МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«Ряды»

по дисциплине
«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

ДЛЯ ЛЮБЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Братск, 2020

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

« » 2020 г. ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2020 г. №______

Содержание

Введение

Решение многих задач сводится к вычислению знаний функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Однако точное выполнение указанных математических операций во многих случаях оказывается затруднительным или невозможным.

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, Ньютон и Лейбниц выражали подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом членов. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики 18-го века сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять правила алгебры к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов. Эта задача была решена математиками 19-го века.

Ряды представляют простой и весьма современный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

Раздел 1 Числовые ряды

1.1 Числовые ряды сходящиеся и расходящиеся. Необходимый признак сходности ряда. Достаточные признаки сходности рядов с неотрицательными членами

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, где $a_n = f(n)$.

Определение: Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется бесконечным числом ряда, а числа $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ - **членами ряда**; $a_n = f(n)$ называется общим членом.

Сумма первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют ***n*-ой частичной суммой ряда:**
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Ряд называется **сходящимся**, если его n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S называют суммой ряда.

Если же при $n \to \infty$ n-я частичная сумма ряда не стремится к конечному пределу, то называется **расходящимся**.

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

Теорема 1. Если сходится ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, то сходится и ряд $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots$, получаемый из данного ряда отбрасываем первых m членов (этот последний ряд называют m-м остатком исходного ряда), обратно, из сходимости m-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда.

Теорема 2. Если сходится ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ и суммой его является число S, то сходится и ряд $ka_1 + ka_2 + ka_3 + \cdots$, причем сумма последнего ряда равна $k \cdot S$.

Теорема 3. Если сходятся ряды $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ и $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ имеющие соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится и ряд $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots$ причем сумма последнего ряда равна $S_1 + S_2$.

Теорема 4. (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. при $n \to \infty$ предел общегчлена сходящегося ряда равен 0.

Замечание: Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится (это достаточный признак расходимости для всякого ряда).

Для числовых рядов с неотрицательными членами, при исследовании их сходимости, употребительны следующие достаточные признаки сходимости:

Первый признак сравнения:

Если ряд с неотрицательными членами $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ сравнить с другим рядом с положительными (неотрицательными) членами $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$ сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера n:

1) $a_n \leq b_n$ и ряд (b) сходится, то и ряд (a) также сходится;
2) $a_n \geq b_n$ и ряд (b) расходится, то и ряд (a) также расходится.

При использовании это признака исследуемый ряд часто сравнивается:

1) с бесконечной геометрической прогрессией
$1+q+q^2+q^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, где $q>0$, которая при $q<1$ сходится , а при $q\geq 0$ расходится;
2) с гармоническим рядом
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится;
3) с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который
при $\alpha>1$ сходится,
при $\alpha<1$ расходится,
при $\alpha=1$ - это гармонический ряд.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле.

Второй признак сравнения:

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Признак Коши.

Если для ряда $a_1+a_2+a_3+\cdots$ существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=C$ то этот ряд сходится при $\mathrm{C}<1$ и расходятся при $\mathrm{C}>1$.

Признак Даламбера.

Если для ряда $a_1+a_2+a_3+\cdots$ существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$ то этот ряд сходится при D<1 и расходятся при $D>1$.

Интегральный признак.

Если $f(x)$ при $x\geq 1$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n=f(n)$, сходится или расходятся зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример 1. Дан общий член ряда $a_n=\frac{n}{10^n+1}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение: Если *n=1*, то $a_1=\frac{1}{10^1+1}=\frac{1}{11}$; *n=2*, то $a_2=\frac{2}{10^2+1}=\frac{2}{101}$; *n=3*, то $a_3=\frac{3}{1001}$; *n=4*, то $a_4=\frac{4}{10001}$.

Ряд можно записать в виде:
$\frac{1}{11}+\frac{2}{101}+\frac{3}{1001}+\frac{4}{10001}+\cdots$.

Пример 2. Найти общий член ряда
$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$.

Решение: последовательные числители образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7,…, n – й член прогрессии находим по формуле: $a_n=a_1+d(n-1)$. Здесь $a_1=1$, $d=2$, поэтому $a_n=2n-1$. Последовательные знаменатели образуют геометрическую прогрессию 2, 2^2, 2^3, 2^4,…, n – й член этой прогрессии $b_n=2^n$.

Следовательно, общий член ряда $U_n=\frac{(2n-1)}{2^n}$.

Пример 3. . Найти общий член ряда

$\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\cdots$.

Решение: показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени n – го члена равен n. Числители дробей $\frac{2}{3},\frac{3}{7},\frac{4}{11},\frac{5}{15},\cdots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому n – й числитель равен $n+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Следовательно, n- й знаменатель равен 3+4(n-1)=4 n-1. Итак, общим членом ряда является $U_n=\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$.

Пример 4. Найти сумму ряда

$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\frac{1}{7*9}+\cdots$.

Решение: Имеем $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Разложим дробь на простейшие:

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ Тогда $a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$, $a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$, $a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$, $a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$.

Следовательно, $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$.

Так как $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 5. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\cdots .$$

Решение: Ищем предел общего члена a_n данного ряда при неограниченном увеличении его номера n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}\neq 0.$$

Следовательно необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ не выполняется.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots$.

Решение: Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится $\left(a_1=\frac{2}{3},q=\frac{1}{2}<1\right)$.

Найдем сумму ряда. Используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{a_1}{1-q}$. $S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\cdots$.

Решение: Данный ряд получен из гармонического отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Решение: Члены данного ряда меньше соответственных членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, т.е. ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$.

Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходится и данный ряд.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда с общим членом

$a_n=\frac{1}{4*2^n-3}$.

Решение: Сравним этот ряд с рядом, у которого общий член $b_n=\frac{1}{2^n}$, (т.е. с бесконечно убывающей геометрической прогрессией). Применим второй признак сравнения рядов:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{4*2^n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{4}\neq 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда

$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots$.

Решение: Имеем $a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Здесь удобно применить признак Коши, т.к. $\sqrt[n]{a_n}=\frac{n}{2n+1}$, а предел дроби $\frac{n}{2n+1}$ находится просто.

$C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ряд сходится.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда

$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\cdots+\frac{2^n}{n^{10}}+\cdots$.

Решение: Применим признак Даламбера:

$$a_n=\frac{2^n}{n^{10}},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{2^n}{n^{10}}}=\frac{2^n*2*n^{10}}{2^n(n+1)^{10}}=2\left(\frac{n}{n+1}\right).^{10}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{10}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2,$$

т.к. D$=2>1$, то ряд расходится.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда

$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+\cdots$.

Решение: Здесь $a_n=\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{\frac{n+1}{2}}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n\sqrt{3}}$.

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, то ряд сходится.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда

$\frac{1}{2\,ln2} + \frac{1}{3\,ln3} + \frac{1}{4\,ln4} + \cdots$.

Решение: Применим интегральный признак

$a_n = \frac{1}{(n+1)\,ln(n+1)}$, $f(x) = \frac{1}{(n+1)\,ln(n+1)}$.

Рассмотрим

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\times\ln(x+1)} = \int\limits_1^\infty \frac{\frac{dx}{x+1}}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^\infty = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

Пример 14. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

Решение: Применим признак Даламбера

$a_n = \frac{n^5}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5 * 2^n}{2^{n+1} * n^5} = \frac{2^n}{2^n * 2} * \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).^5$

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1.$

Поэтому, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

Решение: По признаку Даламбера $a_n = \frac{n!}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$.

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! * 5^n}{n! * 5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!(n+1) * 5^n}{n! * 5^n * 5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty \Rightarrow$ данный ряд расходится.

1.2 Знакопеременный ряд. Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда.

Ряд с членами разных знаков $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ называется **знакопеременным.**

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$.

Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных значений его членов, расходится.

Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ (знаки членов ряда строго чередуются).

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю.

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Возьмем n-ю частичную сумму знакочередующегося ряда, для которого выполняется признак Лейбница:

$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$.

Пусть R_n – n- й остаток ряда. Его модно записать как разность между суммой ряда S и n-й частичной суммой S_n, т.е. $R_n = \mathrm{S} - S_n$.

Не трудно видеть, что

$R_n = (-1)^n * (a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots)$.

Величина $|R_n|$ оценивается при помощи неравенства $|R_n| < a_{n+1}$.

Остановимся теперь на некоторых свойствах знакопеременных рядов.

1. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки бесконечного множества его членов, будет абсолютно сходиться и иметь ту же сумму, что и первоначальный ряд.

2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться. В каждом условно сходящемся ряде можно так переставить члены, чтобы новый ряд имел суммой ***любое наперед заданное число*** (можно также заставить ряд расходиться).

Замечание. Сходящийся ряд, у которого все члены положительны или все члены отрицательны, - абсолютно сходящийся.

Пример 1.

Ряд $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots,$ (1)

получаемый перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда

$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots,$ (2)

тоже сходится и имеет ту же сумму S, что и геометрическая прогрессия (2). Стало быть, $S = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$ $\left(a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{2}\right)$.

Эту сумму можно проверить, рассматривая частичную сумму Sa_n ряда (1) как сумму членов геометрической прогрессии с первым членом

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ и со знаменателем $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Пример 2.

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$ (3)

сходится условно, т.к. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ расходится (как гармонический) и по признаку Лейбница $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\cdots$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

А ряд $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$, (4)

полученный перестановкой членов ряда (3), сходится, но сумма его в полтора раза больше суммы данного ряда.

$S(3)=ln2=0.693\ldots$

$S(4)=\frac{3}{2}=0.693.$

(Подробное вычисление сумм указанных рядов смотри (см.) в литературе «1» стр. 540).

3. Если ряды $a_1+a_2+a_3+\cdots$ и $b_1+b_2+b_3+\cdots$

Сходятся абсолютно и имеют суммами соответственно S_1 и S_2, то сходится абсолютно и ряд $a_1b_1+(a_1b_2+b_1a_2)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$

Этот ряд называется произведением рядов $a_1+a_2+a_3+\cdots$ и $b_1+b_2+b_3+\cdots$

Его сумма равна $S_1 * S_2$.

Пример 3. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. (Определить является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся).

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Cos\,n\alpha}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}Sin\frac{n\pi}{3}$

Решение:

1. Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю:

$1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>\cdots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$.

Поэтому, по признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum\frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак :

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}ln(2x-1)|_1^{\beta}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}ln(2\beta-1)=+\infty$, заключаем, что ряд с положительными членами расходится. Следовательно, данный ряд (1)сходится условно.

2. Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α - любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд

$\sum\frac{|Cos\,n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum\frac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\frac{|Cos\,n\alpha|}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения (1), ряд с неотрицательными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд (2) сходится абсолютно.

3. Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} \cdots$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Поэтому, согласно признаку Лейбница, он сходится. Ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, также сходится согласно интегральному признаку

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{\beta\to\infty} ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{\beta} = ln2.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

4. Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} Sin\frac{n\pi}{3}$ – не существует, т.е. при $n \to \infty$ $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{\frac{3}{n}}$ и $\frac{3}{n} \to 0, \frac{\pi}{\frac{3}{n}} \to \infty, Sin\frac{\pi}{\frac{3}{n}}$ будет колебаться между -1 и +1, не стремясь ни к какому определенному числу, т.е. не имеет предела. Значит, ряд (4) расходится.

Пример 4. Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ сходится, и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение: Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница:

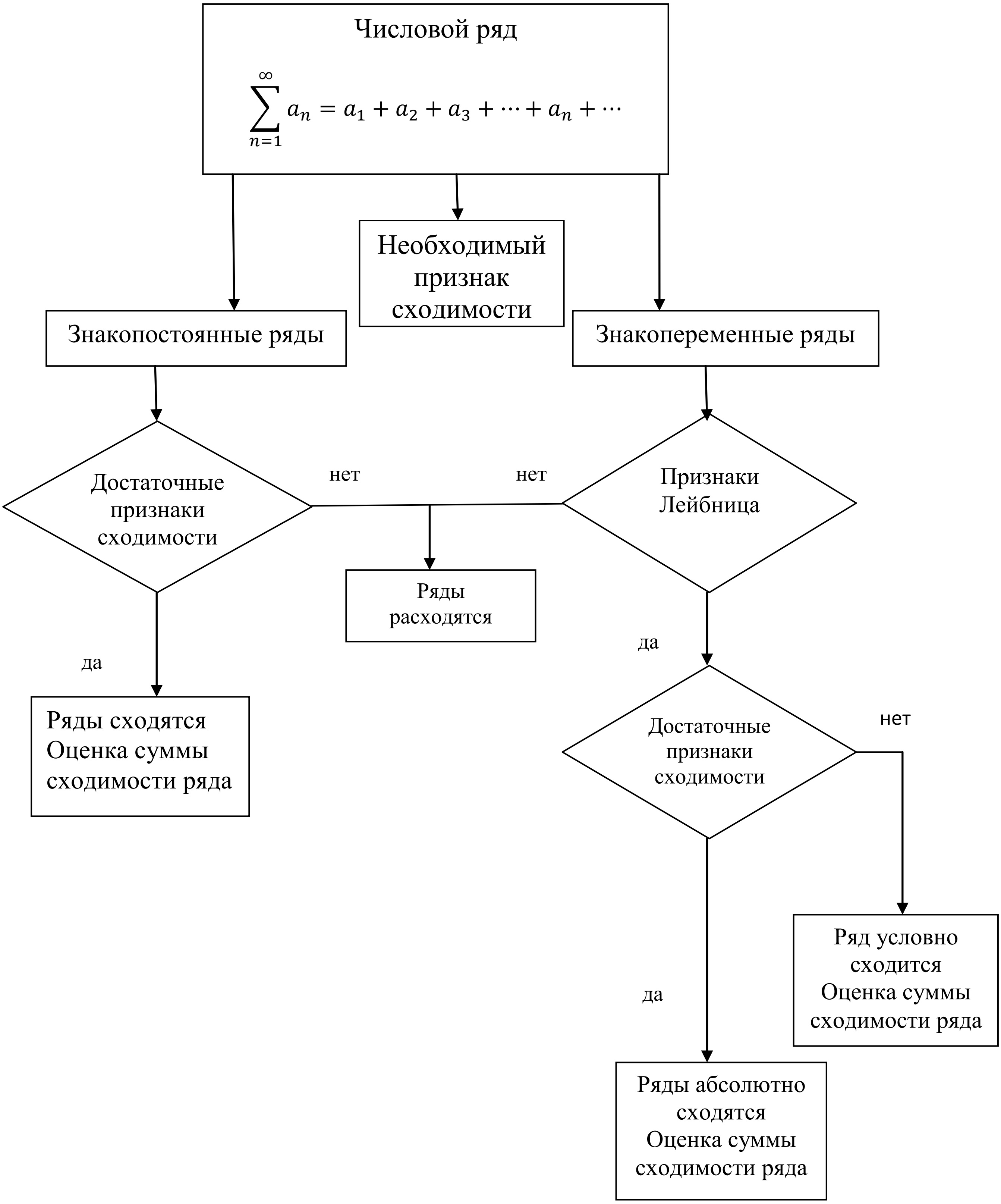
1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{9} > \frac{1}{28} > \cdots$ сходится;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0.$

Далее, вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01: $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{9}$; $a_3 = -\frac{1}{28}$; $a_4 = \frac{1}{65}$ (0,015), $a_5 = -\frac{1}{126} = -0{,}0008$, $|a_5| < 0.01$, следовательно, для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01, достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0.41.$$

1.2.1 Обобщенная схема исследования числовых рядов



1.3 Вопросы для контроля

2. Сформулируйте определение числового ряда.
3. Что называется членом ряда, частичной суммой ряда, остатком ряда?
4. Какой ряд называется сходящимся? Приведите примеры сходящихся рядов.
5. Какой ряд называется расходящимся? Приведите примеры расходящихся рядов.
6. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда. Является ли это условие достаточным для сходимости ряда?
7. Сформулируйте интегральный признак сходимости. Исследуйте сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.
8. Какой ряд называется абсолютно сходящимся? Приведите пример.
9. Как найти сумму сходящегося знакочередующегося ряда с заданной точностью?
10. Сформулируйте признак Лейбница.
11. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} * \frac{n}{2^n}$ сходится и найдите его сумму с точностью до 0,001.

Раздел 2 Функциональные ряды

2.1 Общие понятия и определения

Ряд $U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) +\cdots +U_n(x) +\cdots$, члены которого – функции от x, называется **функциональным рядом**.

Совокупность значений x, при которых функции $U_1(x), U_2(x), U_3(x),\cdots$ $U_n(x),\cdots$, определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится, называют **областью сходимости** функционального ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего бывает какой-нибудь промежуток оси Ох.

Каждому значению из области сходимости X соответствует определенное значение величины $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией X, называют суммой **функционального ряда** и обозначают $S(x)$ т.е. $S(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{n} U_n(x)$.

Представим $S(x)$ в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ где $S_n(x) = U(x) + U_2(x) +\cdot\cdot\cdot U_n(x)$, $R_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) +\cdots$ и $R_n(x)$ - остаток функционального ряда**.**

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого числа $\xi > 0$ найдется такое целое положительное число N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \xi$ для любого x из области X.

Сумма $S\,(x)$ равномерно сходящегося рада $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ в области X, где $U_n(x) = 1, 2, 3,\cdots$ - непрерывной функции, есть функция непрерывная.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда – признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса. Если функции $U_1(x), U_2(x),\cdots, U_n(x) + \cdots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительный чисел $a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots$ причем числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 +\cdots$ сходится, то функциональный ряд $U_1(x) + U(x) + U_3(x) +\cdots$ в этой области сходится равномерно.

В заключение сформулируем две теоремы, относящиеся к интегрированию и дифференцированию функциональных рядов.

Теорема 1. Если ряд $U_1(x) + U_2(x) +\cdots U_n(x) +\cdots$, где $U_1(x), U_2(x),\cdots$ $, U_n(x),\cdots$ - непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S\,(x)$, то ряд

$$\int_a^{в} U(x)dx + \int_a^{в} U_2(x)dx + \int_a^{в} U_3(x)dx +\cdots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^{в} S(x)dx$ (промежуток [а, в] принадлежит области X.

Теорема 2. Пусть функции $U_1(x), U_2(x), U_3(x),\cdots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области производные $U_1'(x), U_2'(x), U_3'(x),\cdots$

Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = \{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\}'.$$

Пример 1. Дан функциональный ряд

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} * \left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5} * \left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 +\cdots .$$

Исследовать сходимость ряда в точках *X=0* и *X=1*.

Решение: В точке <u>*X=0*</u> получаем ряд

$2 + \frac{1}{3} * 2^2 + \frac{1}{5} * 2^3 + \frac{1}{7} * 2^4 + \cdots$.

Здесь $a_n = \frac{2^n}{2n-1}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}$.

Применяем признак Даламбера:

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}*(2n-1)}{2^n*(2n+1)} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2, D > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

В точке *X=1* получаем ряд

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} * \frac{1}{3^2} + \cdots$.

Здесь $a_n = \frac{1}{3^n(2n-1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(2n+1)}$.

$D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n*(2n-1)}{3^{n+1}*(2n+1)} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} < 1$, т.е. ряд сходится.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \cdots$.

Решение: Находим общий член ряда $U_n = \frac{1}{1+x^{2n}}$. Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то ряд расходится. Если $|x| = 1$, то также получаем расходящийся ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$. Если $|x| > 1$, то члены заданного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \cdots$, т.е. ряд сходится.

Итак, область сходимости ряда определяется неравенством $|x| > 1$. Отсюда следует, что ряд сходится, если $1 < x < +\infty$ или $-\infty < x < -1$.

Пример 3. Найти область сходимости и выражения суммы для ряда

$2 + \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}x^2(1-x) + \cdots + \frac{1}{2}x^{n-1}(1-x) + \cdots$.

Решение: Запишем частичную сумму ряда в виде

$S_n = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \cdots - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{2}x^n = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^n$. Если $|x| > 1$, то S_n при $n \to \infty$ не имеет конечного предела ($\frac{-1}{2}x^n$ есть бесконечно большая величина), т.е. данный ряд расходится. При $x = -1$ ряд тоже расходится, т.к. $S_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}$, т.е. S_n попеременно принимает значения 2 и 1. При остальных значениях *X* (т.е. при $-1 < x \leq 1$) данный ряд сходится. Действительно, если *X=1*, то все члены ряда, кроме первого равны нулю $S(1) = 2$.

Если $|x| < 1$, то в формуле S_nслагаемое $-\frac{1}{2}x^n$ при $n \to \infty$ и неизменном *X* стремиться к нулю, так что $S|x| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^n\right) = 2 + \frac{1}{2}x$.

Область сходимости ряда S_n есть промежуток (-1; 1]. На рисунке (рис. 1) отрезок ab без точки a_0.

В этой области сумма S данного ряда есть функция от X, определяемая равенствами:

$$\begin{cases} S|x| = 2 + \frac{1}{2}x & \text{при} -1 < x < 1, \\ S|x| = 2 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Функция $S|x|$ разрывается при x=1 и непрерывна в остальных точках области сходимости. Вне области $-1 < x \leq 1$ $S|x|$ вовсе не определена. График ее представляет отрезок AB, из которого удалены концы A и B и к которому (взамен точки B) добавлена точка C (рис. 1).

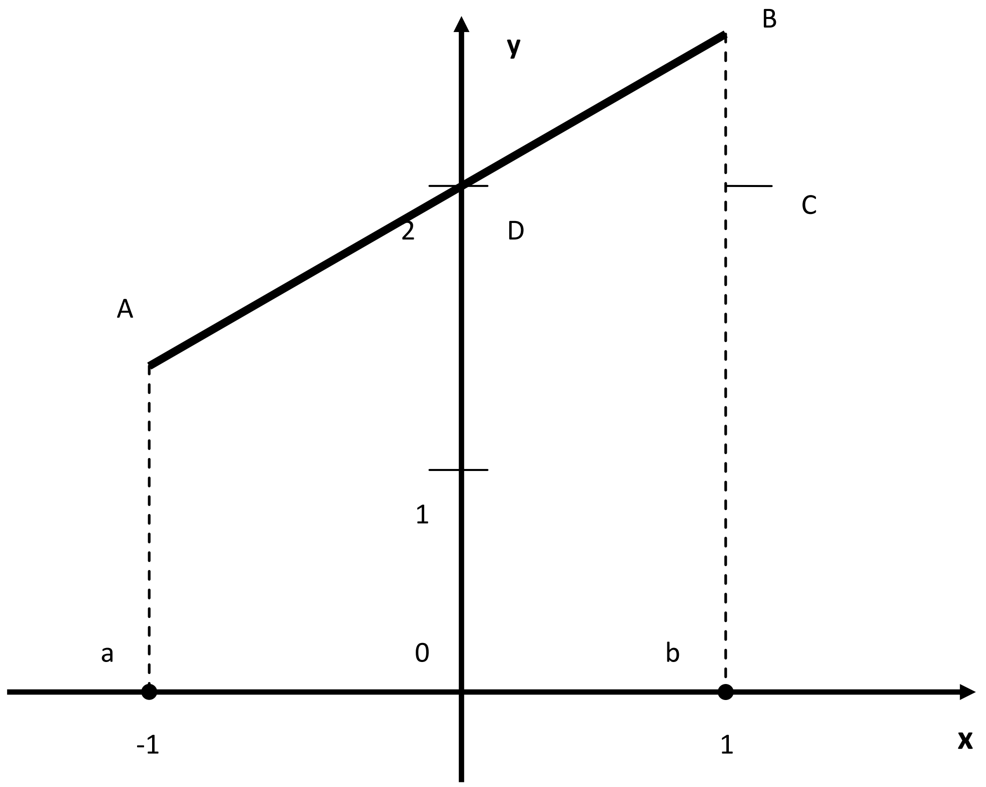


Рисунок 1- График функции S(x)

2.2 Степенные ряды

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются **степенные ряды**.

Функциональный ряд вида

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$, где $a, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ - действительные числа, называется **степенным**.

Основное свойство степенных рядов – теорема Абеля.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $X = X_0$, то он будет сходиться (и притом абсолютно) при любом значении X, удовлетворяющем не равенству $|x-a| < |x_0 - a|$.

Следствие из теоремы Абеля.

Для всякого степенного ряда существует интервал сходимости с центром в точке a $\{|x-a|<R$ или $a-R<x<a+R\}$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого ряд расходится.

На концах интервала сходимости (в точках $x=a\pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие либо условно сходятся абсолютно на обоих, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третьи расходятся на обоих концах.

Число **R** – половина длины интервала сходимости – называется радиусом **сходимости** степенного ряда.

В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности.

Если R=0, то степенной ряд сходится при $x=a$.

Если R=∞, то ряд сходится на всей числовой оси 0x.

Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться одним из следующих способов:

1. Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2,\cdots, a_n\cdots$ нет равных нулю, т.е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x-a$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если исходный ряд имеет вид

$a_0+a_1(x-a)^p+a_2(x-a)^{2p}+\cdots+a_n(x-a)^{np}+\cdots$, где p – некоторое определенное целое положительное число: 2, 3,…то $R=\sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$.

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$ любая (т.е. не образует арифметическую прогрессию, как предыдущем случае), то радиус сходимости можно находить по формуле

$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, $a_n\neq 0$, т.е. используются только значения a_n, отличные от нуля.

Формула пригодна и в случаях 1 и 2.

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Записав ряд в виде $U_0(x)+U_1(x)+U_2(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots$ (здесь $U_0=a_0$, $U_n(x)=a_n(x-a)^N$, где зависимость N от n может быть любой, причем через a_n обозначен не коэффициент при $(x-a)^n$, а коэффициент n – го члена ряда) находим интервал сходимости из неравенств:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}<1$ или б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}<1$.

2.3 Свойства степенных рядов

Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Если $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$,

То $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$, $\quad -R<x-a<R$,

$\int_a^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-a)^{n-1}}{n+1}$.

Операцию полученного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

Пример 1. Исследовать сходимость степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} * \sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n * n!}{(2n)!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-5)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

Решение:

1) $U_n = \frac{(-x)^n}{3^{n-1} * \sqrt{n}}$; $a_n = \frac{1}{3^{n-1} * \sqrt{n}}$; $a_{n+1} = \frac{1}{3^n * \sqrt{n+1}}$.

Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|U_n|}{|U_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n * \sqrt{n+1}}{3^{n-1} * \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n * 3^{-1}} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 3.$$

Следовательно, ряд сходится для значений *X*, удовлетворяющих неравенству $-3 < x < 3$. Исследуем сходимость ряда на границах промежутка.

При $x = -3$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{3}{1} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \cdots$.

Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Каждый член исследуемого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда значит при $x = -3$ ряда $\sum \frac{3}{\sqrt{n}}$ расходится.

При $x = 3$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum (-1)^n * \frac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится по признаку Лейбница (члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю).

Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда является полуоткрытый интервал $-3 < x \leq 3$.

2) $a_n = \frac{2^n * n!}{(2n)!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n * n! * (2n+2)!}{(2n)!\,2^{n+1} * (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n * n!\,(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}{(2n)!\,2^n * 2 * n!\,(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = \infty.$$

Следовательно, этот ряд сходится при любом значении *X*; его интервал сходимости есть вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$.

3) Здесь $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при *x*-5, т.е. в точке *x*=5.

4) Здесь $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1,$$

$$|x+8| < 1 \Rightarrow -1 < x+8 < 1 \Rightarrow -9 < x < -7.$$

Границы найденного интервала исследуем особо. При $x = -9$ получим числовой знакочередующийся ряд с общим членом $a_n = \frac{(-1)^{3n}}{n!}$ который сходится по признаку Лейбница.

При $x = -7$ получим ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{n^2}$. Это ряд Дирихле $\alpha > 1$ (смотри первый признак сравнения), он сходящийся. Следовательно, интервалом сходимости ряда является отрезок $-9 \le x \le -7$.

2.4 Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$, т.е. $x_0 - r < x < x_0 + r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней бесконечный степенной ряд Тейлора

$$f|x| = f|x_0| + \frac{f'|x_0|}{1!}|x - x_0| + \frac{f''|x_0|}{2!}|x - x_0|^2 + \cdots + \frac{f^n|x_0|}{n!}|x - x_0|^n + \cdots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1} = 0$, где $R_n|x|$ - остаточный член формулы **Тейлора**, $c = x_0 + \theta|x - x_0|$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ получаем так называемый **ряд Маклорена**:

$$f|x| = f|x_0| + \frac{f'|0|}{1!}x + \frac{f''|0|}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n|0|}{n!}x^n + \cdots .$$

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

1. Написать ряд Тейлора для данной функции, т.е. вычислить знания этой функции и ее производных при $x = x_0$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора.
2. Исследовать остаточный член $R_n|x|$ для данной функции и определить совокупность значений *x*, при которых полученный ряд сходится к данной функции $\left(\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\right)$.

Для многих функций, употребляемых в практических применениях математического анализа, интервал сходимости ряда Тейлора полностью совпадает с совокупностью тех значений *x*, при которых соответствующий остаточный член $R_n \to 0$, когда $n \to \infty$, т.е. для многих функций каждая точка *x* сходимости ряда Тейлора является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Тейлора можно вместить исследования соответствующего остаточного члена R_n, что во многих случаях весьма затруднительно, исследовать сходимость самого ряда Тейлора, как обычного степенного ряда.

2.5 Разложение элементарных функций в степенные ряды

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, -\infty < x < +\infty.$

$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{|-x|^n}{n!} + \dots, -\infty < x < +\infty.$

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + |-1|^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{|2n-1|!} + \dots, -\infty < x < +\infty.$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + |-1|^n\frac{x^{2n}}{|2n|!} + \dots, -\infty < x < +\infty.$

$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + |-1|^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, -1 < x \le 1.$

$\ln|1-x| = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, -1 \le x < 1.$

$|1+x|^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m+1)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$

$$\left.\begin{array}{lll} -1 < x < +1, m \le -1, & & \\ -1 < x \le 1, & \text{при} & -1 < m < 0, \\ -1 \le x < 1, & & m \ge 0. \end{array}\right\}$$

$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + |-1|^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, -1 \le x \le 1.$

Пример 1. Разложим в степенной ряд функцию $f|x| = 2^x$.

Решение: Найдем значение функции и ее производных при *x=0*

$f(x) = 2^x,$ $\qquad f(0) = 2^0 = 1,$

$f'(x) = 2^x * \ln 2,$ $\qquad f'(0) = \ln 2,$

$f''(x) = 2^x * \ln^2 2,$ $\qquad f'(0) = \ln^2 2,$

………………….. ………………

$f^{(n)}(x) = 2^x * \ln^n 2,$ $\qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$

Так как $0 < \ln 2 < 1$, то при фиксированном *x* имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| < 2^x$ при любом *n*. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда.

$f|x| = 2^x = 1 + x * \ln 2 + \frac{x^2 * \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 * \ln^3 2}{3!} + \dots, -\infty < x < +\infty.$

Это разложение можно получить иначе, используя разложение в ряд функции e^x.

Заменим *x* на $x \ln 2$:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$

$e^{x \ln 2} = e^{\ln 2^x} = 2^x$

$2^x = 1 + x * \ln 2 + \frac{x^2 * \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 * \ln^3 2}{3!} + \dots .$

Пример 2. Разложим в степенной ряд функцию $f|x| = \sin^2 x$.

Решение. В равенстве $\sin^2 x = \frac{1}{2}|1-\cos 2x|$ заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$.

Получим

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(16x)^4}{4!}+\frac{(64x)^6}{6!}+\cdots\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{2!}-\frac{16x^4}{4!}+\frac{64x^6}{6!}-\cdots\right) =$$
$$\frac{2x^2}{2!}-\frac{8x^4}{4!}+\frac{32x^6}{6!}-\cdots .$$

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{x}$ при $a=-2$,найти интервал сходимости.

Решение. Вычисляем значения данной функции и ее производных при $x=a=-2$:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\qquad f(-2) = -\frac{1}{2}$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\qquad f'(-2) = -\frac{1}{4}$,

$f''(x) = -\left(\frac{-(x^2)'}{x^4}\right) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$, $\qquad f''(-2) = -\frac{2!}{2^3}$,

$f'''(x) = -\left(\frac{2}{x^3}\right)' = -2\frac{(x^3)'}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$, $\qquad f'''(-2) = -\frac{3!}{2^4}$,

……………………………………   …………………………

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-n-1}$, $\qquad f^{(n)}(-2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}$,

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1!\,(x+2)}{2^2 * 1!} - \frac{2!\,(x+2)^2}{2^3 * 2!} - \frac{2!\,(x+2)^3}{2^4 * 3!} - \cdots - \frac{n!\,(x+2)^n}{2^{n+1} * n!} - \cdots$$
$$= -\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\cdots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

Исследуем сходимость полученного ряда (по правилу Даламбера):

$a_n = \frac{1}{2^n}$, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$

$|x+2| < 2 \Rightarrow -2 < x+2 < 2 \Rightarrow -4 < x+2 < 0.$

Исследуем сходимость ряда на границах интервала:

$x=-4$, получим числовой ряд 1-1+1-1+… расходящийся, т.к. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

$x=0$, получим числовой ряд 1+1+1+…, который также расходится.

Следовательно, интервал сходимости полученного ряда $-4 < x < 0$ (или x (-4;0)).

Пример 4. Написать три первых члена ряда Маклорена для функции $f(x) = \ln(e^x + x)$

Решение. Найдем $f(0), f'(0), f''(0)$.

$f(0) = \ln(\mathrm{e}^0 + 0) = \ln 1 = 0.$

$f'(x) = \left(\ln(e^x + x)\right)' = \frac{(e^x+x)'}{e^x+x} = \frac{e^x+1}{e^x+x}$,

$$f'(0) = \frac{\mathrm{e}^0+1}{\mathrm{e}^0+0} = \frac{2}{1} = 2,$$

$f''(x) = \left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)' = \frac{(e^x+1)'(e^x+x)-(e^x+x)'(e^x+1)}{(e^x+x)^2} = \frac{e^x(e^x+x)-(e^x+1)(e^x+1)}{(e^x+x)^2} = \frac{e^{2x}+xe^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+x)^2} = \frac{xe^x-2e^x-1}{(e^x+x)^2};$

$f''(0) = \frac{0*\mathrm{e}^0-2\mathrm{e}^0-1}{(\mathrm{e}^0+0)^2} = \frac{-3}{2}.$

Подставляем $f(0), f'(0), f''(0)$ в ряд Маклорена:

$\ln(e^x + x) = 2x - \frac{3}{2} * \frac{x^2}{2!}.$

Раздел 3 Применение рядов к приближенным вычислениям

3.1 Приближенные вычисления значений функции

Здесь полезно иметь в виду приведенные в разделе 2.3 разложения. в степенные ряды элементарных функций.

Для вычисления логарифмов эффективна формула

$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \cdots\right]$.

Ряд в первой части равенства сходится тем быстрее, чем больше t.

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняется первые n членов (n-конечная величина), а остальные члены отбрасываются. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов.

Если ряд знак постоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < U_{n+1}$, где U_{n+1}- первый из отброшенных членов ряда.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,0001

1) $\ln 1{,}1$;   2) $\sqrt[4]{17}$;   3) $\cos 18^0$.

Решение.

1) возьмем ряд $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \cdots$ 1,1=1+0,1, поэтому подставим вместо x 0,1:

$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \cdots$.

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001 $\frac{0{,}1^4}{4} = 0{,}000025 < 0{,}0001$. Поэтому для вычисления приближенного значения $\ln 1{,}1$ с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда:

$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}0953$.

2) преобразуем данный корень

$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ и применяем биномиальный ряд $(1+x)^m$, полагая $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left[1 + \frac{1}{4*16} - \frac{1*3}{4*8*16^2} + \frac{1*3*7}{4*8*12*16^3} - \cdots\right]$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этого знако-чередующегося сходящегося ряда с указанной точностью, вычисляем несколько последовательных первых членов ряда:

$a_1 = 1$; $a_2 \approx 0{,}01562$; $a_3 \approx -0{,}00037$; $a_4 \approx 0{,}00001 < 0{,}0001$ $(2 \cdot 0{,}00001 < 0{,}0001)$.

Следовательно, $\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0{,}01562 - 0{,}00037) \approx 2{,}0305$.

3) имеем $\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \cdots$.

$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416,$ $\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870,$ $\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974.$

Достаточно взять три члена ряда, т.к. $\frac{1}{6} * \left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001.$

Тогда $\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24} \approx 0{,}9511.$

Пример 2. В прямоугольном треугольнике катеты равны 1см. и 5см. Определить острый угол треугольника, лежащий против меньшего катета, с точностью до 0,001 радиана.

Решение. Так как $tg\alpha = \frac{1}{5}$, то $\alpha = arctg\frac{1}{5}$,

$\alpha = arctg\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} * \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} * \frac{1}{5^2} - \cdots,$

откуда $\alpha \approx 0{,}2 - 0{,}0027$, т.е. $\alpha \approx 0{,}197.$

Пример 3. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Имеем $\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \cdots$.

Воспользуемся приближенным равенством

$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4}.$

Мы взяли пять слагаемых, т.к. знакопеременный ряд удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть менее первого из отброшенных членов ряда.

Это $\frac{1}{5!5^5} = \frac{1}{375000} = 0{,}0000026 < 0{,}00001.$

Тогда $\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1 - 0{,}2 + 0{,}02 - 0{,}001333 + 0{,}000067 = 0{,}81873.$

3.2 Применение степенных рядов к вычислению пределов и определенных интегралов

Пример 1. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Решение. Заменим e^xи $\sin x$ их разложениями в степенные ряды:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots -\right) - 2 - 2x - x^2}{x - x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}} = (: x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \cdots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!}} = \frac{2}{3!} : \frac{1}{3!} = 2.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - arctgx}{x^3}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - arctgx}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\frac{1}{3} - -\frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right) * x^2 + \cdots\right] = \frac{1}{6}.$

Пример 3. Вычислить с точностью до 0,0001 приближенные значения следующих интегралов

1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; 2) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$; 3) $\int_1^{1,5} \frac{1}{v} arctg\frac{v}{4}dv$.

Решение.

1) Разложим под интегральную функцию в биномиальный ряд, полагая $x = t^4,\ m = -\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1*3}{2*4}t^8 - \frac{1*3*5}{2*4*6}t^{12} + \cdots,\ |t| < 1.$

Интегрируем этот ряд в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1*3}{2*4}t^8 - \frac{1*3*5}{2*4*6}t^{12} + \cdots\right)dx = t - \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + \frac{1*3}{2*4} * \frac{t^9}{9} - \frac{1*3*5}{2*4*6} * \frac{t^{13}}{13} + \cdots$$

Вычислим $а_1 \approx 0{,}5, а_2 \approx -0{,}00313, а_3 \approx 0{,}00008 < 0{,}0001.$

Для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму первых двух членов ряда $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} = 0{,}4969.$

2) Пользуясь рядом Маклорена для $\cos x$, заменяя в нем x на $\sqrt{x}$, имеем:

$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \cdots, x \geq 0.$

Интегрируя в указанных пределах, получим

$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{4!3} - \frac{x^4}{6!4} + \frac{x^5}{8!5} - \cdots |_0^1 = 1 - \frac{1}{2!2} + \frac{1}{4!3} - \frac{1}{6!4} + \frac{1}{8!5} - \cdots$ (пятый член ряда меньше 0,0001, берем сумму первых четырех) $= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0{,}7635.$

3) Пользуясь рядом Маклорена для $arctgx$, при $x = \frac{v}{4}$, получим

$arctg\ \frac{v}{4} = \frac{v}{4} - \frac{v^3}{4^3*3} + \frac{v^5}{4^5*5} - \frac{v^7}{4^7*7} + \cdots$, $(|v| \leq 4)$.

Делим обе части равенства на v и интегрируем:

$$\int_1^{1,5} \frac{1}{v}\ arctg\frac{v}{4}\ dx = \frac{v}{4} - \frac{v^3}{4^3*3^2} + \frac{v^5}{4^5*5^2} - \frac{v^7}{4^7*7^2} + \cdots |_1^{1,5} =$$

$$= \frac{1{,}5-1}{4} - \frac{1{,}5^3-1}{4^3*3^2} + \frac{1{,}5^5-1}{4^5*5^2} - \frac{1{,}5^7-1}{4^7*7^2} + \cdots$$

$$\approx 0{,}125 - 0{,}00412 + 0{,}00026 - 0{,}00002 \approx 0{,}1211.$$

3.3 Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, ищут решение такого уравнения в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты $C_n (n = 0{,}1{,}2 \cdots)$ находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x - x_0$ в обеих частях полученного равенства. Если удается определить все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y' = f(x; y)$ требуется решить задачу Коши при начальных условиях $y(x = x_0) = y_0$, то решение можно искать при помощи ряда Тейлора:

$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0;\ y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо x, y, y', … значений x_0, y_0, y'_0 и всех остальных найденных последующих производных.

Аналогично при помощи ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков.

Применение этих способов рассмотрим на следующих примерах.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение
$y'' - x^2 y = 0.$

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда
$y = C_0 + C_1 * x + C_2 * x^2 + \cdots + C_n * x^n + \cdots$.

Найдем y'', предварительно вычислив y':
$y' = C_1 + 2C_2 * x + 3C_3 * x^2 + \cdots + n * C_n * x^{n-1} + \cdots$
$y'' = 2C_2 + 6C_3 * x + \cdots + n(n-1)C_n * x^{n-2} + \cdots$.

Подставим y и y'' в исходное уравнение:

$$(2 * 1C_2 + 3 * 2C_3 x + 4 * 3C_4 * x^2 + \cdots + (n+2) * (n+1) * C_{n+1} * x^n + \cdots) - x^2(C_0 + C_1 * x + C_2 * x^2 + \cdots + C_n * x^n + \cdots) = 0.$$

Соберем члены с одинаковыми степенями x:

$$2 * 1C_2 + 3 * 2C_3 * x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4) * (n+3) * C_{n+4} - C_n] x^{n+2} = 0.$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты полученного ряда (чтобы уравнение обратилось в тождество), находим:

$C_2 = C_3 = 0,\ C_{n+4} = \frac{C_n}{(n+3)*(n+4)}\ (n = 0, 1, 2, \dots).$

Последнее соотношение позволяет найти последовательно все коэффициенты искомого разложения (C_0 и C_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования):

$C_{4к} = \frac{C_0}{3*4*7*8\dots(4к-1)*4к}$; $C_{4к+1} = \frac{C_1}{4*5*8*9\dots4к(4к+1)}$;

$C_{4к+2} = C_{4к+3} = 0$ (к=0,1,2,…).

Таким образом, находим

$y = C_0 \sum_{к=0}^{\infty} \frac{x^{4к}}{3*4*7*8\dots(4к-1)*4к} + C_1 * \sum_{к=0}^{\infty} \frac{x^{4к+1}}{4*5*8*9\dots4к(4к+1)}$.

Полученные ряды сходятся на всей числовой оси и определяют два линейно независимых частных решения исходного уравнения.

Пример 2. Найти в виде степенного ряда частный интеграл уравнения
$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, удовлетворяющий начальным условиям
$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$

Решение. Пусть $y = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \cdots + a_n * x^n + \cdots$
Найдем ряды y' и y'' его почленным дифференцированием
$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$.
$y'' = 2a_2 + 3 * 2a_3x + 4 * 3 * a_4x^2 + \cdots + n * (n-1)a_na^{n-2} + \cdots$.

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов:
$y(0) = a_0 = 1;$ $\qquad$ $y'(0) = a_1 = 0.$
Подставляя ряды для y, y', y'' в заданное уравнение и, сделав приведение подобных членов, получим

$$(1 + 2^2a_2) + 3^2a_3x + (a_2 + 4^2a_4)x^2 + (a_3 + 5^2a_5)x^3 + \cdots + [a_n + (n+2)^2a_{n+2}]x^n + \cdots = 0.$$

Приравнивая к нулю, все коэффициенты ряда, находящегося в левой части этого равенства, т.к. только при этом условии ряд будет тождественно равен нулю, получим систему

$1 + 2^2a_2 = 0;\ 3^2a_3 = 0;\ a_2 + 4^2a_4 = 0;\ \ a_3 + 5^2a_5 = 0;\ \ldots a_n + (n+2)^2a_{n+2} = 0; \ldots$, из которой определяются следующие значения всех остальных коэффициентов: $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2m+1} = 0$,
$a_2 = -\frac{1}{2^2};\ a_4 = \frac{1}{2^2*4^2};\ a_6 = \frac{1}{2^2*4^2*6^2}; \ldots$
$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^2*4^2\ldots(2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m(m!)^2}$.
Таким образом, искомый частный интеграл данного уравнения есть степенной ряд

$$y = 1 - \frac{x^2}{4*(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2*(2!)^2} - \frac{x^6}{4^3*(3!)^2} + \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m*(m!)^2} + \cdots,$$

который сходится при любом x.

Пример 3. Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y' + xy^2 = 2\cos x$, удовлетворяющего начальному условию: $y(0) = 1$.
Решение. Как и в предыдущем примере, ищем интеграл в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$.
Согласно начальному условию $y(0) = a_0 = 1$.
Далее, находим ряд для y^2 и y' и подставляем их и ряд $\cos x$

$$\left(\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

в заданное уравнение, получаем $a_1 + (1 + 2a_2)x + (2a_1 + 3a_3)x^2 + \cdots 2 - -x^2 + \cdots$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим
$a_1 = 2,\ 1 + 2a_2 = 0,$ $\qquad$ $a_2 = -\frac{1}{2}$.
$2a_1 + 3a_3 = -1,$ $\qquad$ $4 + 3a_3 = -1,$ $\qquad$ $a_3 = \frac{5}{3}$.
Следовательно, искомый частный интеграл есть $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \cdots$.

Пример 4. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $\acute{\acute{y}} - ye^x = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 2,\ \acute{y}(0) = 1$.
Решение. Пусть искомая функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{\acute{y}(0)}{1!}x + \frac{\acute{\acute{y}}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y(n)(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Два первых коэффициента $y(0)$, $y'(0)$ даны в условии, третий получим при подстановке в данное уравнение: $y'' - 2 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow y'' = 2$.
Следующие коэффициенты найдем путем последовательного дифференцирования данного уравнения:

$y'''(x) = (y'')' = (ye^x)' = y'e^x + (e^x)'y = y'e^x + e^x y = e^x(y' + y)$,

$y'''(0) = e^0(1 + 2) = 3$,

$$y^{(4)}(x) = (e^x(y' + y))' = (e^x)'(y' + y) + (y' + y)'e^x = e^x(y' + y) + e^x(y'' + y') = \\ = e^x(y'' + 2y' + y),$$

$y^{(4)}(0) = e^0(2 + 2 \cdot 1 + 2) = 6$,

$y = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots$.

Пример 5. Найти первые шесть первых членов разложения, отличных от нуля, проинтегрировав уравнение $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
Решение. Из уравнения и начальный условий находим $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$.
Дифференцируя данное уравнения, находится последовательно.

$y''(x^2 + y^2)' = 2x + 2y \cdot y'$, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{2}$,

$y''' = (2x + 2y \cdot y')' = 2 + 2(y' \cdot y' + y' \cdot y'') = 2(1 + (y')^2 + y \cdot y'')$,

$y'''(0) = 2(1 + 1^2 + 1 \cdot 2) = \underline{8}$,

$y''''(x) = 2(1 + (y')^2 + y \cdot y'')' = 2\left(2y' \cdot y'' + y' \cdot y'' + y \cdot y'''\right) = 2\left(3y' \cdot y'' + y \cdot y'''\right)$,

$y''''(0) = 2(3 \cdot 2 + 1 \cdot 8) = 28$,

$$y'''''(x) = \left(6y' \cdot y'' + 2y \cdot y'''\right)' = 6\left(y'' \cdot y'' + y' \cdot y'''\right) + 2\left(y' \cdot y''' + y \cdot y''''\right) = \\ = 6(y'')^2 + 6y' \cdot y''' + 2y' \cdot y''' + 2y \cdot y'''' = 6(y'')^2 + 8y' \cdot y''' + 2y \cdot y'''',$$

$y'''''(0) = 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 28 = 24 + 64 + 56 = 144$.

Искомое решение имеет вид:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \cdots.$$

Этот второй способ определения коэффициентов степенного ряда, удовлетворяющего заданному дифференциальному управлению, который основан на использовании ряда Маклорена (или ряда Тейлора в более общем случае, когда ищется разложение интеграла по степеням x-x_0), в некоторых случаях требует меньшей вычислительной работы, чем метод неопределенных коэффициентов. Он применим для опускания общего или частного интегралов уравнения, если он разрешимо относительно производной высшего порядка и если путем его последовательного дифференцирования возможно получать производные любого ряда.

Интегрирование уравнений при помощи рядов имеет большое значение, однако следует иметь в виду, что не для всякого уравнения можно получить интеграл в виде пригодного степенного ряда.
Например, уравнение $x^2y' - y(x + 1) = -x^2$ (линейное) имеет общий интеграл

$$y=\frac{x}{\sqrt[x]{e}}\left(C-\int\frac{\sqrt[x]{e}}{x}dx\right)$$

Однако предполагая, что существует интеграл в виде степенного ряда и определив его коэффициенты, получим ряд:

$$y=x^2(1+1!\cdot x+2!\cdot x^2+3!\cdot x^3+\cdots+n!\cdot x^n+\cdots,$$

который практически не пригоден, так как он расходится при всяком значении x , отличном от нуля.

3.4 Вопросы для контроля.

1 .Какой ряд называется степенным?
2.Какой вид имеет общий член степенного ряда?
3.Дайте определение радиуса и интервала сходимости.
 Каким может быть интервал сходимости степенного ряда?
4. Запишите формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
5. Найдите радиус и интеграл сходимости рядов:
а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$; б)$\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot x^n$
6. Какой ряд называется рядом Тейлора функции?
7. Напишите разложения функций $e^x, \cos x$ в ряд Тейлора в точке $x_0=1$
8. Напишите первые четыре члена ряда Маклорена функции $\oint(x)=\sqrt{1+x}$
9. Вычислите приближенно с точностью до 0,001
а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x^2}{x}dx$

3.5 Ряды Фурье.

3.5.1 Гармоники

В предыдущих параграфах рассматривались разложения функций в степенные ряды, т.е. разложения сложных функций на простые степенные функции $a_n(x-x_0)^n$. Такие разложения не всегда возможны и не всегда удобны в приложениях. При изучении сложных периодических процессов естественно возникает задача о представлении функций, описывающих эти процессы, в виде суммы конечного или бесконечного числа простых периодических функций.

Простейшей периодической функцией является синусоидальная функция $f(x)=A\sin(\omega+\varphi)$, где А, ω,φ - постоянные. Она называется **простой гармоникой.**

Функция *f(x)* описывает гармонические колебания, которые обусловливаются различными причинами. При этом: А – амплитуда (размах) колебания; $\omega x+\varphi$ - фаза колебания; φ - начальная фаза колебания, ω - круговая частота колебания ; $\frac{2\pi}{\omega} = T$ - период колебания; величина, обратная периоду, $v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ называется **частотой** и показывает, сколько раз данное периодическое явление повторяется в единицу времени.

Синусоидальную функцию можно преобразовать к виду

$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) == A(\sin\omega x \cdot\cdot \cos\varphi + \cos\omega x \cdot \sin\varphi) =$

$= A\sin\omega x \cdot \cos\varphi + A\cos\omega x \cdot \sin\varphi$

Полагая $A\sin\varphi = a,\ \ A\cos\varphi = b$ получим $\boldsymbol{f(x) = a \cdot \cos\omega x + b \cdot \sin\omega x.}$

Если $\omega = 0$, данная функция постоянна.

Простые гармоники можно складывать, причем их суммой служит простая или сложная гармоника. Если составляющие гармоники имеют одинаковую частоту, то и их сумма является гармоникой с той же частотой и с тем же периодом, т.е. простой гармоникой.

При сложении гармоник разных частот получается новая периодическая функция - сложная гармоника.

Функция *f(x)*, представляющая собой сумму конечного числа гармоник, $f(x)a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots +$ $+(a_n\cos\ nx + b_n\sin\ nx)$ является периодической функцией с периодом *T*=2π.

3.5.2 Тригонометрический ряд Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots$$

$$+(a_n\,cos\,nx + b_n\,sin\,nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos\,nx + b_n\,sin\,nx),$$

где функция *f(x)* определена при $-\pi \le x \le \pi$ называется **тригонометрическим рядом Фурье** для функции *f(x)*.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots b_1, b_2, \dots, b_n$ - коэффициенты ряда, называемые **коэффициентами Фурье.**

Тригонометрический ряд достаточно рассматривать только для значений x в промежутке $0 \le x \le 2\pi$ $(-\pi \le x \le \pi)$ т.к. за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена ряда периодически повторяется.

Разложение функции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд имеет важное значение в прикладных науках: электротехнике, радиотехнике, в теории упругих механических колебаний и др.

Такое разложение в тригонометрический ряд называется гармоническим анализом.

Чтобы разложить тригонометрическую функцию *f(x)* с периодом 2я в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда, которые вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \oint(x)\cos nx \cdot dx \quad (n = 1,2,3,\dots), \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \oint(x)\sin nx \cdot dx \quad (n = 1,2,3,\dots). \tag{7}$$

Формула (5) получается из формулы (6) при *n*=0.

3.5.3 Теорема Дирихле

Напомним, что хо называется точкой разрыва 1 рода функции *f(x),* если при $x \to x_0$ существует левосторонний предел и правосторонний предел, не равные между собой.

Функция f(x) при -π≤x≤π с может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся к данной функции, при определенных условиях, называемых **условиях Дирихле**:

1) функция должна быть непрерывной при -π≤x≤π или может иметь в этом промежутке конечное число разрывов I рода;

2) функция должна иметь конечное число экстремумов или не иметь их совсем (технических приложениях очень редко встречаются Функции с бесконечным числом экстремумов).

Теорема Дирихле.

Если функция *f(x)* с областью определения -π≤x≤π удовлетворяет условиям Дирихле, то:

1) ряд Фурье функции *f(x)* сходится в указанном промежутке значений *x*;
2) сумма этого ряда равна функции *f(x)* во всех точках непрерывности данной функции, лежащих внутри промежутка -π≤x≤π;
3) во всех точках разрыва сумма ряда равна $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;
4) на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$, сумма ряда имеет одно и то же значение, равное $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

3.5.4Разложение функции в ряд Фурье.

1). Если функция *f(x)* задана в сегменте $[-l; l]$, где *l*- произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

2). Если *f(x)* - четная функция, то ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\qquad a_n\frac{2}{e}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

3). Если *f(x)*- нечетная функция, то ее ряд Фурье содержит только свободный член и синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

4). Если функция *f(x)* задана в сегменте $[0;l]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно ее доопределить в сегменте $[-l;0]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной в сегменте $[-l;l]$.

Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках [*-l;0*] находились из условия *f(x) = f(-x)* или *f(x)=-f(x)*. В первом случае функция f(x) в сегменте [*-l;l*]. Будет четной, а во втором - нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции (a_n - в первом случае и b_n - во втором) можно определять по вышеприведенным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте $[-\pi;\pi]$уравнением $f(x)=\pi+x$.

Решение. Графиком этой функции является отрезок, соединяющий точки $(-\pi;0)(\pi;2)$.

На рисунке показан график функции *y = S(x), S(x)*- сумма ряда Фурье функции *f(x)*. Эта сумма является периодической с периодом 2π и совпадает с *f(x)* в сегменте $[-\pi;\pi]$.

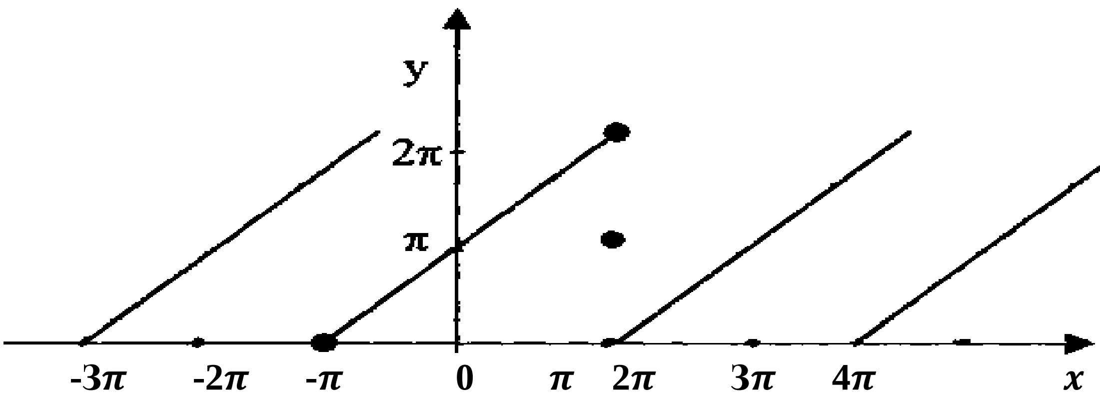


Рисунок 2 – График функции $f(x)=\pi+x$

Определим коэффициенты рада Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx+\int_{-\pi}^{\pi}xdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\pi x+\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\pi^2+\frac{\pi^2}{2}-\left(-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi^2=2\pi.$$

$$a_0=2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nx \cdot dx + \int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx \cdot dx\right] = 0,$$

т.к. первый интеграл от чётной функции, второй - произведение четной функции на нечётную. Итак, $a_0 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Определим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin nx \cdot dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cdot dx}_{0} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx \cdot dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx \cdot dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \text{приминим} & \text{интегрирование по частям} \\ U = x & d\mathcal{V} = \sin nx \cdot dx \\ dU = dx & \mathcal{V} = \int \sin nx \cdot dx = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x \cdot \left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) \cdot dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \left(-\frac{0}{n}\cos n \cdot 0 + \frac{1}{n^2}\sin n \cdot 0\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\sin n\pi}_{0} = -\frac{2}{n} \cdot (-1)^n =$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, разложение функции *f(x)* в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \pi + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте [-1;1] уравнением $f(x)=x^2$.

Решение. Рассматриваемая функция является четной. На рисунке показан ее график - дуга параболы, заключенная между точками (-1; 1) и (1; 1). Здесь l=1, поэтому

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^l x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \qquad a_0 = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x \cdot dx.$$

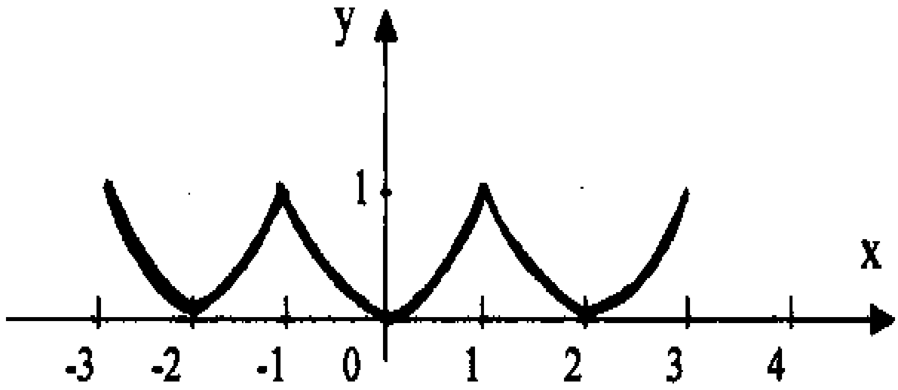


Рисунок 3 – График функции $f(x) = x^2$ в сегменте [-1;1]

Применим интегрирование по частям:

$U = x^2,\qquad dV = \cos n\pi x \cdot dx,$

$dU = 2x \cdot dx,\qquad V = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x.$

$$a_n = 2\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}2x\sin n\pi x \cdot dx\right] = 2\left[0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x \cdot dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x \cdot dx.$$

Снова интегрируем по частям:

$U = x,\qquad dV = \sin n\pi x \cdot dx,$

$dU = dx,\qquad V = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x.$

$$a_n = -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{n\pi}\right)\cos n\pi x \cdot dx\right] =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi x|_0^1 + \frac{1}{x^2\pi^2}\sin n\pi x|_0^1\right] = \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^n$$

$b_n = 0$(для четной функций).

Следовательно, $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{3} - \frac{4}{n^2}\Big(\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} +$

$+\frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \cdots\Big).$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте [0;2] уравнением $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

Решение. Функцию можно разложить в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

1) Доопределим функцию *f(x)* на сегменте [-2;0] четным способом (см. рисунок).

На рисунке гр. функции -дуга параболы $x - \frac{1}{2}x^2$ на сегменте [0;2]

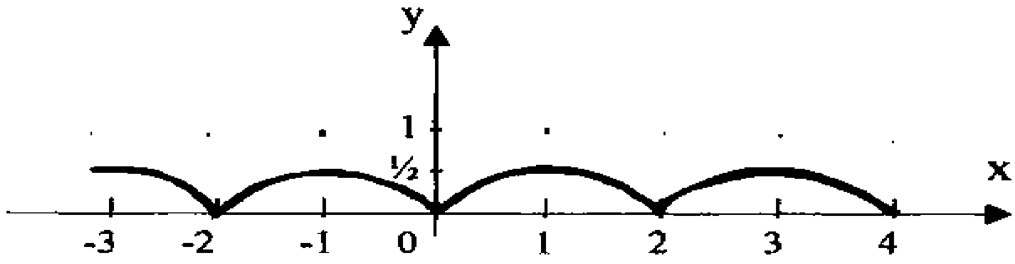


Рисунок 4 – График функции $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ в сегменте [0;2]

$l = 2,\ a_0 \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3},$

$$a_n = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \cos\frac{n\pi x}{2} dx = \left| \begin{matrix} U = x - \frac{1}{2}x^2 & dV = \cos\frac{n\pi x}{2} dx \\ dU = (1 - x)dx & V = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1 - x)\sin\frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1 - x)\sin\frac{n\pi x}{2} dx = \left| \begin{matrix} U = 1 - x & dV = \sin\frac{n\pi x}{2} dx \\ dU = dx & V = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}[1 + (-1)^m], \qquad b_n = 0.$$

Итак $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 2\pi x + \right.$

$\left. + \frac{1}{6^2}\cos 3\pi x + \cdots\right).$

2) Доопределим функцию f(x) на [-2;0] нечетным способом (см. рис5.): Дугу параболы на [0;2] отобразим симметрично относительноно начала координат на[-2;0].

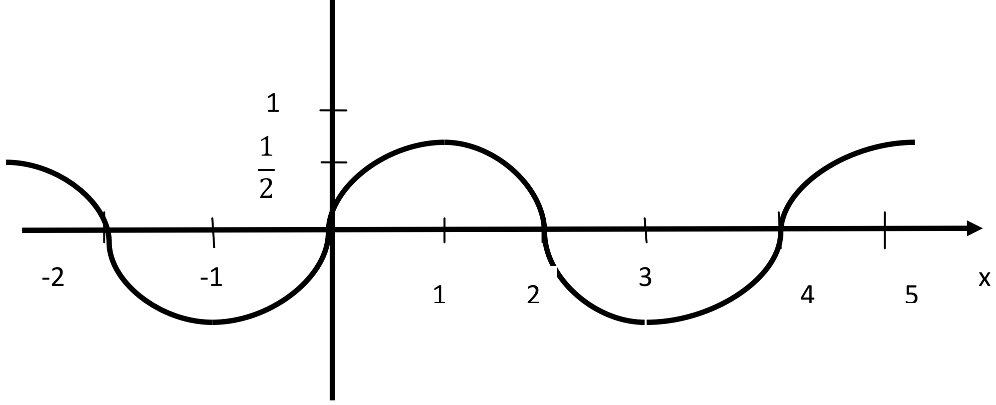


Рисунок 5 – Доопределенная функция f(x) на [-2;0] нечетным способом

$$b_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix} U=x-\frac{1}{x}x^2, & dV=\sin\frac{n\pi x}{2}dx, \\ dU=(1-x)dx, & V=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix} U=1-x, & 2U=\cos\frac{n\pi x}{2}dx, \\ dU=-dx, & V=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{8}{n^3\pi^3}\cos n\pi+\frac{8}{n^3\pi^3}=\frac{8}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n].$$

$a_{\boldsymbol{n}}=0\quad(n=0,1,2\ldots).$

Итак $f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\Big(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+$
$+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\Big).$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}6 \text{ при } & 0<x<2,\\ 3x \text{ при } & 2<x<4.\end{cases}$$

Решение. Полагая *l*=2 и разбивая интервал интегрирования (0;4) точкой *x*=2 на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим:

$$a_n=\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 3\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{2x}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi),$$

$n\neq 0$

При *n* четном: $\cos n\pi=1$ и $a_n=0$.

При *n* нечетном: $\cos n\pi=-1$ и $a_n=\frac{12}{n^2\pi^2}$.

При *n*=0 получим:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 6dx + \int_2^4 3xdx\right] = \frac{1}{2}\left(6x|_0^2 + \frac{3x^2}{x}\Big|_2^4\right) = 15,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}[12(1-\cos n\pi) + 3(4\cos n\pi - 8)] = -\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right) -$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: В интервале (0:2) сумма ряда *S(x)*=6, а в интервале (2;4) *S(x)*=3*x*.

В точке разрыва *x*=2, где функция не определена,

$$S(2) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 2-0} f(x) + \lim_{x\to 2+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 2-0} 6 + \lim_{x\to 2+0} 3x\right) = \frac{1}{2}(6+6) = 6.$$

3.5.6 Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике

При изучении различных зависимостей в электрических цепях с несинусоидальными токами применяют ряды Фурье.

Переменный синусоидальный ток $i = I\sin\omega t$ имеет период $\frac{2\pi}{\omega}$. Несинусоидальный ток разлагают в ряд Фурье вида:

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t + a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots +$$

$$+ a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t.$$

Формулы для нахождения коэффициентов этого ряда получается из формул для ряда Фурье, указанных в § 7, с помощью замены переменной $x = \omega t$ и имеет вид:

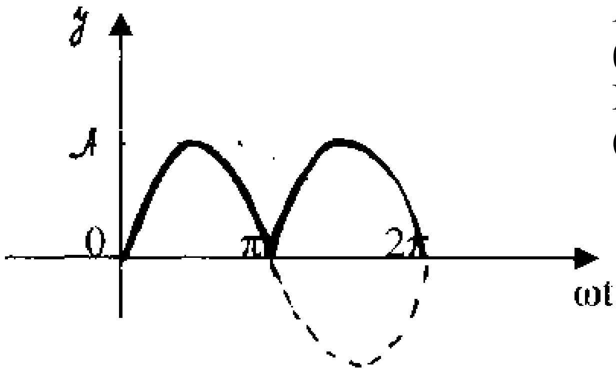
$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t)dt,$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t)\cos n\omega t\cdot dt,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t)\cos n\omega t\cdot dt.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию двухполупериодного выпрямленного синусоидального тока:

$$i(t)=\begin{cases} A\sin\omega t \text{ при } 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega},\\ -A\sin\omega t \text{ при } \dfrac{\pi}{\omega}\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$



На рисунке изобразим $y=\sin\omega t$ (синусоиду) на [0;2π], согласно условия. Посмотрим график функции $y=-\sin\omega t$ (отобразим сим-но ox).

Рисунок 6 – График функции $y=\sin\omega t$ на [0;2π]

Данная функция является четной, поэтому $b_n=0$. Находим a_0 и a_n:

$a_0\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}A\sin\omega t\cdot dt=-\frac{2A\omega}{\pi\omega}(\cos\omega t)_0^{\frac{\pi}{\omega}}=-\frac{2A}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{4A}{\pi}.$

$$a_n=\frac{2\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}A\sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot dt=\frac{2A\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(\omega t-n\omega t)+\sin(\omega t+n\omega t)]dt=$$

$$=\frac{A\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t]dt=\frac{A\omega}{\pi}\Bigg[-\frac{1}{(n+1)}\cos(n+1)\omega t+$$

$$+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\Bigg]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{A\omega}{\pi}\Bigg[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\pi+\frac{1}{(n-1)\omega}\cdot$$

$$\cdot\cos(n-1)\pi+\frac{1}{(n+1)\omega}-\frac{1}{(n-1)\omega}\Bigg]=\frac{A}{\pi}\Bigg[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi+$$

$$+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi-\frac{2}{n^2-1}\Bigg]=\begin{cases}0, & \text{если } n-\text{нечетное},\\ -\dfrac{4A}{\pi(n^2-1)}, & \text{если } n-\text{четное},\end{cases}$$

$$a_2=-\frac{4A}{3\pi},\qquad a_4=\frac{4A}{15\pi},\quad a_6=-\frac{4A}{35\pi},\ldots$$

Получаем $i(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{3\pi}\cos 2\omega t-\frac{4A}{15\pi}\cos 4\omega t-\frac{4A}{35\pi}\cos 6\omega t+\cdots$

или $i(t)=\frac{4A}{3\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\cos 4\omega t-\frac{1}{35}\cos 6\omega t-\cdots\right).$

3.6 Вопросы для контроля

1.Какой ряд называется тригонометрическим?
2.Напишите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции *f(x)* при $-\pi \leq x \leq \pi$.
3. Сформулируйте теорему Дирихле.
4. Какой вид имеет ряд Фурье для четных и для нечетных функций?
5. Можно ли разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin 2x$, $x \in [0;\pi]$?
6. Можно ли разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x^2$, $x \in [-\pi;\pi]$?
7. Запишите ряд Фурье для функции *f(x)*, заданной на отрезке $[-l;l]$
8. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-1;1]$

3.7 Уравнения математической физики

Многие физические задачи сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые поэтому и называются уравнениями математической физики.

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, являются:

1. Волновое уравнение $\boldsymbol{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0}$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого *уравнения* сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и многие другие задачи о распространении колебаний в однородной среде.

2. Уравнение теплопроводности $\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$ представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка параболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о распространении тепла в однородной среде, о фильтрации жидкостей или газов и другие задачи.

***3.* Уравнение Лапласа** $\boldsymbol{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0}$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о свойствах стационарных электромагнитных полей, о стационарном распространении тепла в однородном теле, о потенциале скорости безвихревого течения жидкости и многие другие задачи о свойствах стационарных (установившихся) процессов.

Задача интегрирования уравнения с частными производными, т.е. задача отыскания функции, удовлетворяющей этому уравнению имеет бесчисленное множество решений.

В конкретных задачах, сводящихся к уравнениям математической физики, всегда ищется не общее, а частное решение уравнения, удовлетворяющее некоторым определенным условиям, которые называются **краевыми условиями.**

Для решения уравнений математической физики обычно применяется **метод Фурье:** вначале ищутся частные решения данного уравнения в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента. Затем, исходя из заданных краевых условий, определяются значения произвольных постоянных, содержащихся в этих частных решениях. В результате искомое решение, удовлетворяющее и данному уравнению и данным краевым условиям, получается или в виде ряда, составленного из найденных частных решений, или в виде несобственного интеграла с бесконечными пределами. Этот метод разъясняется в решении следующих задач.

Задача 1. Найти частное решение *U(x,t)* дифференциального уравнения удовлетворяющее краевым $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ условиям:
1) $U(0,t)=0$, 2) $U(l,t)=0$, 3) $U(x,0)=\varphi_1(x)$ 4) $\varphi_t'(x,0) = \varphi_2(x)$.

Решение. По методу Фурье вначале ищем частные решения данного уравнения в виде произведений двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от t:

$$U(x,t)=X(x)\text{-}T(t) \tag{1}$$

Найдя производные $U''_{xx} = TX''_{xx}$, $U''_{tt} = XT''_{tt}$ и подставив их в данное уравнение, получим $X{\cdot}T'' - a^2T{\cdot}X'' = 0$, или $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T}$.

В последнем равенстве переменные разделены. Левая его часть не зависит от t, а правая не зависит от x. Это возможно лишь в том случае, когда обе части равенства не зависят ни от t, ни от x, т.е. представляют одну и ту же постоянную. Обозначив эту постоянную через $-\lambda^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \text{и} \quad \frac{T''}{T} = -\lambda^2 \tag{a}$$

или $X'' + \lambda^2 X = 0$ и $T'' + \lambda^2 T = 0$

Решая их как однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами, найдем $X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$. Где A, B, C, D- произвольные постоянные.

Подставляя эти выражения для X и T в равенство (1), получим

$$U(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)(C\cos a\lambda t+D\sin a\lambda t) \tag{2}$$

Далее, исходя из данных краевых условий, определим значения постоянных. Подставляя в равенство (2) заданные значения $x=0$ и $U=0$ (первое условие) и $x=l$, $U=0$ (второе условие) и сократив на множитель $T(t) \neq 0$, получим
$0=A\cos 0+B\sin 0$, $0=A\cos\lambda l+B\sin\lambda l$.

Из первого уравнения находим $A=0$, а из второго следует $\sin\lambda l=0$ (ибо $B \neq 0$ при $A=0$), откуда определяется параметр $\lambda = \frac{n\pi}{i}$, n=1,2,3,…, который был также произвольным. Каждому значению λ (или n) соответствует частное решение вида:

$$U_n = T_n X_n = \left(\alpha_n \cos\frac{an\pi t}{l} + \beta_n \sin\frac{an\pi t}{l}\right) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$$

— произвольные постоянные.

Вследствие линейности и однородности заданного уравнения сумма его решений также будет его решением. Поэтому и сумма ряда

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \quad U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\frac{an\pi t}{l} + \beta_n \sin\frac{an\pi t}{l}\right) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

есть решение данного уравнения, удовлетворяющее условиям 1) и 2).

Для определения постоянных α_n и β_n используем два последних краевых условия. Подставляя в равенство (3) $t = 0, U = \varphi_1(x)$ (третье условие), получим

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

Дифференцируя по *t* решение (3)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left(\beta_n \cos\frac{an\pi t}{l} - a_n \sin\frac{an\pi t}{t}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

и подставляя в результат *t=0,* $\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi_2(x)$ (четвертое условие), получим

$$\varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \beta_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) представляют разложения заданных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в интервале (0,*l*) в неполные ряды Фурье, содержащие только синусы. Коэффициенты таких разложений определяются по известной формуле:

$$\alpha_n \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \quad \beta_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \varphi_2(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \tag{6}$$

Следовательно, искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям, есть функция (3), где постоянные α_n и β_n определяются формулами (6).

Очевидно, что при различных исходных данных a, *l*, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ по формулам (6) будут получаться различные значения для α_n и β_n, а следовательно, и различные ряды (3) для функции *U(x,t),* удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям.

Решению этой задачи можно дать, например, следующее физическое истолкование. Натянутая струна, закрепленная концами в точках *x=0* и *x=l* оси *Ox* в начальный момент времени *t=0* имела форму кривой U $=\varphi_1(x)$, а каждая ее точка с абсциссой x имела скорость $\acute{U}_t = \varphi_2(x)$ затем эта струна, предоставленная самой себе, колеблется, оставаясь в плоскости *XOU*. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. (Параметр $a^2 = \frac{h}{p}$, где h - натяжение, p - плотность струны).

Найденное его решение *U(x,t)* определяет форму струны в любой момент времени t

Задача 2. Найти решение уравнения с частными производными $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ удовлетворяющее краевым условиям: 1).*U(0,t)=0*, 2)*U(l,t)=0*, 3) *U(x,0)=φ (x)*.

Решение. Пользуясь методом Фурье, полагаем *U(x,t) = X(x)T(t)*.

Тогда заданное уравнение преобразуется к виду $\frac{\acute{\acute{X}}}{X} = \frac{\acute{T}}{a^2 T} = -\lambda^2$ и распадается на два уравнения : $\acute{\acute{x}} + \lambda^2 x = 0$ и $\acute{T} + a^2\lambda^2 T = 0$ решая которые, найдем

$x = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \quad T = Cl^{(-a^2\lambda^2 l)}$,

$U(x,t) = l^{(-a^2\lambda^2 t)}(\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x)$

где α= *AC* и β= *BC* - произвольные постоянные. Используя первое условие *U=0* при *x=0* и второе условие *U=0* при *x=l*, получим

$0 = \alpha\cos 0 + \beta\sin 0, \quad 0 = \cos\lambda t + \beta\sin\lambda t$ откуда следует : $\alpha = 0, \lambda = \frac{n\pi}{l}$, *n* =1,2,3,... .

Как и в решении предыдущей задачи, каждому значению $\lambda(x)$ соответствует частное решение

$U_n = \beta_n l^{\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t^2}{l^2}\right)} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$ сумма которых *U(x,t)* также будет решением данного уравнения

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n l^{\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t^2}{l^2}\right)} \cdot sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (7)$$

Используя третье условие *U=φ (x)* при *t=0*, получим для определения β_n равенство

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

Это равенство есть разложение в интервале *(0,l)* данной функции *φ(x)* в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы. Поэтому

$$\beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx \qquad (8)$$

Таким образом, сумма ряда (7), коэффициенты которого определяются формулами (8), есть частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данным краевым условиям. Решенная задача может иметь такой физический смысл. Однородный стержень длины *l*, имеющий теплонепроницаемую боковую поверхность, расположен между точками *x=0* и *x=1* оси *Ox*; на его

концах поддерживается постоянная температура $U=0$ и в начальный момент $t=0$ распределение температуры вдоль стержня есть известная функция
$U=\varphi$ (x). Данное уравнение есть дифференциальное уравнение распространения тепла в стержне (параметр $a^2 = \frac{R}{Cp}$, где R - коэффициент теплопроводности, C-теплоемкость, p - плотность стержня), а полученное его решение $U(x,t)$ определяет распределение температуры вдоль стержня в любой момент времени t.

4 Тестовые задания

1.Третий член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ (n+1)}{(2n+1)^2}$ равен…

Варианты ответов:1) 1/2; 2) -4/49; 3)2/9; 4) -5/4

2. Интервалу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \, n}$ принадлежат две точки…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 5; 3) -1; -6

3.Необходимое условие сходимости выполняется для двух рядов…

Варианты ответов:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

4.Второй ненулевой член ряда Маклорена

$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$ функции $y = \cos 2x$ имеет вид…

Варианты ответов:1) 3x; 2)-2x^2; 3) 4x; 4) 2

Ответы к тестовым заданиям.

1.2).

2. 1) и 3).

3. 2) и 4).

4.2).

Заключение

При изучении многих практических вопросов естествознания и техники применяется метод поэтапного исследования данного объекта. На первом этапе учитываются самые главные характеристики изучаемого процесса, явления, как говорят, выполняется этап первого приближения. Потом переходят к следующему этапу, учитывая новые или более точные старые характеристики предмета, и т. д.

Одним из математических понятий, при помощи которого моделируются такие ситуации, является понятие «суммы» бесконечного числа слагаемых, за которым утвердилось название **ряда**.

Теория рядов широко используется в теоретических исследования различных вопросов естествознания и приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляются значения различных функций (логарифмических, тригонометрических и др.), вычисляются значения интегралов, решаются дифференциальные уравнения и т.п.

В частности, программы приближенного вычисления элементарных функций и решения многих стандартных задач, заложенные в память ЭВМ (включая микрокалькуляторы), основаны на применении теории рядов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные источники:

1 . Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Дополнительные источники:

2 Осипенко, С.А. Элементы высшей математики : учебное пособие : [16+] / С.А. Осипенко. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 202 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571231 Библиогр.: с. 193-194. – ISBN 978-5-4499-0201-6. – DOI 10.23681/571231. – Текст : электронный.

Интернет – ресурсы:

3 http: // www.math test.ru.

4 http: // www.webmath.ru.

5 http: // e - scince.ru.

6 http: // mathem lib.ru.