, их знаменатели равны, следовательно, числители также равны.

Приравниваем числители:

x=A(x+6)+B(x-3)

Для нахождения коэффициентов A и B придадим x значения -6 и 3:

x=-6 => 1= A(-6+6)+B(-6-3) => -9B=-6 => B= $\frac{2}{3}$.

x=3 => 1= A(3+6)+B(3-3) => 9B=3 => A= $\frac{1}{3}$.

Подставляем значения коэффициентов A и B в разложение дроби на простейшие:

$$\frac{x}{(x-3)(x+6)} = \frac{1}{3(x-3)} + \frac{2}{3(x+6)}$$

Тогда:

$$\int \frac{xdx}{(x-3)(x+6)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-3)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+6)} = \frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x+6| + C = \frac{1}{3}\ln|x-3| +$$

$$+\frac{1}{3}\ln{(x+6)^2} + C = \ln\sqrt[3]{\frac{x-3}{(x+6)^2}} + C$$

3. $\int \frac{xdx}{(x-3)^2(x+6)}$

Разобьем подынтегральную дробь $\frac{x}{(x-3)^2(x+6)}$ на простейшие:

$$\frac{x}{(x-3)^2(x+6)} = \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+6)}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+6)} = \frac{A(X+6)+B(x-3)(x+6)+C(x-3)^2}{(x-3)^2(x+6)}$$

Приравниваем числители:

$$x = A(x+6) + B(x-3)(x+6) + C(x-3)^2$$

Коэффициентов три, потому берем три значения переменной x:

x=-6 => -6= A·0+B·0+C·$(-6-3)^2$=> 81C=-6 => C= $-\frac{2}{27}$.

x =3 => 3= A·9+B·0+C·0=> 9A=3 => A= $\frac{1}{3}$.

x =0 => 0= A·$(0+6)$+B·$(0+6)(0-3)$+C·$(0-3)^2$=> 6A-18B+9C=0 =>

=> $6 \cdot \frac{1}{3} - 18B + 9 \cdot \left(-\frac{2}{27}\right) = 0 => 2 - 18B - \frac{2}{3} = 0 => -18B = -\frac{4}{3} =>$

$=> B = \frac{2}{27}$

Подставляем значения коэффициентов A B и C в разложение дроби на простейшие:

$$\frac{x}{(x-3)^2(x+6)} = \frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{2}{27(x-3)} - \frac{2}{27(x+6)}$$

Тогда:

$$\int \frac{xdx}{(x-3)^2(x+6)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{2}{27}\int \frac{dx}{(x-3)} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{(x+6)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + \frac{2}{27} ln|x-3| -$$

$$-\frac{2}{27} ln|x+6| + C = -\frac{1}{3(\mathrm{x}-3)} + \frac{2}{27} ln|x-3| - \frac{2}{27} ln|x+6| + C$$

4. $\int \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3} dx$

Степень числителя равна степени знаменателя, поэтому в этом примере надо выделит целую часть.

Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^2 \ -x \ -2 & x^2-4x+3 \\ \cline{2-2} -\underline{x^2-4x+3} & \qquad 1 \\ 3x-5 & \end{array}$$

Подынтегральная дробь $\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$ примет вид:

$\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3} = 1 - \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

Разложим дробь $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ на простейшие.

Разложим знаменатель на линейные множители по формуле:

ax^2+bx+c=a(x- x_1)(x-x_2)

x^2-4x+3=0=> x_1=1, x_2=3, a=1

т.е $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Тогда: $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$=$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1}$+$\frac{B}{x-3}$

Дальнейшее решение аналогично выше рассмотренным примерам.

$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)} => 3x-5 = A(x-3)+B(x-1)$

$x=3 => 3*3-5 = A*0+2*B => 2B = 4 => B = 2$

$x=1 => 3*1-5 = A*(-2)+B*0 => -2A = -2 => A = 1$

Тогда $\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}dx = \int(1-(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}))dx = \int(1-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-3})dx =$$

$$= \int dx - \int\frac{dx}{x-1} - 2\int\frac{dx}{x-3} == x - \ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C$$

5. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$

Знаменатель x^2+4x+5 не разлагается на линейные множители, так как дискриминант уравнения $x^2+4x+5=0$, равен

*Д=4^2-4*5=16-20=-4<0.*

В таких случаях в знаменателе нужно выделять полный квадрат:

$x^2+4x+5 = (x^2+4x+4)+1 = (x+2)^2+1$

$$\int \frac{x+2}{(x+2)^2+1}dx = \left| \begin{matrix} \textit{Подстановка} \\ t=(x+2)^2+1 \\ dt = 2(x+2)dx \\ (x+2)dx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c =$$

$= \frac{1}{2}\ln|(x+2)^2 + +1| + c$

6. $\int \frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2}dx$

$\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2} = \frac{2x^2-x+1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

$\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2} = \frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+3)}$

$2x^2 - x + 1 = A(x^2+3) + Bx(x^2+3) + x^2(Cx+D)$

Неопределенных коэффициентов четыре: A, B, C, D. Для нахождения этих числовых значений выберем четыре значения числа x и подставим эти значения в последнее равенство (значения x выбираются произвольно):

$x=0 \Rightarrow 2\cdot0^2 – 0 + 1=A(0^2+3) + B\cdot0\,(0^2+3) + 0^2\,(C\cdot0+D) \Rightarrow 3A=1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$x=1 \Rightarrow 2\cdot1^2 – 1 + 1=A(1^2+3) + B\cdot1\,(1^2+3) + 1^2\,(C\cdot1+D) \Rightarrow 4A+4B+C+D=2$

$x= –1 \Rightarrow 2\cdot(–1)^2 – (–1) + 1=A((–1)^2+3) + B\cdot(–1)\,((–1)^2+3) + (–1)^2\,(C\cdot(–1)+D) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4A–4B–C+D=4$

$x=2 \Rightarrow 2\cdot2^2 – 2 + 1=A(2^2+3) + B\cdot2\,(2^2+3) + 2^2\,(C\cdot2+D) \Rightarrow 7A+14B+8C+4D=2$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ 4A + 4B + C + D = 2 \\ 4A – 4B – C + D = 4 \\ 7A + 14B + 8C + 4D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} + 4B + C + D = 2 \\ \frac{4}{3} - 4B - C + D = 4 \\ \frac{7}{3} + 14B + 8C + 4D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4B + C + D = \frac{2}{3} \\ -4B - C + D = \frac{8}{3} \\ 14B + 8C + 4D = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнение системы, получаем:

$2D = \frac{10}{3} \Rightarrow D = \frac{5}{3}$.

Складывая первое и третье уравнение системы, и подставляя $D = \frac{5}{3}$, получаем:

$$\begin{cases} 4B+C+\frac{5}{3}=\frac{2}{3} \\ 14B+8C+4\cdot\frac{5}{3}=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4B+C=-1 \,|\cdot(-8) \\ 14B+8C=-7 \leftarrow \end{cases} \underline{+|} \Rightarrow -18B=1 \Rightarrow \mathrm{B}=-\frac{1}{18}$$

$C=-1-4B \Rightarrow \mathrm{C}=-1-4\cdot\left(-\frac{1}{18}\right)=-1+\frac{2}{9}=-\frac{7}{9}$

Итак $A=\frac{1}{3}$, $\mathrm{B}=-\frac{1}{18}$, $C=-\frac{7}{9}$, $D=\frac{5}{3}$.

Дробь $\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{18x}+\frac{-\frac{7}{9}x+\frac{5}{3}}{x^2+3}$ или

$\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{18x}-\frac{7x-15}{9\cdot(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{18x}-\frac{7x}{9\cdot(x^2+3)}+\frac{5}{3\cdot(x^2+3)}$

Тогда,

$\int\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{18x}-\frac{7x}{9\cdot(x^2+3)}+\frac{5}{3\cdot(x^2+3)}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x}-$
$-\frac{7}{9}\int\frac{x}{x^2+3}dx+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}$.

Найдем интегралы I_1, I_2, I_3, I_4:

$\mathrm{I}_1=\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C_1=-\frac{1}{x}+C_1$.

$\mathrm{I}_2=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_2$.

$$\mathrm{I}_3=\int\frac{x}{x^2+3}dx=\left|\begin{matrix}\textit{Подстановка} \\ t=x^2+3 \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{dt}{2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{dt}{2}}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_3=\frac{1}{2}\ln|x^2+3|+C_3.$$

$\mathrm{I}_4=\int\frac{dx}{x^2+3}=\int\frac{dx}{(\sqrt{3})^2+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C_4$.

Итак,

$\int\frac{2x^2-x+1}{x^4+3x^2}dx=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C_1-\frac{1}{18}\cdot\ln|x|+C_2-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+3|+C_3+\frac{5}{3}\cdot$
$\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C_4=-\frac{1}{3x}\cdot-\frac{1}{18}\cdot\ln|x|-\frac{7}{18}\ln|x^2+3|+\frac{5}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$, где

$\mathrm{C}=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3+\mathrm{C}_4$.

7. $\int\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}dx$

В интеграле $\int \frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}dx$ подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой представлен в виде произведения сомножителей. $Q(x)$ имеет простые корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ – корень кратности два.

Разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C приведем сначала простейшие дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$$

В результате получаем:

$$\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$$

Т.к. знаменатели равных дробей равны, должны быть равны и числители:

$$x^2 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

В нашем примере для нахождения A, B, C, придавая последовательно в последнем равенстве переменной x значения x=1, x=2, x=0, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x = 1 & 1 = 3C \\ x = 2 & 4 = 9A \\ x = 0 & 0 = A - 2B + 2C \end{array}$$

Откуда $C = \frac{1}{3}$, $A = \frac{4}{9}$, $B = \frac{5}{9}$.

Запишем разложение подынтегральной дроби $\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{5}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}$$

Подставляя полученное разложение, под интеграл и интегрируя каждое слагаемое, получим:

$$\int \frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}dx = \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{3(x-1)} + C$$

8. $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$

Подынтегральная функция интеграла $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$ является неправильной рациональной дробью, т.к. степень многочлена $P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 1$, стоящего в числителе n=5, а степень многочлена $Q(x) = x^4 + 3x^2$ стоящего в знаменателе, m=4, следовательно n>m.

Выделим целую часть, производя деление числителя на знаменатель:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим знаменатель $Q(x) = x^4 + 3x^2$ полученной правильной дроби на множители и представим дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{x^4+3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}.$$

Так как знаменатели равных дробей равны, следовательно, равны и их числители:

$$1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2$$

$$1 = Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2$$

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$$

Для нахождения A, B, C, используем способ, основанный на утверждении: если два многочлена равны, то равны и их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = B + D \\ 0 = 3A \\ 1 = 3B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \\ C = 0 \\ D = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Запишем разложение неправильной дроби на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^4+3x^2} = \frac{0}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{0\cdot x - \frac{1}{3}}{x^2+3} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\,.$$

Подставляя полученное разложение дроби под интеграл и интегрируя каждое слагаемое, получим:

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^4+3x^2}\right) dx = \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\right) dx =$$

2xdx+ 13x−2dx−13dxx2+3=x2−13x−133arctgx3+C.

2.5 Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций

Иррациональные (и трансцендентные) функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Подстановки, с помощью которых интегралы от некоторых иррациональных функций выражаются через элементарные, приведены в приложении В.

Интегралы вида: $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$, где R – рациональная функция относительно $x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$ (т.е. над $x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$ производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведение в степень с целым показателем), рационализируются, т.е. сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробных показателей степеней $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Как известно, все тригонометрические функции рационально (т.е. с помощью одних только арифметических действий) выражаются через синус и косинус: $tg\ x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $ctg\ x=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec\ x=\frac{1}{\cos x}$, $cosec\ x=\frac{1}{\sin x}$; следовательно, всякая функция, рационально зависящая от тригонометрических функций, может быть преобразована в соответствующую рациональную функцию только от синуса и косинуса. Поэтому достаточно рассматривать правило интегрирования функций только такого типа.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos\ x$, в общем случае рационализируются, т.е. преобразуются к рациональной функции от новой переменной, с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, при этом $\sin x=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Универсальная подстановка часто приводит к довольно громоздким рациональным дробям, поэтому в некоторых, менее общих случаях, лучше применять частные подстановки (Приложение Г).

Найти интегралы.

1. $\int\frac{\sqrt[4]{x}+1}{x+\sqrt{x}dx}$;

Подынтегральная функция в интеграле $\int\frac{\sqrt[4]{x}+1}{x+\sqrt{x}dx}$ является рациональной относительно x, $x^{1/2}$, $x^{1/4}$. Данный интеграл есть частный случай интеграла $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ при $a = d = 1$, $c = b = 0$. Т.к. $n = 2$, $s = 4$, следовательно, $k = 4$ и интеграл рационализируется с помощью замены переменной $x=t^4$. Учитывая сказанное, вычислим интеграл

$$\int\frac{\sqrt[4]{x}+1}{x+\sqrt{x}dx}=\begin{vmatrix}x=t^4\\dx=4t^3dt\end{vmatrix}=\int\frac{t+1}{t^2+t^4}\cdot 4t^3dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\frac{t^2+1-1+t}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=4\int dt+4\int\frac{tdt}{t^2+1}-4\int\frac{dt}{t^2+1}=4t+4\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-4\mathrm{arctg}\ t=$$

$=4t+2\ln(t^2+1)-4\operatorname{arctg} t+C=\left|t=\sqrt[4]{x}\right|=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-$
$-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$

2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$;

Подынтегральная функция в интеграле $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$ является рациональной относительно x и $(x+3)^{1/2}$. Данный интеграл есть частный случай описанного выше интеграла при $a=d=1$, $c=0$, $b=3$. Т.к. $n=2$, следовательно интеграл рационализируется с помощью замены переменной $x+3=t^2$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}}=\begin{vmatrix}x=t^2-3\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{(t^2-3)2tdt}{t}=2\int(t^2-3)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-3t\right)+C=$$
$$=\left|t=\sqrt{x+3}\right|=\frac{2}{3}(x+3)^{3/2}-6(x+3)^{1/2}+C=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}-$$
$$-6\sqrt{x+3}+C.$$

3. $\int\frac{dx}{2+3\cos x}$;

В интеграле $\int\frac{dx}{2+3\cos x}$ подынтегральная функция является рациональной относительно $\cos x$. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (приложение Г, п. 1.1).

$$\int\frac{dx}{2+3\cos x}=\begin{vmatrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\frac{2+2t^2+3-3t^2}{1+t^2}}=$$
$$=2\int\frac{dt}{5-t^2}=2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+C.$$

4. $\int\sin^5 x\cos^3 x\,dx$;

Для вычисления интеграла воспользуемся приложением Г, пункт 2. Показатели степени $m=5$ и $n=3$. Т.к. число $n=3>0$ и n – нечетное, то используем формулы пункта 1.2.

$$\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ \cos^2 x = 1 - t^2, \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{matrix} \right| = \int t^5 (1 - t^2) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^5 (1-t^2)\, dt = \int t^5\, dt - \int t^7\, dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C =$$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

2.6 Геометрические приложения неопределенного интеграла

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу – задача неопределенная, так как $\int f(x)dx$ означает множество первообразных функций вида $y = F(x) + C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C; C может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия. Под начальными условиями понимается задание частных значений x и y для первообразной функции $y = F(x) + C$, по которым находится определенное значение C, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Пример 1. Найти функцию, производная которой $y' = 2x - 3$, если при $x = 2$ эта функция принимает значение, равное 6.

Решение:

Имеем $y' = 2x - 3$, или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, т. е. $dy=(2x - 3)dx$. Интегрируя обе части последнего равенства, находим

$\int \mathrm{dy} = \int (2\mathrm{x} - 3)dx$; $y = x^2 - 3x + C$.

Вычислим C при заданных значениях $x = 2$ и $y = 6$. Подставив в выражение для функции эти значения, получим $6 = 2^2 - 3{\cdot}2 + C$, откуда $C=8$.

Пример 2. Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке $(x; y)$ равен $2x$.

Решение:

Согласно условию, $k=2x$. Известно, что $k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$; следовательно, $\frac{dy}{dx} = 2x$, т.е. $dy = 2xdx$. Интегрируя, получим $\int dy = \int 2xdx$; $y = x^2 + C$.

Мы нашли совокупность (семейство) кривых, для которых угловой коэффициент касательной в любой точке равен $2x$. Эти кривые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое C. При $C=0$ получим параболу $y = x^2$ с вершиной в начале координат, при $C=1$ – параболу $y = x^2+1$ с вершиной в точке (0; 1), при $C = -2$ – параболу $y = x^2 - 2$ с вершиной в точке (0; – 2) и т.д. (рисунок 1).

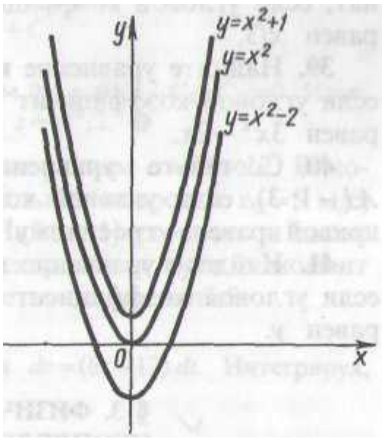


Рисунок 1

Пример 3. Составить уравнение линии, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен y/x.

Решение:

Согласно условию, $k = \frac{y}{x}$; так как $k = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, откуда, разделив переменные, имеем $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln y = \ln x + \ln C$.

Произвольную постоянную полагаем равной $\ln C$ для удобства упрощений. Потенцируя, получим $y = Cx$ – уравнение семейств прямых, проходящих через начало координат.

2.7 Физические приложения неопределенного интеграла

Пример 1. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $\vartheta = 3t^2 + 4$. Найти закон движения s, если за время t = 2с точка прошла 20 м.

Решение:

Так как $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4$, то $ds=(3t^2 + 4)dt$. Интегрируя, получим

$\int ds = \int (3t^2 + 4)\,dt$; $s=t^3+4t+C$.

Используя начальные условия, найдем $20 = 2^3 + 4\cdot 2+C$, т. е. C=4. Итак, закон движения точки имеет вид $s=t^3+4t+4$.

Пример 2. Найти закон движения свободно падающего тела при постоянном ускорении g, если в начальный момент движения тело находилось в покое.

Решение:

Известно, что ускорение a прямолинейно движущегося тела есть вторая производная пути s по времени t или производная от скорости v по времени t, т.е. $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Так как $a=g$, то $\frac{dv}{dt} = g$, откуда $dv=gdt$.

Интегрируя, получим

$\int dv = \int g\,dt$; $v=gt + C_1$.

Используя начальные условия t=0, v = 0, имеем $0=g0 + C_1$, т.е. $C_1=0$. Таким образом, скорость движения тела изменяется по закону $v=gt$.

Найдем теперь закон движения тела. Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то $\frac{ds}{dt} = gt,$ или $ds=gtdt$. Интегрируя, получим

$\int ds = \int gt\,dt$; $s = \frac{gt}{2} + C_2$.

Используя начальные условия $t = 0$, $s = 0$, имеем $0=g\cdot 0^2/2+C_2$, $C_2 = 0$. Итак, закон движения падающего тела имеет вид $s=gt^2/2$.

Пример 3. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 6t - 12$. В момент времени t=0 (начало отсчета) начальная скорость v_0=9 м/с; расстояние от начала отсчета s_o=10 м. Найти: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент t=2 с; 3) момент, когда скорость является наименьшей.

Решение:

1) Находим скорость: $\frac{dv}{dt} = 6t - 12$, или $dv = (6t - 12)\,dt$. Интегрируя, получим

$\int dv = \int (6t - 12)\,dt$; $v = 3t^2 - 12t + C_1$.

Используя начальные условия $t = 0$, $v_o = 9$, имеем $9 = 3\cdot0^2 - 12\cdot0 + C_1$, т.е. $C_1 = 9$. Следовательно, $v = 3t^2 - 12t + 9$.

Находим закон движения точки:

$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$, или $ds=(3t^2-12t+9)dt$.

Интегрируя, находим

$\int ds = \int (3t^2 - 12t + 9)\,dt$; $s=t^3 - 6t^2 + 9t+C_2$.

Используя начальные условия t=0, s_o = 10, имеем $10 = 0^3-6\cdot0^2 + 9\cdot0 + C_2$, т.е. C_2=10. Таким образом, $s=t^3-6t^2 + 9t+10$.

2) Найдем a, v и s при $t=2$: $a=6\cdot2 - 12 = 0$; $v = 3\cdot2^2 - 12\cdot2 + 9 = -3$ (м/с); $s=2^3 - 6\cdot2^2 + 9\cdot2+10=12$(м).

3)Исследуем функцию, определяющую изменение скорости, на максимум и минимум:

$v = 3t^2 - l2t+9$, $v' = 6t - 12$, $6t - 12=0$, t=2; $v'' = 6>0$.

Следовательно, скорость является наименьшей при t=2 с.

Вопросы для самоконтроля по разделу 2

1) В чем заключается непосредственное интегрирование?

2) Изложите алгоритм метода замены переменной в неопределенном интеграле?

3) В каких случаях применяется метод интегрирования по частями?

4) Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

5) Дайте геометрическую интерпретацию неопределенного интеграла $\int 2x\,dx$.

6) Изложите правило интегрирования правильной (неправильной) рациональной дроби.

7) Укажите подстановки, с помощью которых находятся интегралы:

а) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x\,dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx$; в) $\int \frac{ln^2 x}{x}dx$.

8) Представьте дробь $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ в виде суммы целой и дробной частей.

Тестовые задания к разделу 2

1. Множество всех первообразных функции $y = \cos x + 3x^2 - 2x$ имеет вид…

Варианты ответов:

а) $-\sin x + x^3 - x^2 + C$; б) $\sin x + x^3 - x^2 + C$;

в) $\sin x + x^3 - x^2$; г) $\sin x + \frac{3}{2}x^3 - x^2$.

2. Установите соответствие между интегралами и методами их вычисления:

1) непосредственное интегрирование;

2) методом замены переменной;

3) методом по частям.

Варианты ответов:

а) $\int \sqrt{x^3+1} \cdot x^2 dx$; б) $\int x \cdot \ln x dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2}$.

3. В результате подстановки t = 2x – 1 интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$ приводится к виду:

Варианты ответов:

а) $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$; б) $2\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$; в) $\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{t}}$.

4. Используя свойства неопределенного интеграла, интеграл $\int \frac{3x-5}{x^2}dx$ можно привести к виду…

Варианты ответов:

а) $\int \frac{3dx}{x^2} - 5\int \frac{dx}{x^2}$; б) $\int \frac{3}{x}dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2}$;

в) $3\int \frac{dx}{x} + 5\int x^{-2}dx$; г) $3\int \frac{dx}{x} - 5\int x^{-2}dx$.

5. Если в интеграле $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx$ применить подстановку $z = e^{2x}$, то dz равен:

Варианты ответов:

а) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$; б) $2e^{2x}dx$; в) $2e^{2x}dz$; г) $\frac{1}{2}e^{2x}dx$.

6. В интеграле $\int (x+1)\sin 2x dx$ разбиение на части u и dv имеет вид…

Варианты ответов:

а) $u=\sin 2x, dv=(x+1)dx$; б) $u=\sin 2xdx,\ dv=x+1$;

в) $u=x+1,\ dv=\sin 2xdx$; г) $u=(x+1)dx, dv=\sin 2x$.

7. Укажите целесообразную подстановку для нахождения интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ …

Варианты ответов:

а) $t=1+x^4$; б) $t=x^2$; в) $t=1+x^2$; г) $t=x^4$.

Раздел 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Определенный интеграл и его непосредственное вычисление

Пусть функция f(x) определена на отрезке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a<x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1} \le x \le x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. Интегральной суммой для функции f(x) на отрезке $a \le x \le b$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n \quad (11)$$

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке $a \le x \le b$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \quad (12)$$

Для любой функции f(x), непрерывной на отрезке $a \le x \le b$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции f(x) в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл F(x), служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (13)$$

Т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

3.2 Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т.е.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad (14)$$

Это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых непрерывных функций.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если к = const $\neq 0$, то

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \mathrm{k}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (15)$$

Свойство 3. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0 \qquad (16)$$

Свойство 4. При замене нижнего предела на верхний и наоборот, определенный интеграл меняет знак на противоположный, сохраняя при этом абсолютное значение:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (17)$$

3.3 Вычисление определенных интегралов непосредственно

Вычисление производим по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)_d \Big|_a^в = F(в) - F(a)$$

Порядок вычисления:

1) находим первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, т.е. находим неопределённый интеграл от функции $f(x)$, в котором принимаем С = о;

2) в полученном выражении подставляем вместо (x) сначала верхний предел $(в)$, а затем нижний предел (a), и из результата первой подстановки вычитаем результат второй подстановки.

Вычислить определённые интегралы.

Пример 1.

$$\int_{-1}^{3}\left(1-2x+3x^2\right)dx=\int_{-1}^{3}1dx-\int_{-1}^{3}2xdx+\int_{-1}^{3}3x^2dx=$$
$$=\int_{-1}^{3}dx-2\int_{-1}^{3}xdx+3\int_{-1}^{3}x^2dx=x\Big|_{-1}^{3}-2\cdot$$
$$\cdot\frac{x^3}{2}\Big|_{-1}^{3}+3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3}=\left(x-x^2+x^3\right)\Big|_{-1}^{3}=\left(3-3^2+3^3\right)-\left(-1-(-1)^2+(-1)^3\right)=24-(-3)=$$
$$=24+3=27.$$

Пример 2.

$$\int_{1}^{8}\left(4x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=4\int_{1}^{8}x+\frac{1}{3}\int_{1}^{8}x^{-\frac{2}{3}}dx=\left(4\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right)\Big|_{1}^{8}$$
$$=\left(2x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{1}^{8}=(2x^2+\sqrt[3]{x})\Big|_{1}^{8}=(2\cdot8^2+\sqrt[3]{8})-(2\cdot1^2+\sqrt[3]{1})=$$
$$=130-3=127.$$

Пример 3.

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4\left(\sqrt{x+}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Big|_1^4$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}+2\sqrt{4}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3}+2\sqrt{1}\right)=\frac{16}{4}+4-\frac{2}{3}-2=$$

$$=\frac{14}{3}+2=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

Пример 4.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^3 = \arcsin\frac{3}{3}-\arcsin\frac{0}{3}$$

$$=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}} = \int_0^1 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e^{2x}}\Big|_0^1 = \frac{1}{2e^{2x}}\Big|_1^0 = \frac{1}{2e^{2\cdot 0}}-\frac{1}{2e^{2\cdot 1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}.$$

3.4 Вычисление определенных интегралов методом замены переменной.

При вычислении определенных интегралов методом замены переменной (методом подставки) новая переменная водится подобно случаю неопределенного интеграла.

Порядок вычисления:

1) вводим новую переменную (t=u(x));

2) находим дифференциал новой переменной (dt=u`(x)dx);

3) производим вычисление новых пределов интегрирования $(t_в = u(в), t_н = u(a))$;

4) производим замену в подынтегральной функции и пределов интегрирования;

5) интегрируем новую функцию и вычисляем интеграл по формуле Ньютона- Лейбнина (Новую переменную можно обозначить любой буквой латинского алфавита кроме тех, что используются в условии).

Пример 1.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2} = \left| \begin{array}{c} t = 8 - x \\ dx = -dx \\ dx = -dx \\ t_в = 8 - 7 = 1 \\ t_н = 8 - 0 = 8 \end{array} \right| = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int_8^1 t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \Big|_8^1 =$$

$$= -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_8^1 = -3\sqrt[3]{t}\Big|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

Пример 2.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos)^2} = \left| \begin{array}{c} t = 1 - \cos x \\ dx = -\sin x dx \\ t_в = 1 - \cos \pi = 2 \\ t_н = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right|$$

$$= \int_1^2 \frac{2dxt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2} = \frac{2t^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = -\frac{2}{t}\Big|_1^2 = \left(-\frac{2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{1}\right) = -1 + 2 = 1.$$

Пример 3.

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2 - 7dx} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dx}{2} \\ t_в = 4^2 - 7 = 9 \\ t_н = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 7 = 1 \end{array} \right| = \int_1^9 3\sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^9 = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \sqrt{t^3}\Big|_1^9 = \sqrt{9^3} - \sqrt{1^3} = 27 - 1 = 26.$$

Пример 4.

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2-7}dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dx}{2} \\ t_в = 4^2 - 7 = 9 \\ t_н = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 7 = 1 \end{array} \right| = \int_1^9 3\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^9 = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \sqrt{t^3}\Big|_1^9 = \sqrt{9^3} - \sqrt{1^3} = 27 - 1 = 26.$$

3.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Производится по формуле

$$\int_a^в u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^в - \int_a^в v\cdot du$$

Пример 1.

$$\int_2^1 xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x, dv = e^{2x}dx \\ du = dx, v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \left(x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{2\cdot 1}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0\cdot e^0 - \frac{1}{4}e^0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^2.$$

Пример 2.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} u = x, dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \\ du = dx, v = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \end{array} \right| = x(-ctgx)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-ctgx)dx =$$

$$= -x\cdot ctgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx = -x\cdot ctgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cdot ctgx\frac{\pi}{2} + \ln\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\cdot ctgx\frac{\pi}{6} + \ln\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cdot 0 + \ln 1\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3} + \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \ln\frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2.$$

Пример 3.

$$\int_3^2 x^2\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, dv = x^2dx \\ du=\dfrac{dx}{x}, v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x\Big|_3^2 - \int_3^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3\ln x}{3}\Big|_3^2$$

$$-\frac{1}{3}\int_3^2 x^2dx = \left(\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}\right)\Big|_3^2 = \left(\frac{2^3\ln 2}{3}-\frac{2^3}{9}\right)-\left(\frac{3^3\ln 3}{3}-\frac{3^3}{9}\right)=$$

$$=\left(\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}-9\ln 3+3\right)=\frac{8}{3}\ln 2-9\ln 3+2\frac{1}{9}.$$

3.6 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции f(x) в пределах от α до $+\infty$ определяется равенством:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \tag{18}$$

Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует – расходящимся.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \tag{20}$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка [a,b] и непрерывна при $\alpha \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению, полагают:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)dx \tag{21}$$

Несобственный интеграл $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$, где $f(c)=\infty$, $(\alpha < c < b)$ называется сходящимся если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них.

Примеры вычисления несобственных интегралов.

Задание.

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Пример 1. $\int_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \infty$

Ответ: Расходится.

Пример 2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{-1} x^{-2} dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_{\alpha}^{-1} = \lim_{\alpha\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = 1$.

Ответ: Сходится.

Пример 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Подынтегральная функция четная, поэтому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\underset{b\to+\infty}{arctg\, b} - arctg\, 0\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Ответ: Сходится.

Поясним решение последнего примера геометрически в прямоугольной системе координат всякий определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ дает алгебраическую сумму площадей, ограниченных кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Построив кривую, как представлено на рисунке2, $y = \frac{1}{1+x^2}$ в пределах от α до β, имеем: данный несобственный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, которая неограниченно простирается влево и вправо и вместе с тем имеет конечную величину π.

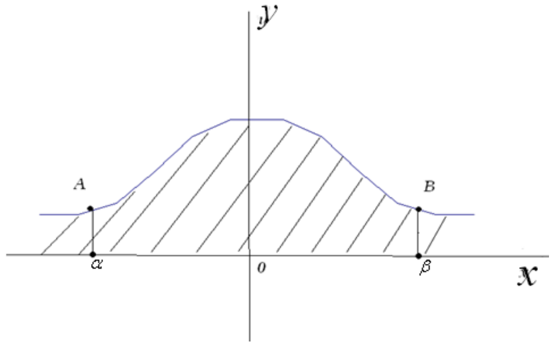


Рисунок 2

Пример 4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_\alpha^1 \frac{dx}{1} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\ln x)\Big|_\alpha^1 = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\ln 1 - \ln\alpha) = +\infty$

Ответ: Расходится.

Пример 5. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^\beta e^{-x}dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\beta = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(e^0 - e^{-\beta}\right) = 1$

Ответ: Сходится.

Пример 6. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left|\begin{matrix} x = 2sint \\ dx = 2cosdt \\ tв = arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \\ tн = \arcsin 0 = 0 \end{matrix}\right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\sin^3 t\cdot 2\cos tdt}{\sqrt{4-4\sin t}} = \frac{16}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t\cos tdt}{\cos t} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = 8\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{16}{3}.$$

Здесь в результате замены переменной данный несобственный интеграл преобразовался в собственный интеграл от непрерывной функции и с конечным интервалом интегрирования, который вычислен обычным путем без применения предельного перехода.

Возможно и обратное: при замене переменной собственный интеграл может перейти в несобственный.

Пример 7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ tв = \dfrac{\pi}{2} \\ tн = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

Ответ: Сходится.

Пример 8. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{\alpha}^{0} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}(-\infty)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: Сходится

Пример 9. $\int\limits_0^6 \frac{dx}{(x-5)^2}$

Здесь функция неопределена в точке $x=5$, принадлежащей отрезку интегрирования [0;6]. Поэтому,

$$\int\limits_0^6 \frac{dx}{(x-5)^2} = \lim_{\alpha\to0} \int\limits_0^{5-\alpha} \frac{dx}{(x-5)^2} + \lim_{\beta\to0} \int\limits_{5+\beta}^{6} \frac{dx}{(x-5)^2} = \lim_{\alpha\to0}\left[\left(-\frac{1}{x-5}\right)\Big|_0^{5-\alpha} + \right.$$

$$\left.\left(-\frac{1}{x-5}\right)\Big|_{5+\beta}^{6}\right] = -\frac{1}{5-\alpha-5} - \left(-\frac{1}{0-5}\right) - \frac{1}{6-5} - \left(-\frac{1}{5+\beta-5}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{1}{\beta} = \infty.$$

Ответ: Расходится.

Вопросы для самоконтроля по разделу 3

1.Выпишите формулу Ньютона – Лейбница и объясните ее смысл.

2.Приведите основные свойства определенного интеграла.

3. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.

4.Перечислите приложения определенного интеграла.

5.В чем заключается метод замены переменной в определенном интеграле?

6. В чем заключается метод интегрирования по частям в определенном интеграле?

7. Какие интегралы называются несобственными?

8.Какой геометрический образ соответствует несобственному интегралу ?

9. Как вычислить интеграл от разрывной функции?

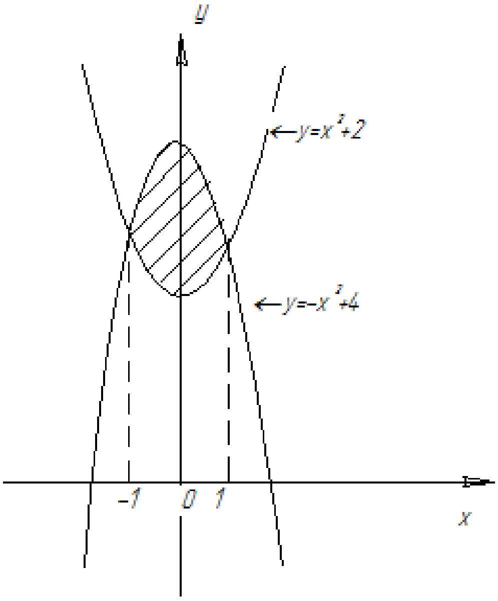
Тестовые задания к разделу 3

1. Определенный интеграл $\int_{-3}^{3}\left(-x^2+4x\right)dx$ равен:

Варианты ответов:

а) 24; б) – 12; в) 22; г) – 18.

2. Площадь фигуры изображенной на рисунке, определяется интегралом:



Варианты ответов:

а) $\int_{2}^{4}\left(\left(x^2+2\right)-\left(-x^2+4\right)\right)dx$;

б) $\int_{-1}^{1}\left(\left(-x^2+4\right)-\left(x^2+2\right)\right)dx$;

в) $\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2+2\right)-\left(-x^2+4\right)\right)dx$;

г) $\int_{2}^{4}\left(\left(-x^2+4\right)-\left(x^2+2\right)\right)dx$.

3. Несобственным интегралом является интеграл:

Варианты ответов:

а) $\int\left(x^3-\mathrm{tg}x\right)dx$; б) $\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$; в) $\int_{0}^{2}dx\int_{x}^{3x}dy$; г) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$.

4. Используя свойства определенного интеграла, интеграл $\int_{0}^{\pi}\left(3\sin x+x^2\right)dx$ можно привести к виду:

Варианты ответов:

а) $\int\limits_{\pi}^{0}\left(3\sin x + x^2\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 dx$;

в) $3\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin x + x^2\right)dx$; г) $3\int\limits_{0}^{\pi}\sin x dx + \int\limits_{0}^{\pi} x^2 dx$.

5. Какие из определенных интегралов существуют:

Варианты ответов:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\sqrt{9 - x^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4 - x^2}dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{9 - x^2}dx$; г) $\int\limits_{0}^{4}\sqrt{9 - x^2}dx$.

6. Материальная точка движется по закону $S = t^3 - t^2 + 2t - 3$. Тогда ее скорость в момент времени $t=2$ равна…

Варианты ответов:

а) 10; б) 14; в) 12; г) 8.

Раздел 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1 Применение определенного интеграла к вычислению различных величин

Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических и физических величин. Вычисление некоторой величины и, соответствующей промежутку $a \le x \le b$ изменения независимой переменной *x*, выполняется по следующей схеме:

1. Пусть величина *u* получает приращение $\Delta u \approx f(x)\,\Delta x$, соответствующее изменению *x* на малую величину Δx; $f(x)$ рассматривается как данная или определяемая из условия задачи функция от *x* (рисунок 3).

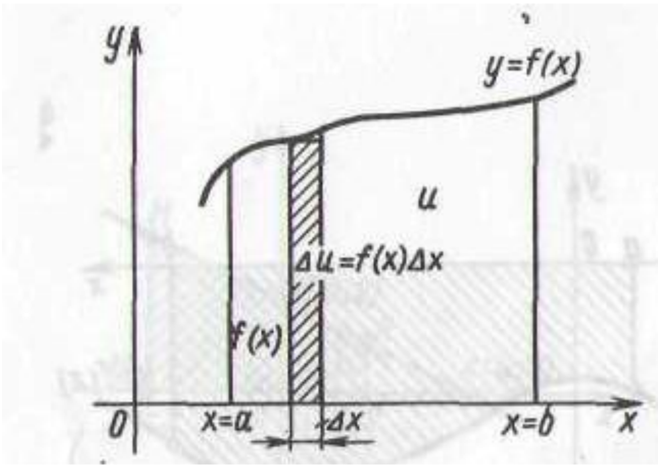


Рисунок 3

2. Заменив приращение Δu дифференциалом *du* (главная часть приращения Δu) и Δx – дифференциалом *dx* ($\Delta x = dx$), получим

$du = f(x)\,dx.$

3. Интегрируя это равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, находим

$u = \int_a^b f(x)\,dx.$

4.2 Вычисление площади плоской фигуры

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x),* осью *Ox* и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ (рисунок 4).

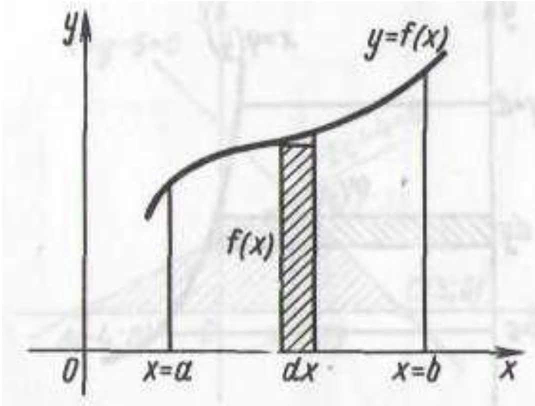


Рисунок 4

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием *dx* и высотой *f(x)*, т.е. *dS=f(x)dx*, то, интегрируя это равенство в пределах от *a* до *b*, получим

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (22)$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси *Oy* так, что $c \le y \le d$, $x=\varphi(y) \ge 0$ (рисунок 5), то дифференциал переменной площади S ранен *dS=f(y)dy*, откуда

$$\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \mathrm{f(y)\,dy} \qquad (23)$$

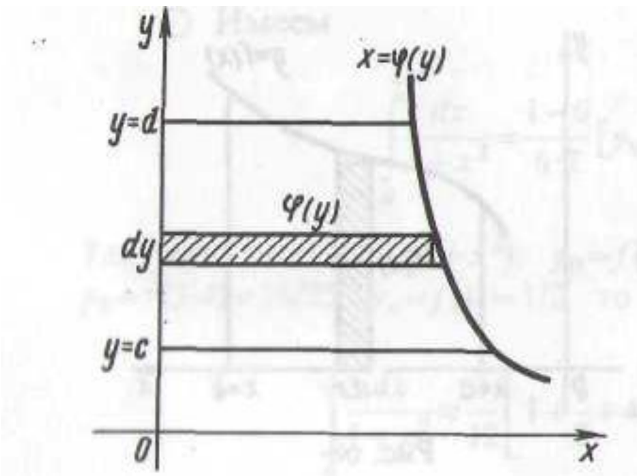


Рисунок 5

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой *y=f(x)*, осью *Ox* и прямыми $x = a$ и $x = b$, лежит под осью *Ox* (рисунок 6), площадь находится по формуле:

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad (24)$$

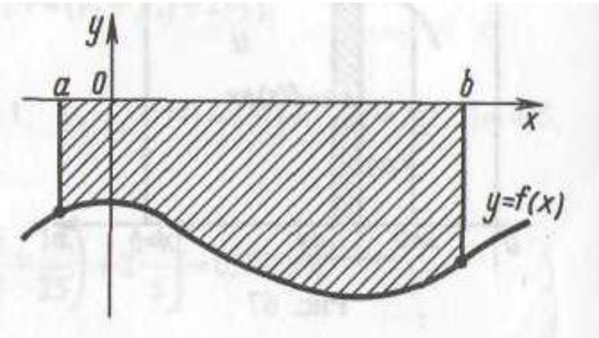


Рисунок 6

Если фигура, ограниченная кривой *f(y)*, осью *Ox* и прямыми *x=a* и *x=b*, расположена по обе стороны от оси *Ox* (рисунок 7), то

$$S = \int_a^c f(x)\, dx + \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad (25)$$

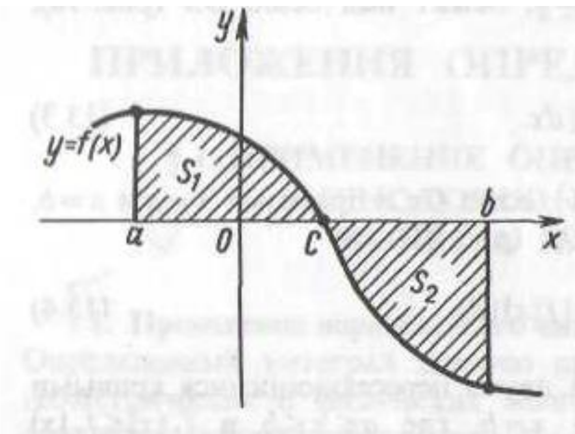


Рисунок 7

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ (рисунок 8). Тогда ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \qquad (26)$$

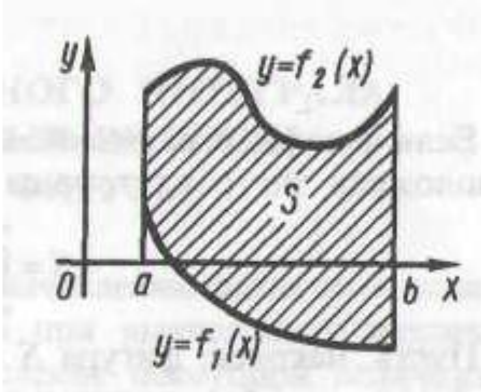


Рисунок 8

Пример 1. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ и $x = 3$.

Решение:

В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 2$ и $x = 3$ и осью Ox (рисунок 9).

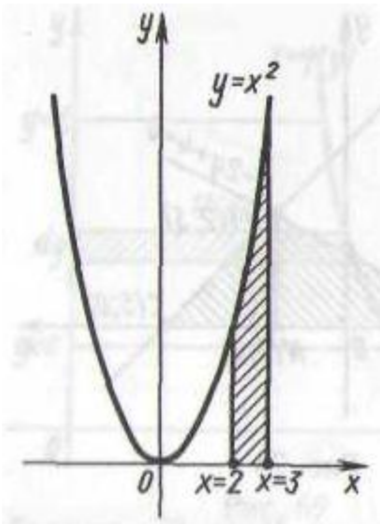


Рисунок 9

По формуле (22) находим:

$S = \int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 6\frac{1}{3}$ (кв.ед.).

Пример 2. $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$.

Решение:

Выполним построение фигуры (рисунок 10). Искомая площадь заключена между параболой $y = -x^2 + 4$ и осью Ox.

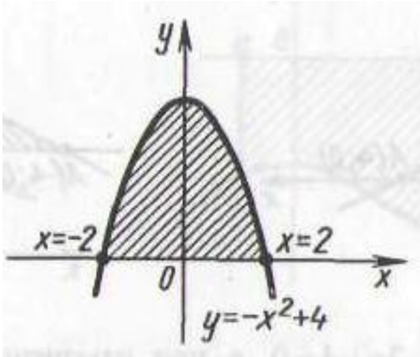


Рисунок 10

Найдем точки пересечения параболы с осью *Ox*. Полагая $y = 0$, найдем $x = \pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси *Oy*, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси *Oy*, и полученный результат удвоим:

$S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 5\frac{1}{3}$ (кв.ед.);

$S = 2S_1 = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$ (кв.ед.).

Пример 3. $y^2 = x$, $y \geq 0$, $x = 1$ и $x = 4$.

Решение:

Здесь требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной верхней ветвью параболы $y^2 = x$, осью *Ox* и прямыми $x=1$ и $x=4$ (рисунок 11).

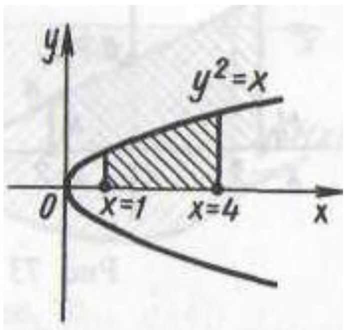


Рисунок 11

По формуле (22), где $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ и $b = 4$, находим

$$S = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{1/2}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = 4\frac{2}{3}$$

(кв.ед.)

Пример 4. *y = (1/3)x*^{3}*, y = 0, x = – 1* и *x = 2*.

Решение:

Кривую *y = (1/3)x*^{3}построим по точкам (рисунок 12). Фигура, ограниченная данными линиями, расположена по обе стороны от оси *Ox*.

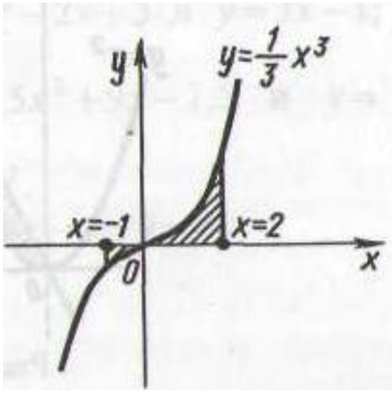


Рисунок 12

Таким образом, площадь фигуры находим по формуле (25):

$$S = \left|\int_{-1}^{0} \frac{1}{3}\mathrm{x}^3\,\mathrm{dx}\right| + \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{x}^3\,\mathrm{dx} = \left|\left[\frac{x^4}{12}\right]_{-1}^{0}\right| + \left[\frac{x^4}{12}\right]_0^2 = \left|-\frac{1}{12}\right| + \frac{16}{12} = 1\frac{5}{12} \text{ (кв.ед.).}$$

Пример 5. *y = x*^{2} и *y = 2x*.

Решение:

Данная фигура ограничена параболой *y = x*^{2} и прямой *y = 2x* (рисунок 13).

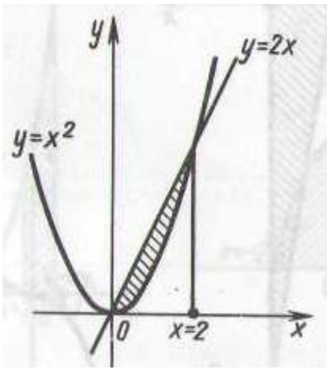


Рисунок 13

Для определения точек пересечения заданных линий решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

откуда находим $x^2 - 2x=0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Используя для нахождения искомой площади формулу (26), получим:

$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ (кв.ед.).

Пример 6. $7x^2 - 9y + 9=0$ и $5x^2 - 9y+27=0$.

Решение:

Запишем уравнения парабол в виде $y=(7/9)x^2 + 1$ и $y = (5/9)x^2 + 3$ и построим эти параболы (рисунок 14).

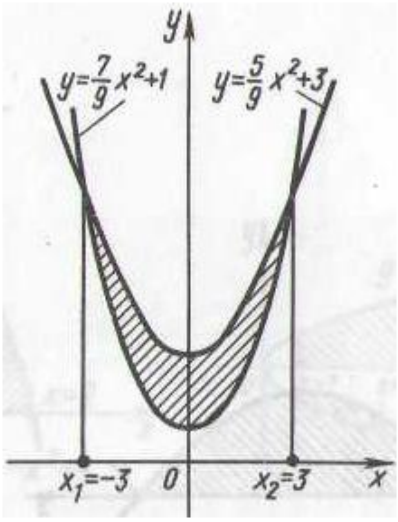


Рисунок 14

Для нахождения точек их пересечения решим систему

$$\begin{cases} y = (7/9)x^2 + 1 \\ y = (5/9)x^2 + 3 \end{cases}$$

откуда $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Так как фигура симметрична относительно оси *Oy*, то найдем половину ее площади, взяв пределы интегрирования от 0 до 3, и удвоим результат:

$S_1 = \int_0^3 \left[\left(\frac{5}{9}x^2 + 3\right) - \left(\frac{7}{9}x^2 + 1\right)\right] dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{2}{9}x^2\right) dx = 2\left[x - \frac{x^3}{27}\right]_0^3 ==$ $2(3-1) = 4$ (кв.ед.);

$S = 2S_1 = 2 \cdot 4 = 8$ (кв.ед.).

4.3 Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt. \qquad (27)$$

Пример 1. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение:

Согласно условию, $f(t) = 3t^2 + 2t+1$, $t_1 =0$, $t_2= 10$. По формуле (27) находим:

$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)\, dt = [t^3 + t^2 + t]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110$ (м).

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью $v = (4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение:

Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = [2t^3 + t^2]_0^5 = 275$ (м).

$S_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75$ (м).

$S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$(м).

4.4 Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой *f(x)* при перемещении по оси *Ox* материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (28)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = k \cdot x, \qquad (29)$$

где F – сила, Н; x – абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k – коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример 1. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение:

Так как x = 0,01 м при F= 10 Н, то, подставляя эти значения в равенство (8), получим $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда k=1000 Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим F= 1000x:, т. е. $f(x)= 1000x$. Искомую работу найдем по формуле (28), полагая $a = 0,\ b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000x\, dx = 500x^2 \big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Пример 2. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

Решение:

Так как известны величина растяжения пружины (0,04 м) и произведенная при этом работа (20 Дж), то, используя формулу (28), имеем

$$20 = \int_0^{0,04} kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,04} = 0,0008k$$

откуда k = 20 / 0,0008=25 000 (Н/м).

Пусть x_1 – величина растяжения пружины, соответствующая произведенной при этом работе в 80 Дж. Тогда

$$80 = \int_0^{x_1} 25000x\,dx = 25000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1} = 12500x_1^2$$

откуда x_1^2 = 80 / 12 500 = 16/2500; x_1 =4/50 = 0,08 м.

4.5 Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла

Объем фигуры, образованный в результате вращения вокруг оси O_x криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x) (a≤x≤b), осью O_x и прямыми x=a и x=b вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx \qquad (30)$$

Аналогично, объем фигуры, образованной вращением вокруг оси O_y криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x=φ(y) (c≤y≤d), осью O_y и прямыми y=c и y=d, находится по формуле:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy \qquad (31)$$

Задание: вычислить объемы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями.

Пример 1. Y^2=4x, y=0 и x=4 вокруг оси O_x.

Выполним построение (рисунок 15). Фигура вращения представляет собой параболоид; пределы интегрирования a=0 и b=4. По формуле получим.

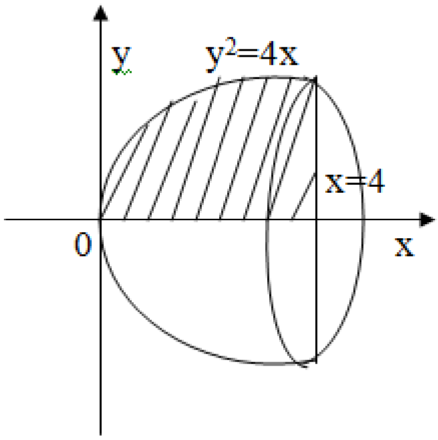


Рисунок 15

$V=\pi\int_0^4 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi$ (куб. ед.).

Пример 2. $y=x^2-9$ и $y=0$ вокруг оси O_x

Выполним построение (рисунок 16). В силу симметрии фигуры относительно оси O_y возьмем пределы интегрирования от 0 до3, а затем полученный результат удвоим. По формуле находим

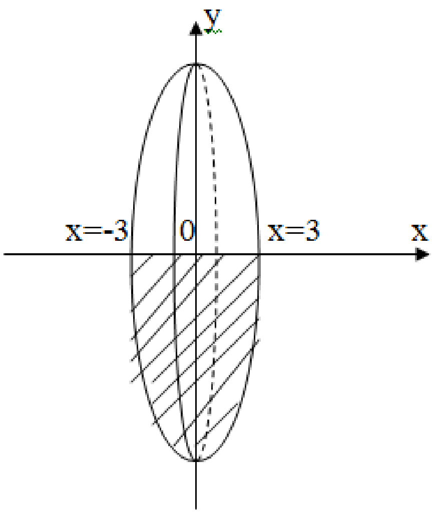


Рисунок 16

$$V/2 = \pi\int_0^3 (x^2-9)^2 dx = \pi\int_0^3 (x^4-18x^2+81)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right]_0^3 = 129{,}6\pi$$

$$V = 2\cdot 129{,}6\pi = 259{,}2\pi$$

Пример 3. $x-2y+6=0$, $y=0$ и $x=2$ вокруг оси O_x

Выполним построение (рисунок 17). Прямая $x-2y+6=0$ пересекает ось O_x в точке $A(-6;0)$; пределы интегрирования $a=-6$ и $b=2$. Вычислим объем конуса, образованного вращением треугольника ABC, в котором сторона AB выражается уравнением y=(1/2)x+3:

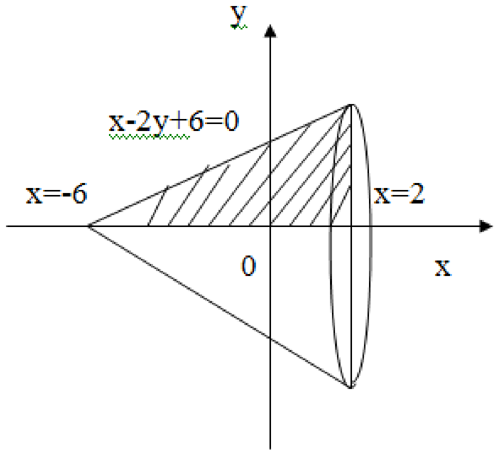


Рисунок 17

$$V=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2dx=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+3x+9\right)dx=\pi\left[\frac{x^3}{12}+\frac{3x^2}{2}+9x\right]_{-6}^{2}=42\frac{2}{3}\pi$$

Пример 4. $y^2=9(x+3)$ и $x-y+3=0$ вокруг оси O_x

Выполним построение фигуры (рисунок 18). Решив систему

$$\begin{cases} y^2=9(x+3) \\ x-y+3=0 \end{cases}$$

Найдем точки пересечения параболы и прямой: A(-3;0) и B(6;9); пределы интегрирования a=-3 и b=6. Искомый объем равен разности объема V_1 параболоида, образованного вращением кривой $y^2=9(x+3)$, и объема V_2 конуса, образованного вращением прямой y=x+3:

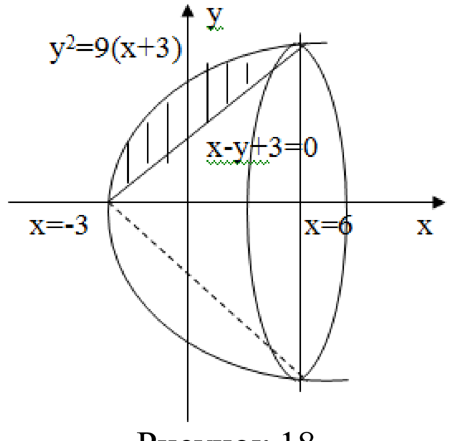


Рисунок 18

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{6} 9(x+3)dx = 9\pi\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{6} = 364{,}5\pi$$

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{6} (x+3)^2 dx = \frac{\pi}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{6} = 243\pi$$

$$V_1 - V_2 = 364{,}5\pi - 243\pi = 121{,}5\pi$$

Заключение

Основная задача интегрального исчисления – задача о нахождении первообразной для заданной функции. Эта задача имеет большое значение, так как применяется широко во всех областях науки.

Но не всегда возможно вычислить определенный интеграл указанными способами, потому что многие неопределенные интегралы не выражаются через элементарные функции или имеют громоздкие выражения.

В таких случаях используют справочники, в которых имеются наиболее распространенные интегралы, применяют приближенные методы интегрирования, используют разложение функции в степенной ряд.

С этими методами можно ознакомиться в рекомендуемой литературе.

Приложение А – Основные неопределенные интегралы

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
8. $\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$	18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
9. $\int ctgx dx = \ln\|\sin x\| + C$	19. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	

Приложение Б – Интегрирование рациональных функций

Вид интеграла	Метод интегрирования
1. $\int \frac{A}{x-a} dx$	$A \int \frac{1}{x-a} d(x-a) = A \ln\lvert x-a \rvert + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx, k \neq 1$	Непосредственное интегрирование $A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$
3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx, p^2 - 4q < 0$	Подстановка $t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)^{`} = x + \frac{p}{2}$ $x = t - \frac{p}{2}, dx = dt$
4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s} dx$, (n>1)	Рекуррентная формула $\frac{x}{(2n-n)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}}$

Приложение В – Интегрирование иррациональных функций

R – рациональная функция своих аргументов

Вид интеграла	Метод интегрирования
1. $\int R\left(x^{\frac{m}{n}}, x, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Подстановка $x=t^k$, $dx=k \cdot t^{k-1}dt$, где k – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
2. $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, \ \ldots, (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Подстановка $ax+b=t^k$, $x=\frac{1}{a}(t^k-b)$ $dx=\frac{1}{a}k \cdot t^{k-1}dt$, где k – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
3. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, $x=\frac{d\,t^k-b}{a-c\,t^k}$ $dx=(ad-bc)\frac{kt^{k-1}}{\left(c\,t^{k-1}-a\right)^2}dt$, где k – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	Подстановка $t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{`}=ax+\frac{b}{2}$ $x=\frac{t}{a}-\frac{b}{2a}$, $dx=\frac{dt}{a}$
5. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$	Подстановка $x=a \cdot \operatorname{tg} t, dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$ или $x=a \cdot \operatorname{ctg} t, dx=-\frac{a}{\sin^2 t}dt$
6. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$	Подстановка $x=a \cdot \sin t, dx=a \cdot \cos t dt$ или $x=a \cdot \cos t, dx=a \cdot \sin t\, dt$
7. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$	Подстановка $x=\frac{a}{\sin t}, dx=-a\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ или $x=\frac{a}{\cos t}, dx=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

Приложение Г – Интегрирование тригонометрических функций

R – рациональная функция своих аргументов

Вид интеграла	Метод интегрирования
1.$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$	Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}, x = 2arctg\ t$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
1.1 $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, если $R(-\sin x, \cos x)dx = -R(\sin x, \cos x)dx$	Подстановка $t = \cos x$, x=arccos t $\sin^2 x = 1 - t^2, dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
1.2 $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, если $R(\sin x, -\cos x)dx = -R(\sin x, \cos x)dx$	Подстановка $t = \sin x$, x=arcsin t $\cos^2 x = 1 - t^2, dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
1.3$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, если $R(-\sin x, -\cos x)dx = R(\sin x, \cos x)dx$	Подстановка $t = \mathrm{tg}\, x$, x=arctg t $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$
2. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$	Если m>0, m – четное, то см. 1.1; если n>0, n – нечетное, то см. 1.2; если $m+n$<0, $m+n$ - нечетное, то см. 1.3; если m≥0, n≥0, m, n – четные, то по формулам понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
3. $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$ $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$ $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$	Сводятся к сумме табличных интегралов с помощью формул: $\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+$ bx; $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+$ bx; $\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+$ bx.

Приложение Д – Основные тригонометрические формулы

I группа. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

II группа. Формулы сложения:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

$$tg(x+y) = \frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}.$$

$$tg(x-y) = \frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}.$$

III группа. Формулы кратных аргументов:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$$

$$\cos 2x = cos^2\, x - sin^2 x = 2cos^2 x - 1 = 1 - 2sin^2 x.$$

$$tg\ 2x = \frac{2tgx}{1-tg^2 x}.$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\, sin^3 x.$$

$$\cos 3x = 4\, cos^3\, x - 3\cos x.$$

IV группа. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}.\cos\frac{x+y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}.\sin\frac{x+y}{2}.$$

$$tg\ x + tg\ y = \frac{\sin(x+y)}{cosxcosy}.$$

$$tg\ x - tg\ y = \frac{\sin(x-y)}{cosxcosy}.$$

V группа. Преобразование произведений в суммы или разности:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) - \sin(x+y)].$$

VI группа. Формулы понижения степени:

$$cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

$$sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$cos^3 x = \frac{3cosx+cos3x}{4}.$$

$$sin^3 x = \frac{3sinx+sin3x}{4}.$$

VII группа. Формулы половинного аргумента:

$$sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}.$$

$$cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}.$$

$$tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}.$$

В этих формулах знак “+” или ”-” выбирается в зависимости от того в какой четверти находится угол $\frac{x}{2}$.

VIII группа. Соотношения между функциями:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x}$$

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{ctg^2 x}{1+ctg^2 x}$$

$$sin^2 x = \frac{1}{1+ctg^2 x} = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

Приложение Е – Формулы сокращенного умножения и некоторые свойства степени

Формулы сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы (разности) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. Разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
3. Куб суммы (разности) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.
4. Сумма (разность) кубов $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mu\, ab + b^2)$.

Некоторые свойства степени:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
5. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Список использованных источников

Список использованных источников

Основные источники:

1 Кундышева, Е.С. **Математика** : учебник / Е.С. Кундышева. - 4-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. - 562 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр.: с. 552-553. - ISBN 978-5-394-02261-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452840

Дополнительные источники**:**

2 Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Интернет – ресурсы:

3 http: // www.math test.ru.
4 http: // www.webmath.ru.
5 http: // e - scince.ru.
6 http: // mathem lib.ru.