МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

по дисциплине
"МАТЕМАТИКА"

для студентов любых специальностей всех форм обучения

Братск 2020

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«_____»_____________20__г.   _________________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

(Подпись председателя РС)

«_____»_____________20__г.   №_____________________

Содержание

Введение

Современная теория функций комплексного переменного охватывает очень большую область математики. Так называют обширную и разветвленную совокупность математических дисциплин – теоретических и прикладных.

Понятие мнимого, а затем и комплексного числа, известно в математике и используется с давних времен. Однако еще в течение очень долгого времени, несмотря на некоторые удачные мысли, относительно интерпретации мнимых и комплексных чисел, их природа не была разгадана и к ним относилась как к некоторому сверхъестественному явлению в математике. Древнегреческие математики считали "настоящими" только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что «элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом». Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно. Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел. Это было сделано китайскими математиками во II веке до н. э. Отрицательные числа применял в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя .

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось, что необходимо извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Когда кубическое уравнение имеет один действительный корень, оно решается без всяких проблем, но если оно имеет три действительных корня, то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Вслед за тем, как были решены уравнения 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени. В 1830 году Эварист Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше, чем 4, нельзя решить алгебраически.

Понадобился гений Леонарда Эйлера, чтобы признать мнимые числа настоящими числами и распространить вычисление с этими числами на все разделы математики. Именно Эйлеру и принадлежит гениальная догадка о том, что комплексные числа являются алгебраически замкнутыми относительно всех алгебраических операций. То есть не существует таких алгебраических операций над комплексными числами, которые невозможно было бы сделать, не выходя за рамки комплексных чисел.

Первое строгое доказательство этого факта сумел получить Карл Гаусс в 1799 году. Из этого факта следуют две самые знаменитые теории математики. Это основная теорема алгебры о том, что любой многочлен степени n с комплексными корнями всегда имеет n корней, которые в общем случае также комплексные.

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы, считал что $\grave{a} \times \grave{a} = -\grave{a}$. Кардано называл такие величины “чисто отрицательными”, считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название “мнимые числа” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова imaginaire (мнимый) для обозначения числа - i (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “комплексные числа” так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского complexus) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. п., образующих единое целое.

1 Определение и виды комплексных чисел

1.1Понятие комплексного числа

Определение 1. Комплексным числом называется выражение вида

$$z = a+b\cdot i, \tag{1}$$

Например, $z = 3 - 7i$.

Определение 2. Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $a = \mathrm{Re}\ z$ (от французского слова reel - действительный). Действительное число b называется мнимой частью числа $z = a + bi$ и обозначается $b = \mathrm{Im}\ z$ (от французского слова imaginaire - мнимый).

Например, для комплексного числа $z = 3 - 7i$ действительная часть $a = \mathrm{Re}\ z = 3$, а мнимая - $b = \mathrm{Im}\ z = -7$.

Величина i называется мнимой единицей и удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1, \tag{2}$$

1.2 Виды комплексных чисел

1. Если действительная часть комплексного числа $z = a + bi$ равна нулю ($a = \mathrm{Re}\ z = 0$), то комплексное число называется чисто **мнимым**.

Например, $z = -2i$.

2. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части соответственно:

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.

Пример1. Определить при каких значениях x и y числа $z_1 = 2 - xi$ и $z_2 = y + 2i$ будут равными.

Решение. Согласно определению $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $a1 = a2$, т. е. 2 = y и $b1 = b2$, т.е. –x = 2, x = -2.

Ответ. $x = -2$, $y = 2$.

3. Число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексно сопряженным числом к числу $z = a + bi$.

То есть комплексно сопряженные числа отличаются лишь знаком мнимой части.

Например, для комплексного числа $z_1 = 2 + 3i$ комплексно сопряженным есть число $\bar{z}_1 = 2 - 3i$; для $z_2 = i$ комплексно сопряженное $\bar{z}_2 = -i$ и для $z_3 = -2$ имеем, что $\bar{z}_3 = -2$.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Если $z = \bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число z является действительным.

Например, $z = 2 \in R \Rightarrow \bar{z} = 2$ и $z = \bar{z}$.

2) Для любого комплексного числа z сумма $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\ z$ - действительное число.

Например, Пусть $z = 2 - 3i$, тогда $\bar{z} = 2 + 3i$, а тогда

$z + \bar{z} = 2 - 3i + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4 \in R$.

3) Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$ произведение $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$,т.е. является действительным числом.

Например, пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$$

$$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R.$$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рисунок 3).

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

8) $\overline{(\bar{z})} = z$.

9) Если $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ - комплексно сопряженные числа, то

$$a = \mathrm{Re}\ z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \ b = \mathrm{Im}\ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

4. Комплексное число $-z = -a - bi$ называется **противоположным** к комплексному числу $z = a + bi$.

Например, противоположным к числу $z = 2 + i$ есть число: $-z = -(2 + i) = -2 - i$.

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел, его можно записать так: $a = a + 0 \cdot i$. Числа 0, 1 и i записываются соответственно в виде $0 = 0 + 0 \cdot i$, $1 = 1 + 0i$, $i = 0 + 1i$.

1.3 Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексные числа изображаются на так называемой комплексной плоскости. Ось, соответствующая в прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, называется действительной осью, а оси ординат - мнимой осью (рисунок 1).

Комплексному числу $z = a + bi$ будет однозначно соответствовать на комплексной плоскости точка, координаты которой $(a;b)$ (рисунок 1). То есть, на действительной оси Ох откладывается действительная часть комплексного числа a, а на мнимой Оу – мнимая часть b.

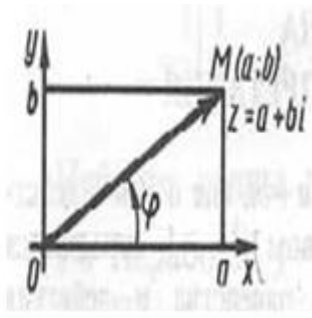


Рисунок 1 – Изображение комплексного числа

Пример 2. Изобразить комплексные числа $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -2i$, $z_4 = 2 + 3i$.

Решение. На рисунке 2 изображены указанные числа: точкам Mi соответствуют числа z_i.Также изображениями чисел являются векторы $\overrightarrow{OM_i}$.

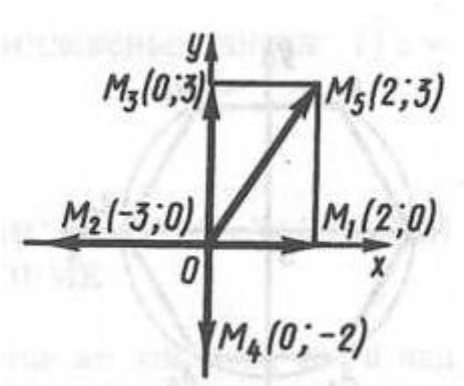


Рисунок 2 – Изображение чисел примера 2

1.3.1 Модуль комплексного числа

Комплексное число также можно изображать радиус-вектором $\overline{OM}$ (рисунок 2).

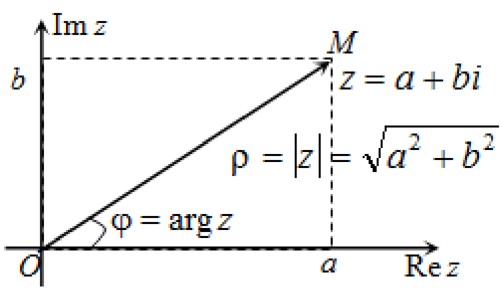


Рисунок 3- Изображение модуля и аргумента

Определение 3. Длина радиус-вектора, изображающего комплексное число $z = a + bi$, называется **модулем** этого комплексного числа.

Модуль любого ненулевого комплексного числа есть положительное число. Модули комплексно сопряженных чисел равны. Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей каждого из чисел.

Модуль вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (3)$$

То есть модуль комплексного числа есть сумма квадратов действительной и мнимой частей заданного числа.

Формула выводится с помощью теоремы Пифагора.

Пример 3. Найти модуль комплексного числа $z = 5 - 3i$.

Решение. По условию a = 5, b = -3, то искомое значение находится по формуле (3):

$|z| = |5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$.

Ответ. $|z| = \sqrt{34}$.

Замечание:

Иногда, еще модуль комплексного числа обозначается буквой r .

1.3.2 Аргумент комплексного числа

Определение 4. Угол $\boldsymbol{\varphi}$ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектора $\overline{OM}$, соответствующим комплексному числу $z = a + bi$, называется **аргументом** этого числа и обозначается **arg z** .

Если отсчет ведется против движения часовой, стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки, - отрицательной.

Аргумент $\boldsymbol{\varphi}$ комплексного числа $z = a + bi$ записывается так:

$\boldsymbol{\varphi}$ = arg z или $\boldsymbol{\varphi}$= arg(a +bi).

Для числа z = 0 аргумент не определен.

Аргумент $\boldsymbol{\varphi}$ комплексного числа определяется неоднозначно: любое комплексное число z $\neq$ 0 имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2$\boldsymbol{\pi}$. Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{\varphi} \leq \boldsymbol{\pi}$ называется главным значением аргумента.

Из определения тригонометрических функций следует, что если $\boldsymbol{\varphi}$= arg(a +bi), то имеют место равенства

$$\text{Cos}\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}},\ \ \sin\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}, \qquad (4)$$

Справедливо и обратное утверждение, т.е. если выполняются оба равенства, то $\boldsymbol{\varphi}$= arg(a +bi).

Значения аргумента комплексного числа z $= a + b$i $\neq 0$ можно находить по следующему алгоритму:

1) определить, в какой четверти находится точка z $= a + b$i (использовать геометрическую интерпретацию числа z $= a + b$i);

2) найти в этой четверти угол $\boldsymbol{\varphi}$, решив оно из уравнений

Cos $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}$, sin $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}$ или уравнение tg $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$;

3) найти все значения аргумента числа z по формуле

$$a\text{rctg } z = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z\ , \tag{5}$$

Пример 4. Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

1) z = i; 2) z = - 5i; 3) z =1+i; 4) z = 2-2i.

Решение.

1.Здесь $a = 0$, b=1. По формуле (3) получим r $=\sqrt{\mathbf{0^2 + 1^2}}$=1; φ = π/2, так как вектор, изображающий данное число, лежит на положительной полуоси Oy.

2.Здесь $a = 0$, b = -5; находим r $=\sqrt{\mathbf{0^2 + (-5)\ ^2}}$= 5; φ = π/2, так как вектор, изображающий данное число, лежит на отрицательной полуоси Oy.

3. Здесь $a = 1$,b= 1 (точка, изображающая данное число, лежит в I четверти);

r $=\sqrt{\mathbf{1^2 + 1\ ^2}}=\sqrt{\mathbf{2}};$ tg φ= b/a=1; φ=π/4.

Здесь a =2, b = - 2 (IV четверть); r $=\sqrt{\mathbf{2\ ^2 + (-2\ )^2}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}};$ tg φ= b/a= -1; φ = - π/4.

Чертежи с изображением указанных в примере комплексных чисел выполните самостоятельно.

Замечание. Аргумент действительного положительного числа равен 0° , действительного отрицательного - π или 180° . Чисто мнимые числа с положительной мнимой частью имеют аргумент равный $\frac{\pi}{2}$, с отрицательной мнимой частью - $\frac{3\pi}{2}$.

У комплексно сопряженных чисел аргументы отличаются знаком (рисунок 4).

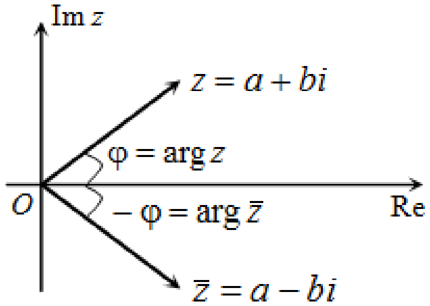


Рисунок 4 – Изображение комплексно сопряженных чисел

2 Формы записи комплексного числа

2.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа z в виде $z = a + bi$, где a и b - действительные числа, называется **алгебраической формой** комплексного числа.

При этом действительное число a называется действительной частью числа z : $a = \mathrm{Re}\, z$, а действительное число b - его мнимой частью: $b = \mathrm{Im}\, z$.

Величина i называется мнимой единицей и удовлетворяет равенству $i^2 = -1$, как было указано выше.

Например, для числа $z = 3 - 2i$ действительная часть $\mathrm{Re}\, z = 3$, а мнимая - $\mathrm{Im}\, z = -2$.

Пример 5. Записать число $z = \dfrac{3+i}{5}$ в алгебраической форме. Определить, чему равны мнимая и действительная части.

Решение. Числитель почленно поделим на знаменатель:

$$z = \frac{3+i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Тогда a= 3/5, b = 1/5.

Ответ: z = 3/5+1/5i. a= 3/5, b = 1/5.

2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Из формул Cos $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}$, sin $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}$

можно выразить a и b: a = r· cosφ, b = r · sinφ и подставить их в алгебраическую форму:

z =a + b i = r · cosφ + r · sinφ · i = r (cosφ + i · sinφ).

Запись

$$z = r\ (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\ , \qquad (6)$$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 6. Записать в тригонометрической форме числа:

1) $z = 1 - i$;

2) $z = -i$.

Решение. Для получения тригонометрической формы заданного комплексного числа найдем вначале его модуль и аргумент.

1) Так как a = 1, b = -1, то

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\arg z = \mathrm{arctg}\ \frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\ \frac{1}{-1} = \mathrm{arctg}\ (-1) = -\mathrm{arctg}\ 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма заданного числа $z = 1 - i$ имеет вид:
$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

2) Для заданного числа действительная часть $a = 0$, а мнимая часть $b = -1$. Тогда модуль этого числа
$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = 1$,

а аргумент
$\phi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{0} = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Отсюда получаем, что
$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

Ответ. $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

2.3 Показательная форма комплексного числа

В курсе высшей математики доказана формула Эйлера

$$e^{iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y), \qquad (7)$$

Для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями; например, при умножении чисел показатели складываются, при делении – вычитаются, при возведении в степень – перемножаются.

Показательная функция имеет период, равный $2\pi i$, т.е.
$e^{z+2\pi i} = e^{z}$.

В частности, при x = 0 получается соотношение $e^{2\pi i} = 1$.

Тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно заменить *показательной формой*, используя формулу Эйлера

$$z = re^{\varphi i}, \qquad (8)$$

Пример 7. Записать в показательной форме комплексные числа:
1) $z = 2i$;
2) $z = 3 - 4i$.

Решение.

1)Найдем модуль и аргумент заданного комплексного числа:
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$,

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{2}{0} = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$.

Получаем $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Ответ. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) Найдем модуль и аргумент заданного комплексного числа:

$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$,

$\phi = \text{arctg}\ \dfrac{-4}{3} = -\text{arctg}\ \dfrac{4}{3}$.

Тогда

$z = |z|e^{i\phi} = 5e^{-i\text{arctg}\frac{4}{3}}$.

Ответ. $z = 5e^{-i\text{arctg}\frac{4}{3}}$.

3 Операции с комплексными числами

3.1 Операции с комплексными числами в алгебраической форме

Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над действительными числами.

Сумма и произведение комплексных чисел могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением комплексных чисел в алгебраической форме, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные (как операции над алгебраическими двучленами), при этом надо учесть, что $i^2 = -1$.

1. Суммой двух комплексных чисел $a_1+b_1 i$ и $a_2+b_2 i$ называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

При сложении комплексных чисел геометрически используется сложение векторов по правилу параллелограмма (рисунок 5):

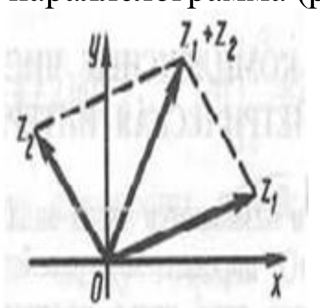


Рисунок 5 - Сложение векторов по правилу параллелограмма

2. Произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+ a_2b_1)i$.

3. Разностью двух комплексных чисел $a_1+b_1 i$ и $a_2+b_2 i$ называется комплексное число $(a_1+b_1 i)-(a_2+b_2 i) = (a_1-a_2) + (b_1 -b_2) i$.

При вычитании комплексных чисел геометрически используется сложение векторов $\overrightarrow{OZ_1}$ и - $\overrightarrow{OZ_2}$ по правилу параллелограмма (рисунок 6):

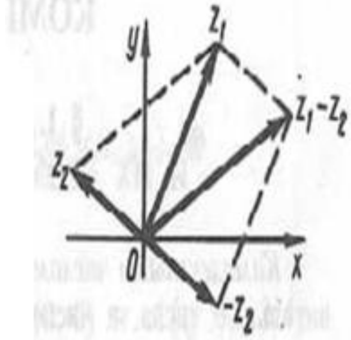


Рисунок 6 - Вычитание векторов

4. Делением двух комплексных чисел a_1+b_1 i и a_2+b_2 i называется комплексное число $\frac{a_1+b_1}{a_2+b_{2i}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$i,

то есть при делении комплексных чисел числитель и знаменатель умножают на число комплексно сопряженное знаменателю, затем раскрывают скобки и упрощают выражения.

Пример 8. Выполнить действия: 1) (4+2i)+ (1+5i); 2) (3+5i)−(6+3i).

Решение.

1) По правилу сложения комплексных чисел получим

$(4+2i) + (1+5i)= (4+1)+(2+5)i = 5+7i$.

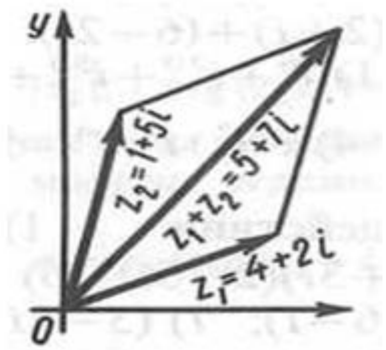


Рисунок 7 - Геометрическое изображение суммы

2) По правилу вычитания комплексных чисел $(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i$.

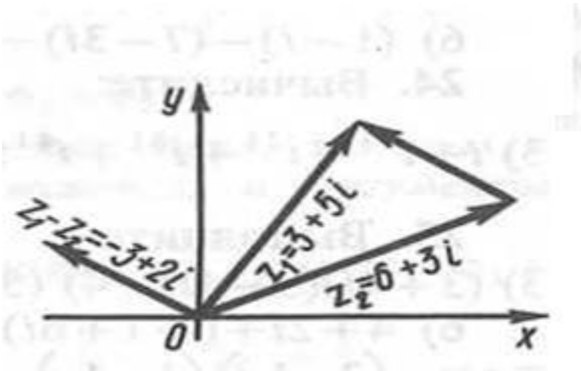


Рисунок 8 - Геометрическое изображение разности

Пример 9. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел - 2 +5 ix- 3 iy= 9i+ 2x – 4y .

Решение.

Выделим в обеих частях равенства действительные и мнимые части данных комплексных чисел:

- 2 +(5 x- 3 y)i= 2x – 4y+ 9i.

Теперь используя равенство комплексных чисел, составим систему

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2, \\ 5x - 3y = 9, \end{cases}$$

решив которую получим x = 3, y = 2.

Пример 10. Выполнить действия: 1) $\frac{2}{3i}$; 2)$\frac{1}{1+i}$; 3)$\frac{1+i}{1-i}$; 4)$\frac{2-3i}{4+5i}$.

Решение.

1) Умножив делимое на делитель на i, получим $\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$.

2)Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

3)$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{i} = i.$

4) $\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = \frac{-7}{41} - \frac{22}{41}i.$

Пример 11. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 3 + i$.

Решение.

Чтобы найти сумму заданных комплексных чисел, складываем соответственно их действительные и мнимые части:

$z_1 + z_2 = 2 - 3i + (3 + i) = (2 + 3) + (-3i + i) = 5 - 2i$.

Произведение данных чисел равно:

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 9i - 3i^2 =$
$= 6 - 7i - 3 \cdot (-1) = 9 - 7i$.

Ответ. $z_1 + z_2 = 5 - 2i$, $z_1 \cdot z_2 = 9 - 7i$.

3.2 Операции с комплексными числами в тригонометрической форме

3.2.1Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Если комплексные числа z_1 и z_2 заданы в геометрической форме $z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, то произведением этих чисел есть число

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right], \quad (9)$$

то есть, модуль произведения двух комплексных чисел в тригонометрической форме равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Пример 12. Найти произведение чисел $z_1 = 3 \cdot (\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)$, $z_2 = 2 \cdot (\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$.

Решение. Модуль произведения равен $|z| = 3 \cdot 2 = 6$, а аргумент $\phi = 10^\circ + 50^\circ = 60^\circ$, тогда искомое число в тригонометрической форме имеет вид:

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = 6 \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ).$$

Запишем результат в алгебраической форме. Для этого вычислим значения соответствующих тригонометрических функций.

$$z = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i$$

Ответ. $z = 6 \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 3 + 3\sqrt{3}i$.

3.2.2Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Если надо поделить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)}{|z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)}$, то искомое число имеет вид

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right],$$

то есть, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент - разности аргументов делимого и делителя.

Пример 13. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, а $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$

Решение.

Искомое частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 2 \cdot (0 + i) = 2i.$$

Ответ. $\dfrac{z_1}{z_2} = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$.

3.2.3 Возведение комплексного числа в натуральную степень в тригонометрической форме

Возводить в натуральную степень n, если она достаточно велика, комплексные числа проще всего в тригонометрической форме, то есть, если число $z = a + bi$ задано в алгебраической форме, то его изначально надо записать в тригонометрической.

Пусть число $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, тогда умножая его само на себя n раз (что эквивалентно тому, что мы его возводим в степень n), получим:

$$z^n = \left(|z|(\cos\phi + i\sin\phi)\right)^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Таким образом, модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля основания, а аргумент равен аргументу основания, умноженному на показатель степени.

Если $|z| = 1$, то получаем, что

$$z^n = (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi \ , \qquad (10)$$

Данная формула называется формулой Муавра (Абрахам де Муавр (1667 - 1754) - английский математик).

Пример 14. Найти z^{20}, если $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решение. Вначале запишем заданное комплексное число в тригонометрической форме. Для этого вычислим его модуль и аргумент:

$$|z| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1,$$

$$\arg z = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$z = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

А отсюда, согласно формуле, имеем:

$$z^{20} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20} = \cos\left(20\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{21\pi - \pi}{3} + i\sin\frac{21\pi - \pi}{3} =$$
$$= \cos\left(7\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(7\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ответ. $z^{20} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3.2.4 Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

Определение 5. Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, n-я степень которого равна z, то есть $w^n = z$.

Корень n -ой степени из комплексного числа z обозначается символом $\sqrt[n]{z}$ и на множестве комплексных чисел имеет ровно n значений.

Если комплексное число z задано в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, то все значения корня n-ой степени вычисляются по формуле Муавра (Абрахам де Муавр (1667 - 1754) - английский математик):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2nk}{n} + i\sin\frac{\phi + 2nk}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Геометрически все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и образуют правильный n-угольник.

Пример 15. Вычислить корень четвертой степени из $z=-1$

Решение. Запишем заданное число в тригонометрической форме, для этого вычислим модуль и аргумент:

$$|z|=|-1|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$$

$$\arg\, z=\arg\,(-1)=\mathrm{arctg}\ \frac{0}{-1}+\pi=\mathrm{arctg}\ 0+\pi=0+\pi=\pi$$

То есть

$$z=-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=\cos\pi+i\sin\pi$$

Тогда

$$w_k=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\ ,\ k=\overline{0;3}$$

Находим все значения корней:

$$k=0\ :\ w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=1\ :\ w_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=2\ :\ w_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=3\ :\ w_3=\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Покажем, что все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt[4]{|z|}=\sqrt[4]{1}=1$ и образуют правильный четырехугольник, то есть квадрат (рисунок 9).

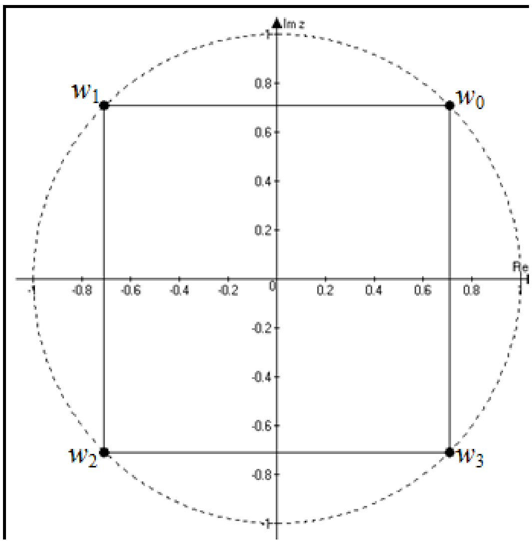


Рисунок 9 – Изображение корней

Ответ. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

3.3 Операции с комплексными числами в показательной форме

Такая форма представления позволяет дать наглядную интерпретацию операциям умножения комплексных чисел, их деления и возведения комплексного числа в степень.

3.3.1 Умножение комплексных чисел в показательной форме

Умножение комплексного числа $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1}$ на комплексное число $z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}$ выглядит следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i\phi_1 + i\phi_2} = = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

То есть, чтобы найти произведение комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы.

3.3.2Деление комплексных чисел в показательной форме

Аналогично можно довольно легко найти частное от деления комплексного числа $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1}$ на комплексное число $z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\phi_1}}{|z_2|e^{i\phi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i\phi_1 - i\phi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Отсюда получаем правило, что для того чтобы найти частное двух комплексных чисел, надо поделить их модули и отнять аргументы.

3.3.3 Возведение комплексного числа в натуральную степень показательной форме

Для возведения комплексного числа z в натуральную n нужно представить это число в показательной форме $z = |z|e^{i\phi}$, модуль возвести в степень, а аргумент увеличить в n раз:

$$z^n = \left(|z|e^{i\phi}\right)^n = |z|^n e^{in\phi}.$$

3.2.4 Извлечение корня из комплексного числа показательной форме

Корни n – ой степени из комплексного числа находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}, k = 0;1;...;n-1,$$

где r – модуль, φ – аргумент , k – целое число, принимающее значения указанные выше, n – степень корня.

Комплексное число имеет столько корней, какова степень корня, то есть, если корень квадратный, то корней два, если корень кубический, то корней три и т. д.

Пример 16. Извлечь корни третьей степени из числа z = - $\sqrt{3}$ + i.

Решение.

1) обозначим корни и найдем модуль исходного комплексного числа:

$$w=\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i};\quad r=\sqrt{3+1}=2,$$

2) найдем аргумент исходного комплексного числа:

$$\varphi=arctg\,\frac{1}{-\sqrt{3}}=\pi-arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi,$$

3) вычисляем корни числа, подставляя в формулу

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)},k=0;1;\ldots;n-1$$

значения n =3, k = 0,1,2, r = 2, $\varphi=\frac{5}{6}\pi$:

$$w_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5}{18}\pi+i\sin\frac{5}{18}\pi\right),$$

$$w_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5}{6}\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5}{6}\pi+2\pi}{3}\right),$$

$$w_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5}{6}\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5}{6}\pi+4\pi}{3}\right).$$

Если изобразить корни в комплексной плоскости , что несложно сделать самостоятельно, то получится правильный (равносторонний) треугольник.

Пример 17. Представив числа z_1 = 1 + i и z_2 = 1- $i\sqrt{3}$ в показательной форме, вычислить: 1) $z_1 z_2$; 2) z_1/z_2; 3) z_1^6.

Решение.

1) Для числа z_1 = 1+i имеем : a = 1, b = 1, r = $\sqrt{2}$, φ=$\frac{\pi}{4}$, т.е $z_1=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2) Для числа z_2 = 1- $i\sqrt{3}$ имеем : a = 1, b = - $\sqrt{3}$, r = 2, φ= -π/3, т.е $z_2=2e^{-i/3}$.

3) Имеем $z_1 z_2=\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cdot 2e^{-i\pi/3}=2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}+\left(-\frac{i\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$.

4) Имеем $z_1/z_2=\sqrt{2}e^{i\pi/4}/(2e^{-i\pi/3})=2/\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}-\left(-\frac{i\pi}{3}\right)}=2/\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$.

5) Имеем $z_1^6=(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^6=8\,e^{i3\pi/2}$.

4 Квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом

Пусть задано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a , b и c - в общем случае являются комплексными. Его решение находим с помощью дискриминанта

$D=b^2-4ac$,

тогда

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

В общем случае и дискриминант, и корни уравнения являются комплексными числами.

Пример 18. Составить квадратное уравнение, которое имеет корни $z_1=1-i$ и $z_2=4-5i$ и решить его.

Решение.

Известно, что если z_1, z_2 - корни квадратного уравнения $z^2+bz+c=0$, то указанное уравнение можно записать в виде $(z-z_1)(z-z_2)=0$. А тогда, учитывая этот факт, имеем, что искомое уравнение можно записать следующим образом:

$(z-(1-i))(z-(4-5i))=0$.

Раскрываем скобки и выполняем операции над комплексными числами:

$z^2-(4-5i)z-(1-i)z+(1-i)(4-5i)=0$,

$z^2+z(-4+5i-1+i)+4-5i-4i+5i^2=0$,

$z^2+(-5+6i)z-(1+9i)=0$ - искомое квадратное уравнение.

Решаем полученное уравнение.

Находим дискриминант:

$$D=(-5+6i)^2-4\cdot1\cdot(-(1+9i))=-11-60i+4+36i=$$
$$=-7-24i.$$

Так как при извлечении корня из комплексного числа в результате получится комплексное число, то корень из дискриминанта будем искать в виде $\sqrt{D}=a+bi$:

$$\sqrt{-7-24i}=a+bi\Rightarrow-7-24i=(a+bi)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-7-24i=a^2+2abi-b^2.$$

Учитывая, что два комплексных числа будут равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно, получим систему для нахождения неизвестных значений a и b:

$$\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases},$$

решив которую, имеем, что $a_1=3$, $b_1=-4$ или $a_2=-3$, $b_2=4$. Рассматривая любую из полученных пар, например, первую, получаем, что $\sqrt{D}=3-4i$, а тогда

$$z_1=\frac{-(-5+6i)+(3-4i)}{2\cdot1}=4-5i,$$

$$z_2 = \frac{-(-5+6i)-(3-4i)}{2\cdot 1} = 1-i.$$

Ответ. $z^2+(-5+6i)z-(1+9i)=0$.

Пример 19. Решить уравнение $x^2 + 6x + 13 = 0$ в комплексных числах.
Решение.
1. Находим дискриминант
$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$.
$\sqrt{D} = 4i$.
Вычисляем корни уравнения:
$x_1 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i$, $x_2 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i$.
Очевидно, что найденные числа являются комплексно сопряженными.
Ответ. $x_1 = -3 + 2i$, $x_2 = -3 - 2i$.

5 Линии и области в комплексной плоскости

Чтобы построить линию в комплексной плоскости нужно перейти к записи уравнения этой линии в действительных координатах: $z=x+iy$, $x=Rez$, $y=Imz$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение таких упражнений рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 20 . Построить линию, заданную уравнением Re(z+2) = 3.

Решение.

Перейдем к декартовым (прямоугольным) координатам, получим $Re(x+iy+2)=3 \Rightarrow x+2=3 \Rightarrow x=1$. Это уравнение прямой параллельной мнимой оси.

Пример 21. Построить линию, заданную уравнением $|z-3i|=2$.

Решение.

Перейдем к декартовым координатам, получим $|x+iy-3i|=2 \Rightarrow$ $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=4$. Это уравнение окружности с центром в точке (0; 3) и радиуса равного 2.

Пример 22. Записать уравнение линии в комплексной форме: $\frac{y}{x}=1$.

Решение.

Выразим декартовы координаты через комплексную переменную, получим $\frac{Imz}{Rez}=1$ или $arctg\frac{Imz}{Rez}=arctg1 \Rightarrow \arg z=\frac{\pi}{4}$. Это уравнение прямой с выколотой точкой (0; 0) в комплексной форме.

Чтобы построить область в комплексной плоскости нужно в неравенстве, определяющем эту область заменить комплексную переменную z действительными переменными x и y.

Пример 23. Определить область, заданную неравенствами: $2\le Im(z-i)\le 3$. **Решение.**

Перейдем к декартовым координатам, получим $2\le y-1\le 3 \Rightarrow 3\le y\le 4$. Это область, заключенная в полосе между прямыми $y = 3$ и $y = 4$.

Пример 24. Определить область, заданную неравенством $|z-i| < |z+3|$. **Решение.**

Перейдем к декартовым координатам, получим

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2<(x+3)^2+y^2 \Rightarrow y>-3x-4.$$

Это часть плоскости, расположенная выше прямой $y = -3x-4$.

Пример 25. Определить область, заданную неравенством $|z-3+2i|>2$.

Решение.

Это часть плоскости, расположенная вне круга $(x-3)^2+(y+2)^2=4$.

6 Вопросы для самоконтроля

1. Какие числа называются рациональными?
2. Существует ли рациональное число, выражающее длину диагонали квадрата со стороной, равной 1?
3. Может ли быть выражено рациональным числом отношение длины окружности к диаметру?
4. Как определяется множество вещественных чисел?
5. Является ли множество комплексных чисел упорядоченным ?
6. Возможно ли установить взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками некоторой плоскости?
7. Дайте определение комплексного числа.
8. Как определяется алгебраическая форма комплексного числа?
9. Каково соотношение между действительными и комплексными числами?
10. Какие числа называются комплексно сопряженными?
11. Почему комплексные корни квадратного уравнения (с вещественными коэффициентами) обязательно являются сопряженными комплексными числами?
12. Какие комплексные числа называются равными?
13. Дайте определение полярной системы координат.
14. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
15. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
16. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме, к его тригонометрической форме?
17. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
18. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
19. По какой формуле извлекается корень *n-й.* степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?
20. Как записать комплексное число в показательной форме?
21. Запишите тождество Эйлера.
22. Дайте определение показательной формы комплексного числа.
23. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме, к его показательной форме?
24. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в показательной форме?
25. Как возводится в степень комплексное число, заданное в показательной форме?
26. По какой формуле извлекается корень *n-й.* степени из комплексного числа, заданного в показательной форме?

7 Тестовые задания по теме «Комплексные числа»

Тест №1

Цель: проверить знания по основным понятиям и определениям темы «Комплексные числа»

Вариант 1

1. Модуль комплексного числа $z = 6 + 8i$ равен…
1. 10
2. 6
3. 14
4. 8

2. Комплексное число $z = 2 + 2i$ можно представить в виде …
1. $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
3. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
4. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Произведение комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 - 7i$ равно …

1. $5 - 30i$ 2. $5 - 26i$ 3. $19 - 30i$ 4. $19 - 26i$

4. Тригонометрическая форма комплексного числа, имеющего модуль $2\sqrt{3}$ и аргумент $\frac{\pi}{6}$, имеет вид...
1. $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
2. $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
3. $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
4. $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

5. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 1 - 5i$ и $z_2 = 1 - i$ равно….
1. $3 - 2i$
2. $2 - 3i$
3. $2 + 3i$
4. $3 + 2i$

6. Найти $|z|$, если $z = -\sqrt{11} + 5i$:

1.6

2.11

3.5

4. $\sqrt{11}$

7. Комплексное число $z = \frac{2-5i}{3+i}$ равно …
1. $0{,}1 - 1{,}7i$
2. $0{,}5 - 1{,}25i$
3. $\frac{11}{8} - i\frac{13}{8}$
4. $0{,}1 - 1{,}3i$

8. Даны два комплексных числа: $z_1 = 3-5i$ и $z_2 = 5-4i$. Тогда действительная часть произведения $z_1 z_2$ равна…
1. –5
2. 35
3. 15
4. –37

9. Частное $\frac{z_2}{z_1}$ комплексных чисел $z_1 = 3-i$ и $z_2 = 1-7i$ равно ...
1. $1-2i$
2. $-0{,}4-2{,}2i$
3. $1+2i$
4. $-0{,}4-2i$

10. Установите соответствие между алгебраической формой комплексного числа и его тригонометрической формой.
1. $z = 2+2i$
2. $z = \sqrt{3} - i$
3. $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ:

A) $z = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

B) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

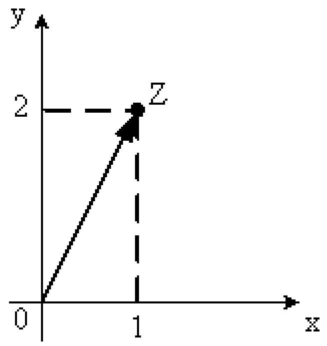
C) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

D) $z = \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

E) $z = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

11. Комплексное число $2-5i-(1+2i)\cdot i$ равно …
1. $4-6i$
2. $-6i$
3. $4-4i$
4. $2-8i$

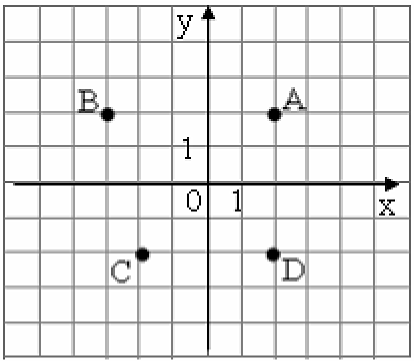
12. Алгебраическая форма комплексного числа, изображённого на рисунке



Имеет вид…

1. $z = 1 + 2i$
2. $z = 2 + i$
3. $z = 1 - 2i$
4. $z = \sqrt{3}$

13. Комплексные числа заданы точками на плоскости



Тогда комплексно-сопряженными числами являются…

1. A и D
2. A и B
3. A и C
4. D и C

14. Действительная часть комплексного числа $z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2$ имеет вид…

1. $\cos\pi$
2. $\cos\frac{\pi}{2}$
3. $\cos^2\pi$
4. $\cos^2\frac{\pi}{2}$

15. Произведение комплексного числа $z = 4 - 3i$ на сопряженное число $\bar{z}$ равно…

1.25

2. $16-9i$
3. 5
4. $8-6i$

16. Даны комплексные числа $z_1=1-i$ и $z_2=3+4i$. Тогда $3z_1-2z_2$ равно…

1. $-3-11i$
2. $9+5i$
3. $-3+5i$
4. $-7i$

17. Значение комплексного числа $(1+i\sqrt{3})^9$, вычисленное по формуле Муавра, равно…

1. –512
2. 521
3. –521
4. 512

18. Действительная часть комплексного числа $(3+2i)^2$ равна …

1. 5
2. –13
3. –5
4. 13

19. Даны два комплексных числа $z_1=5+4i$ и $z_2=5-4i$. Тогда квадратное уравнение, составленное из них, имеет вид:

1. $z^2-10z+41=0$
2. $z^2+10z+9=0$
3. $z^2-10z-9=0$
4. $z^2+10z+41=0$

Вариант 2

1. Произведение комплексных чисел $z_1=3-2i$ и $z_2=3+4i$ равно …

1. $17+6i$
2. $1+6i$
3. $1+18i$
4. $17-18i$

2. Модуль комплексного числа $3+4i$ равен…

1. 5
2. 3
3. 4
4. 7

3. Даны комплексные числа $z_1=2-i$ и $z_2=3+5i$. Тогда $2z_1-3z_2$ равно…

1. $-5-17i$

2. $-5+13i$
3. $-5+14i$
4. $-5+3i$

4. Тригонометрическая форма комплексного числа, имеющего модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\frac{\pi}{4}$, имеет вид...

1. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
2. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
3. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
4. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

5. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1=2+5i$ и $z_2=-1-i$ равно….

1. $-7-3i$
2. $3+7i$
3. $3-3i$
4. $7+7i$

6. Комплексное число $z=1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме имеет вид …

1. $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
2. $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
4. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

7. Частное $\frac{z_2}{z_1}$ комплексных чисел $z_1=-2+i$ и $z_2=-4+7i$ равно ...

1. $\cos\frac{\pi}{2}$
2. $\cos^2\frac{\pi}{2}$
3. $\cos^2\pi$
4. $\cos\pi$

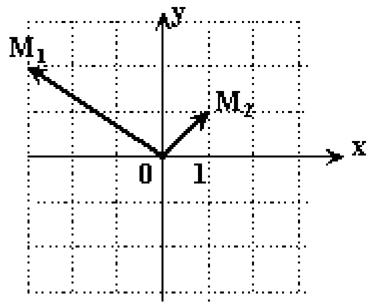
8. Действительная часть комплексного числа $(5-2i)^2$ равна…

5. 21
6. 7
7. 29
8. -10

9. Конец радиус-вектора, задающего комплексное число $z = -5 + 2i$, лежит…

1. Во второй четверти
2. В первой четверти
3. В третьей четверти
4. В четвёртой четверти

10. Комплексные числа z_1 и z_2 заданы соответственно радиус-векторами $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$:



Тогда сумма $z_1 + z_2$, записанная в алгебраической форме, имеет вид…

1. $-2+3i$
2. $-3+2i$
3. $1+i$
4. $2i$

11. Аргумент комплексного числа $2 + 2i$ равен…

1. $\dfrac{\pi}{4}$
2. $\dfrac{3\pi}{4}$
3. $\dfrac{\pi}{6}$
4. $\dfrac{\pi}{3}$

12. Произведение комплексного числа $z = 1 - 2i$ и сопряженного числа $\bar{z}$ равно …

1. 5
2. -3
3. -5
4. $1-4i$

13. Действительными решениями уравнения $(1+i)x + (1-i)y = 3 - i$ являются…

1. $x=1, \; y=2$
2. $x=2, \; y=1$
3. $x=3, \; y=0$
4. $x=0, \; y=3$

14. Даны два комплексных числа: $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 5 - 4i$. Тогда действительная часть произведения $z_1 z_2$ равна…

1. 10
2. 12
3. 22
4. –2

15. Значение комплексного числа $(-\sqrt{2} + i)^8$, вычисленное по формуле Муавра, равно…

1. 81
2. –81
3. 24
4. –24

16. Значение функции $f(z) = z^2$ в точке $z_0 = 3 + 2i$ равно…

1. $7 + 12i$
2. $9 + 12i$
3. $13 + 12i$
4. $5 + 12i$

17. Установите соответствие между комплексным числом и его аргументом

1. $\sqrt{3} + i$
2. $\sqrt{3} - i$
3. $-\sqrt{3} + i$
4. $-\sqrt{3} - i$

Ответ:

A) $\frac{11\pi}{6}$

B) $\frac{2\pi}{3}$

C) $\frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{7\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{3}$

F) $\frac{\pi}{6}$

18. Найти разность $x - y$ из условия равенства двух комплексных чисел:

$5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i.$

1. –1
2. 1
3. 5

4. 9

19. Если $z = 2 + 3i$, то сопряжённое ему комплексное число $\bar{z}$ равно...

5. $3 - 2i$
6. $2 - 3i$
7. $-2 + 3i$
8. $3 + 2i$

20. Установите соответствие между алгебраической формой комплексного числа и его тригонометрической формой

1. $z = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $z = 1 + i$
3. $z = -2 + i \cdot 2\sqrt{3}$

Ответ:

A) $z = 4\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

B) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

C) $z = \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

D) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

E) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

21. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда квадратное уравнение, составленное из них, имеет вид:

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$
2. $z^2 + 2z - 2 = 0$
3. $z^2 - 2z - 2 = 0$
4. $z^2 + 2z + 4 = 0$

22. Действительная часть комплексного числа $z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$ имеет вид

1. $\cos\frac{\pi}{3}$
2. $\cos^2\frac{\pi}{3}$
3. $\cos\frac{\pi}{6}$
4. $\cos^2\frac{\pi}{6}$

Тест №2

Цель: проверить умение применять геометрическую интерпретацию модуля.

Задание: Сопоставьте друг другу условие на комплексное число z и соответствующее ему множество точек координатной плоскости.

Вариант №1

А $\lvert z\rvert = 3$	1Круг с центром (1; 0) и радиусом 3
Б $\lvert z-1\rvert \le 3$	2Часть плоскости вне круга с центром (0; 0) и радиусом 3
В $\lvert z+i\rvert \le 3$	3Прямая x = 0
Г $\lvert z\rvert < 3$	4Круг с центром (0; 0) и радиусом 3
Д $\lvert z-1\rvert = \lvert z+1\rvert$	5Круг с центром (0; 1) и радиусом 3
	6Окружность с центром (0; 0) и радиусом 3

Вариант №2

А $\lvert z-2i\rvert = 3$	1Часть плоскости вне круга с центром (0;0) и радиусом 3, включая границу.
Б $\lvert z+2i\rvert \le 3$	2Прямая y = – x
В $\lvert z-2-i\rvert \le 3$	3Окружность с центром (0; – 2) и радиусом 3
Г $\lvert z+2i\rvert = \lvert z+2\rvert$	4Круг с центром (2; – 1) и радиусом 3
Д $\lvert z\rvert \ge 3$	5Круг с центром (0;2) и радиусом 3
	6Окружность с центром (0; 0) и радиусом 3

Тест №3

Цель: проверить знание определения аргумента и модуля.

Прочитайте каждое утверждение, если вы с ним согласны, то в колонке ответов поставьте «+», если же вы не согласны с данным утверждением, поставьте « – » в колонке ответов.

Вариант №1

№ п/п	Утверждения:	Ответ
1	Точки плоскости, удовлетворяющие условию $\lvert z-1\rvert = 2$, лежат на окружности радиуса 1.	
2	Два комплексных числа равны, если равны их аргументы.	
3	Точки плоскости, у которых arg z = π, лежат на открытом луче выходящим из (0; 0) и имеющим угол, равный 180^{o}С	

	положительным направлением действительной оси.	
4	Множество всех комплексных чисел, у которых равны модули, есть окружность.	
5	При умножении комплексных чисел модули и аргументы перемножаются.	
6	При делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются.	
7	У сопряженных комплексных чисел модули равны.	

Вариант №2

№ п/п	Утверждения:	Ответ
1	Точки плоскости, удовлетворяющие условию $\lvert z+2 \rvert = 2$, лежат на окружности радиуса 2.	
2	Два комплексных числа равны, если равны их модули.	
3	Точки плоскости, у которых arg z = $-\frac{\pi}{2}$, лежат на открытом луче выходящим из (0;0) и имеющим угол, равный – 90^{o}С положительным направлением действительной оси.	
4	Множество всех комплексных чисел, у которых равны аргументы, есть открытый числовой луч, выходящий из начала координат и наклонённый под углом α к положительному направлению оси абсцисс.	
5	При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.	
6	При делении комплексных чисел модули и аргументы делятся.	
7	У сопряженных комплексных чисел аргументы противоположны.	

Тест № 4

Вариант №1

№п/п	Утверждения:	Ответ
1	Число $\sqrt{2}$ является комплексным.	
2	Число а такое, что $a^2 = -2$ является действительным.	
3	Число а такое, что $a^4 = 1$ является действительным.	
4	0 – комплексное число.	
5	Число 3i является чисто мнимым.	
6	Действительная и мнимая части комплексного числа 3 – 2i соответственно равны 3 и 2.	

7	Действительная и мнимая части сопряженных чисел отличаются только знаками.	
8	Сопряженным для действительного числа является само это число.	
9	Если $\bar{z} = -z$, то действительная часть числа z равна 0.	

Вариант №2

№п/п	Утверждения:	Ответ
1	Число 5 является комплексным.	
2	Число a такое, что $a^2 = 4$ является действительным.	
3	Число a такое, что $a^8 = 1$ является действительным.	
4	0 – мнимое число.	
5	Если a + bi является действительным, то b = 0	
6	Действительная и мнимая части комплексного числа – 3 + 2i соответственно равны – 3 и 2.	
7	Мнимые части сопряженных чисел отличаются только знаками.	
8	Если $\bar{z} = z$, то мнимая часть числа z равна 0.	
9	$\bar{z} \cdot z = x^2 - y^2$.	

8 Упражнения для самостоятельного решения

Самостоятельная работа №1

Цель: проверить умение применять правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, определения равенства комплексных чисел, записанных в алгебраической форме .

Вариант 1

Даны числа: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$.

Найдите:

a) z_1+z_2

b) z_1-z_2

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_1^2-2z_2$

Для чисел $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$ найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\dfrac{z_1}{z_2} = az_1+bz_2$.

Запишите z в алгебраической форме:

$$z = \frac{-41+63i}{50} - \frac{6i+1}{1-7i}$$

Вариант 2

Даны числа: $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-i$.

Найдите:

a) z_1+z_2

b) z_1-z_2

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_1^2-2z_2$

Для чисел $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-7i$ найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\dfrac{z_1}{z_2} = az_1+bz_2$.

Запишите z в алгебраической форме:

$$z = \frac{13+12i}{6i-8} - \frac{(2i+1)^2}{i+2}$$

Вариант 3

Даны числа: $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

Найдите:

a) z_1+z_2

b) z_1-z_2

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_1^2-2z_2$

Для чисел $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}i$ найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\dfrac{z_1}{z_2} = az_1+bz_2$.

Запишите z в алгебраической форме:

$$z = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$$

Самостоятельная работа № 2

Цель: проверить умение находить модуль комплексного числа.

Вариант 1

Для чисел $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 8+6i$ вычислите модули следующих выражений:

Вариант 2

Для чисел $z_1 = \dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$, $z_2 =$

1. z_1
2. z_2
3. $z_1 + z_2$
4. $z_1 - z_2$

и проверьте следующие неравенства

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$$

$$\frac{1}{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})}$$

вычислите модули следующих выражений:

1. z_1
2. z_2
3. $z_1 + z_2$
4. $z_1 - z_2$

и проверьте следующие неравенства

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$$

Сложность варианта 2 выше, т.к. прежде чем находить модули нужно преобразовать числа в алгебраическую форму.

Самостоятельная работа № 3

Цель: проверить умение находить модуль и аргумент комплексного числа, переводить из алгебраической в тригонометрическую форму

Вариант 1.
1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:
a) $z = 2i$; b) $z = -1 - i\sqrt{3}$.

2. Даны числа:

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

Вариант 2.
1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:
a) $z = -3i$; b) $z = \sqrt{3} - i$.

2. Даны числа:

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

Вариант 3.

1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

a) $z = 1 - \sqrt{2}$, b) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

2. Даны числа:

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = 12(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

Вариант 4

1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

a) $z = \sqrt{5} - 3$; b) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2. Даны числа:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 0{,}5(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

Самостоятельная работа № 4 «Комплексные числа и квадратные уравнения»

Цель: проверить умение применять определение мнимой единицы при разложении на множители с помощью формул сокращенного умножения, атак же умения решать квадратные уравнения с действительными коэффициентами.

Вариант 1

1. Разложите на линейные множители:

a) $a^2 + 4$

b) $x^2 + 1$

c) $a^2 + 4b^2$

d) $a^4 - b^4$

e) $a^6 + 64$

2. Решите уравнение:

a) $z^2 + 1 = 0$

b) $x^2 - 4x + 20 = 0$

c) $z^4 = 16$

Вариант 2

1. Разложите на линейные множители:

a) $b^2 + 64$

b) $x^2 + 9$

c) $a^2 + 16b^2$

d) $c^4 - b^4$

e) $a^6 + 729$

2. Решите уравнение:

a) $z^4 = 1$

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$

c) $z^2 + 16 = 0$

Заключение

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование. Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707): $(cosx + isinx)^n = cos\ nx + i\cdot sin\ nx$. С помощью этой формулы можно было также вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу $e^{ix} = sinx + i\ cosx$, которая связывала показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень. Например, $e^{i\pi} = -1$. Можно находить синусы и косинусы от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного .

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов.

Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число $z = a + b \times i$ точкой $M\,(a, b)$ на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой М, а вектором , идущим в эту точку из начала координат. Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения.

Комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости. Поэтому многие математические положения на языке комплексных чисел формулируются очень кратко и изящно. Доказательство многих теорем становится очень компактным и простым. Вычисления в технике и в таких науках, как физика, механика, астрономия, значительно упрощаются.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые: Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Боголов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля. Также комплексными числами пользовался отец русской авиации Н. Е. Жуковский (1847 – 1921) при разработке теории крыла, автором которой он является. Комплексные числа и функции от комплексного переменного находят применение во многих вопросах науки и техники.

Список использованных источников

1Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751

Дополнительные источники**:**

2Осипенко, С.А. Элементы высшей математики : учебное пособие : [16+] / С.А. Осипенко. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 202 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571231 Библиогр.: с. 193-194. – ISBN 978-5-4499-0201-6. – DOI 10.23681/571231. – Текст : электронный.

Интернет – ресурсы:

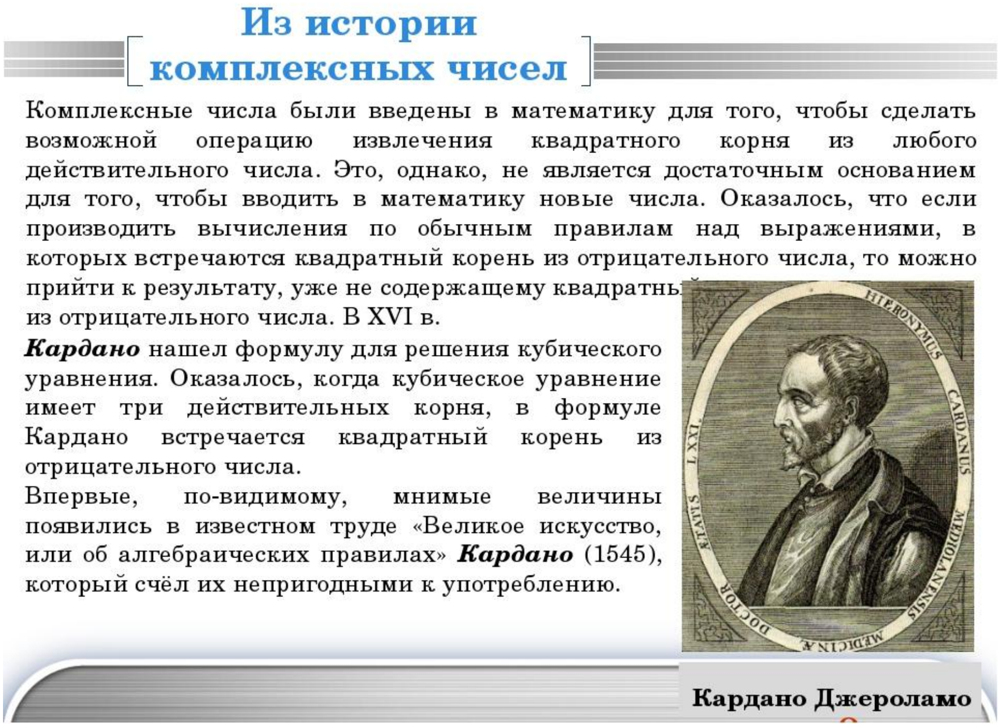
3http: // www.mathtest.ru.

4http: // www.webmath.ru.

5http: // e - scince.ru.

6http: // mathemlib.ru.

Приложение А



Из истории комплексных чисел

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в. ***Кардано*** нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» ***Кардано*** (1545), который счёл их непригодными к употреблению.

Кардано Джероламо

Рисунок А1 – Из истории комплексных чисел

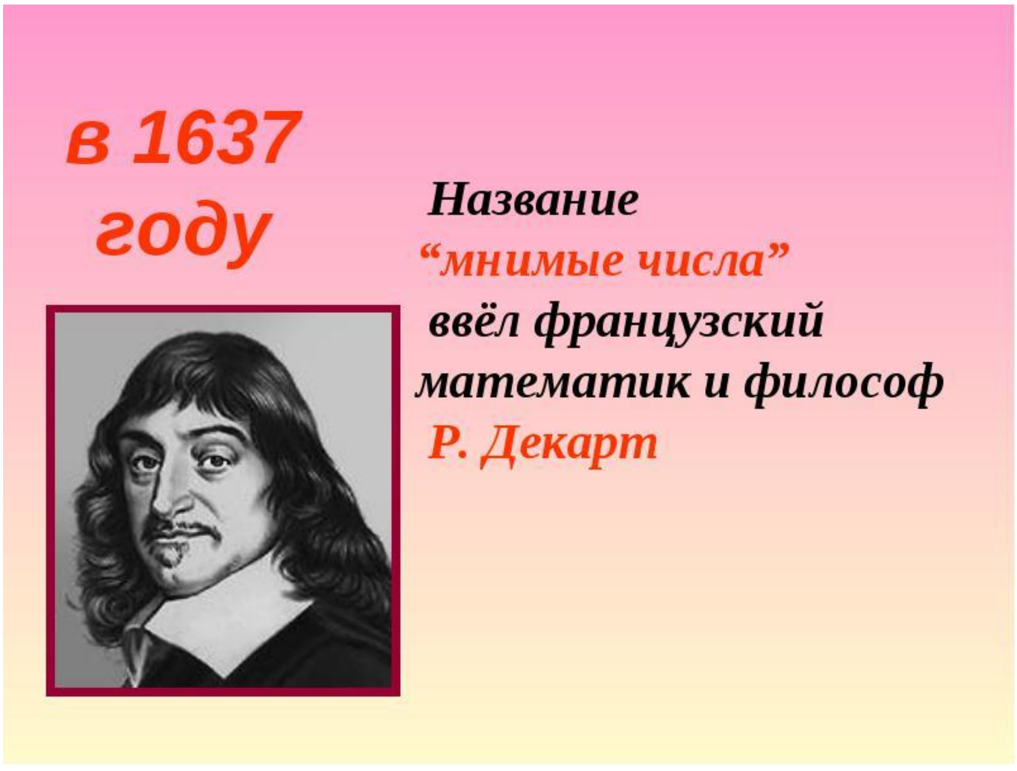


Рисунок А2 – Автор названия «мнимые числа»

Приложение Б

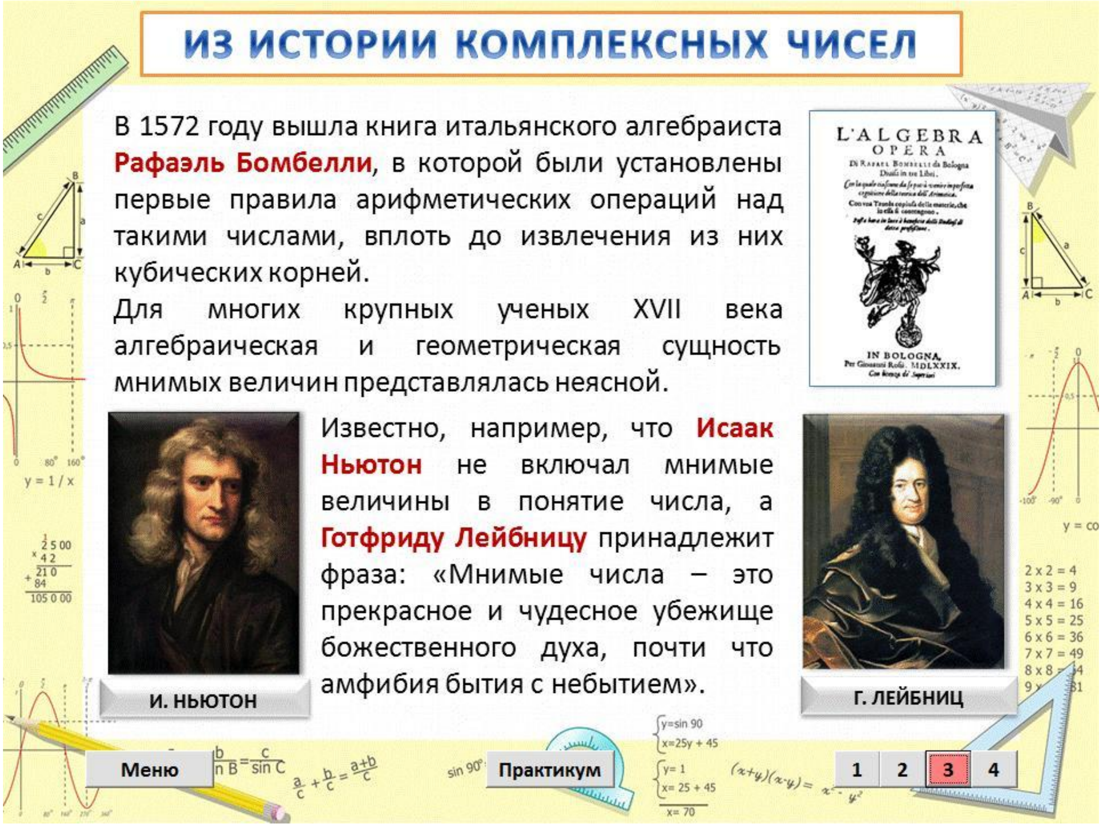


Рисунок Б1 –Из истории создания комплексных чисел

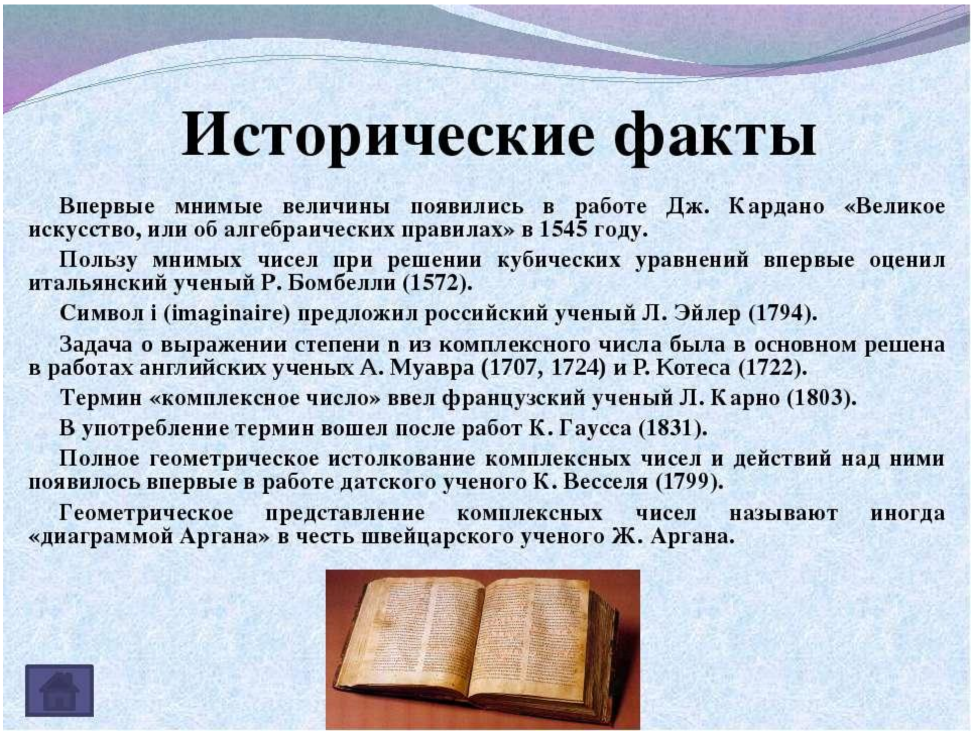


Рисунок Б2 – Исторические факты

Приложение В

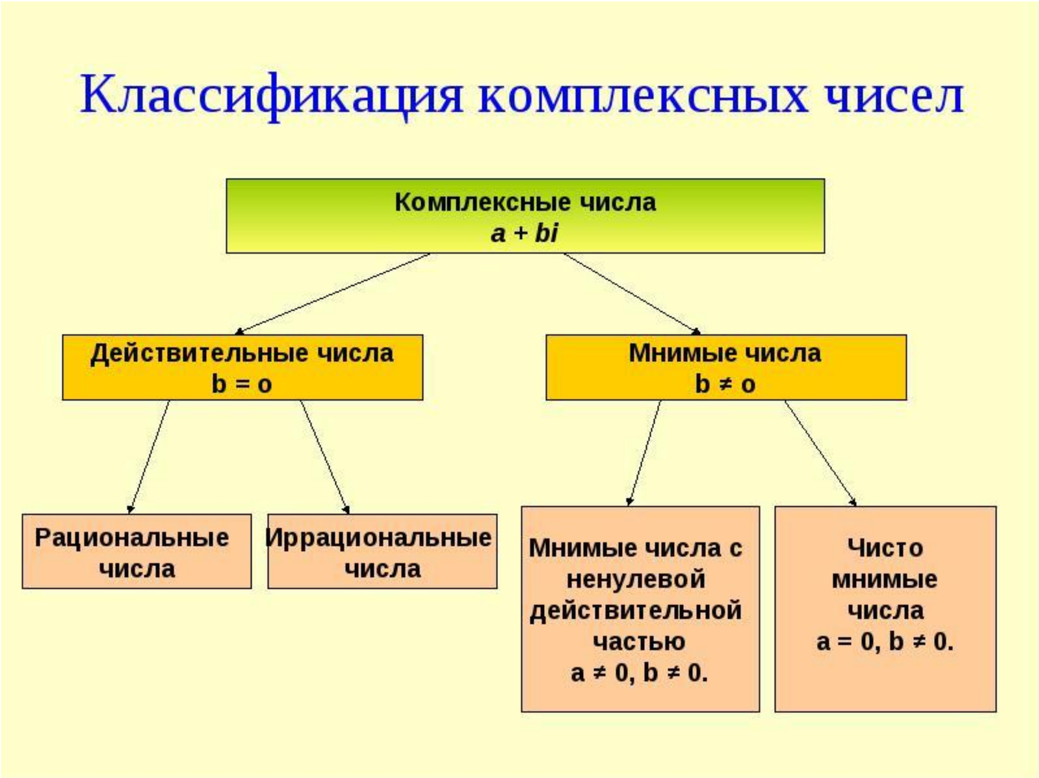


Рисунок В1 – Классификация комплексных чисел

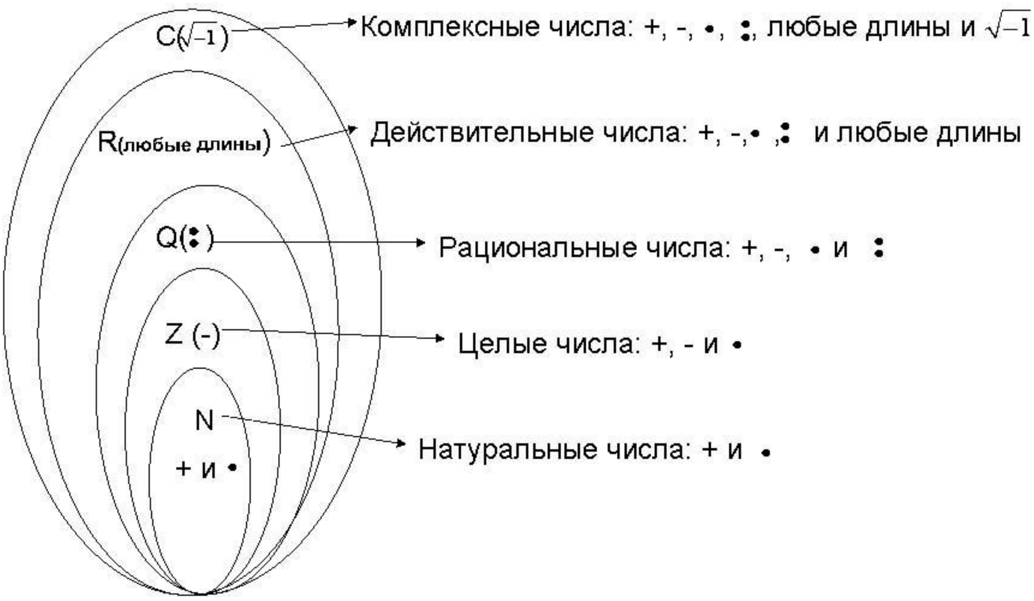


Рисунок В2 – Круговая диаграмма чисел

Приложение Г

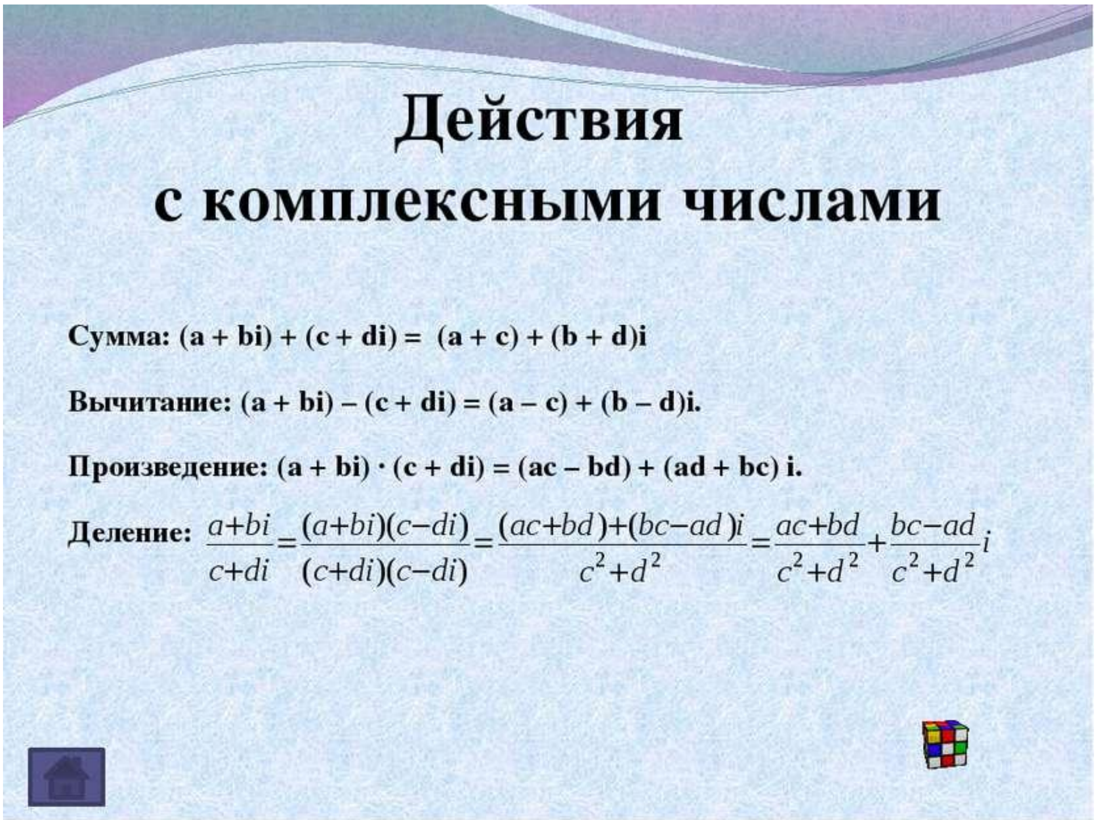


Рисунок Г1 –Правила действий в алгебраической форме

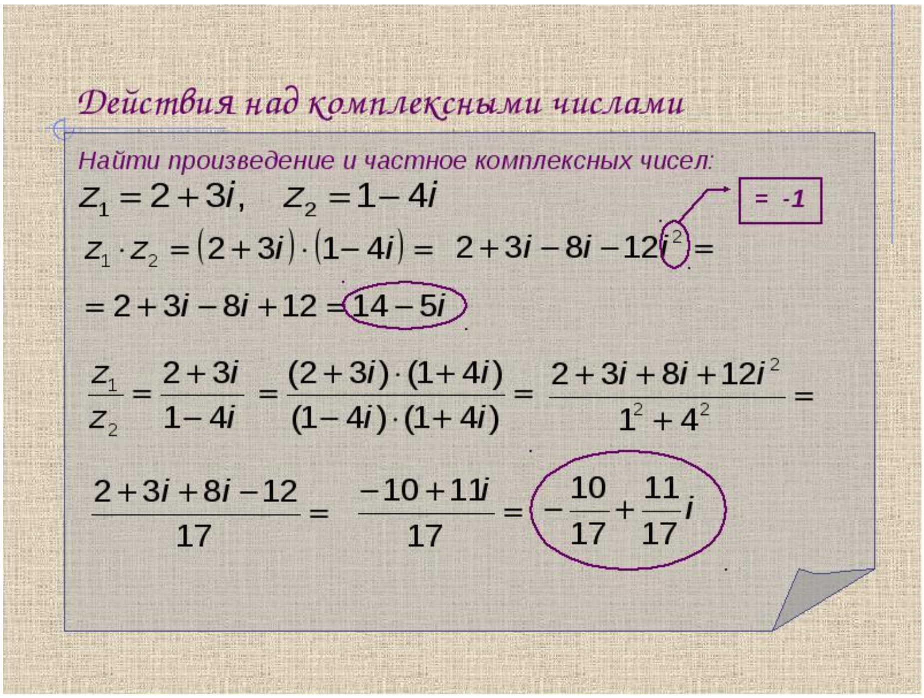


Рисунок Г2 –

Умножение и деление по правилам в алгебраической форме

Приложение Д

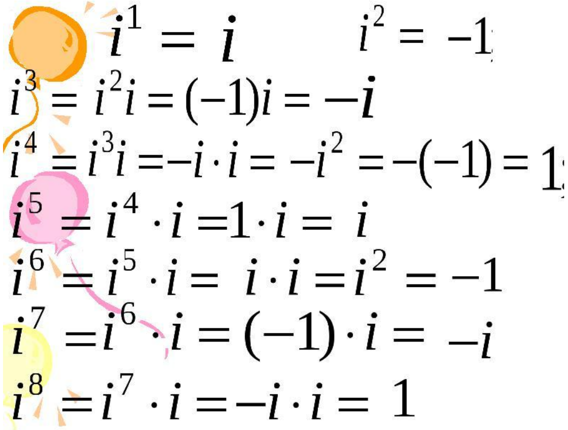


Рисунок Д1 – Степени мнимой единицы

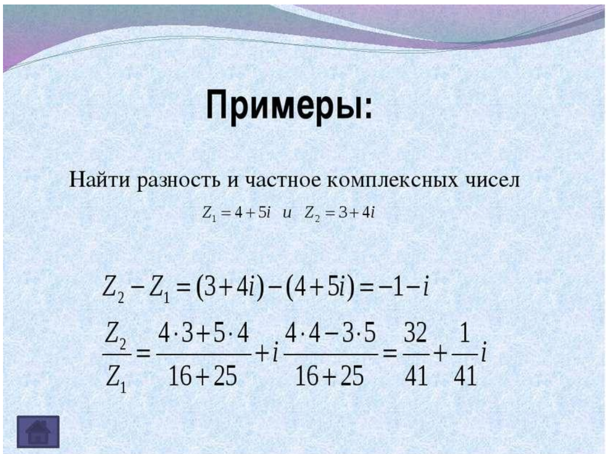


Рисунок Д2 – Вычитание и деление по правилам в алгебраической форме

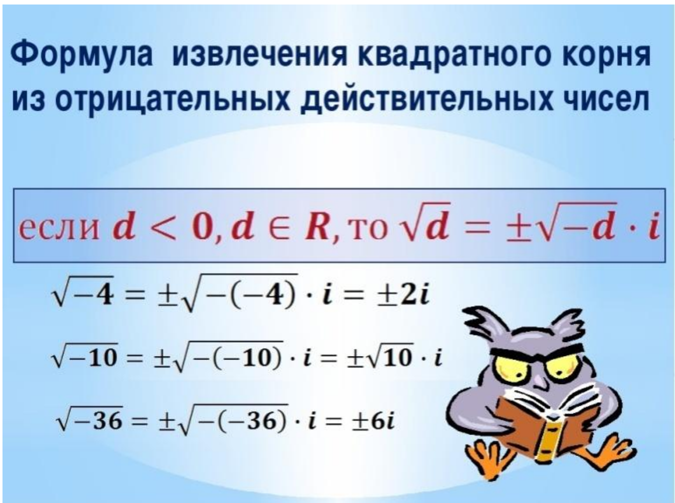


Рисунок Д3 – Извлечение корня квадратного из отрицательных чисел

Приложение Е

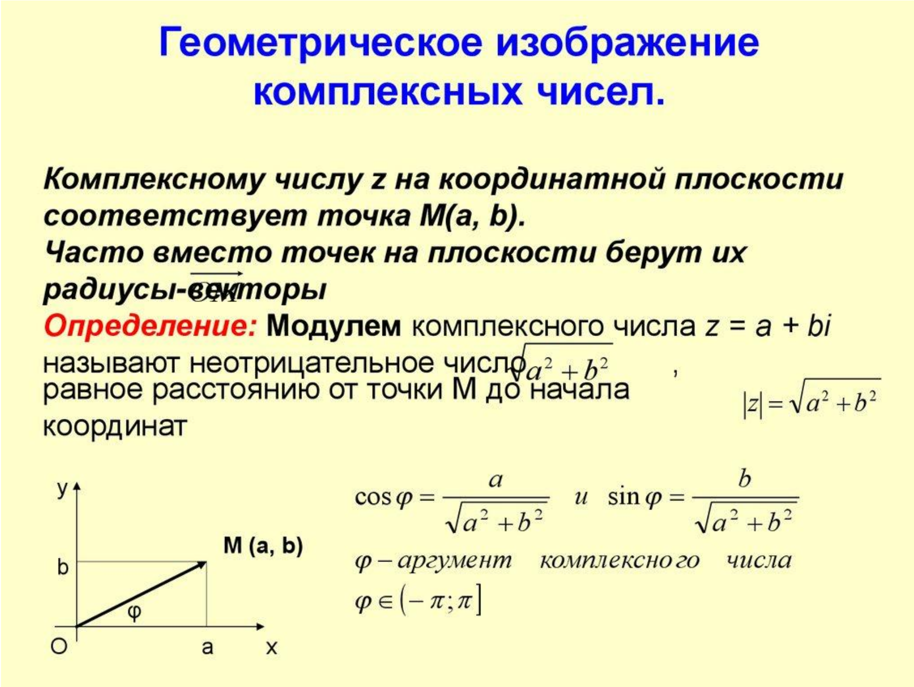


Рисунок Е1 – Геометрическое изображение комплексного числа

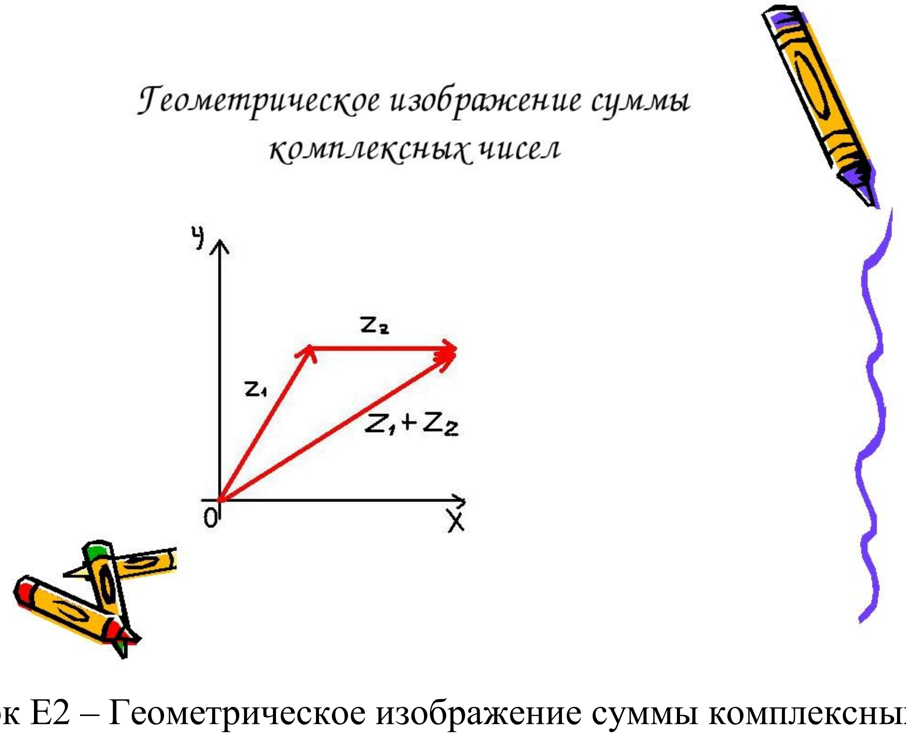
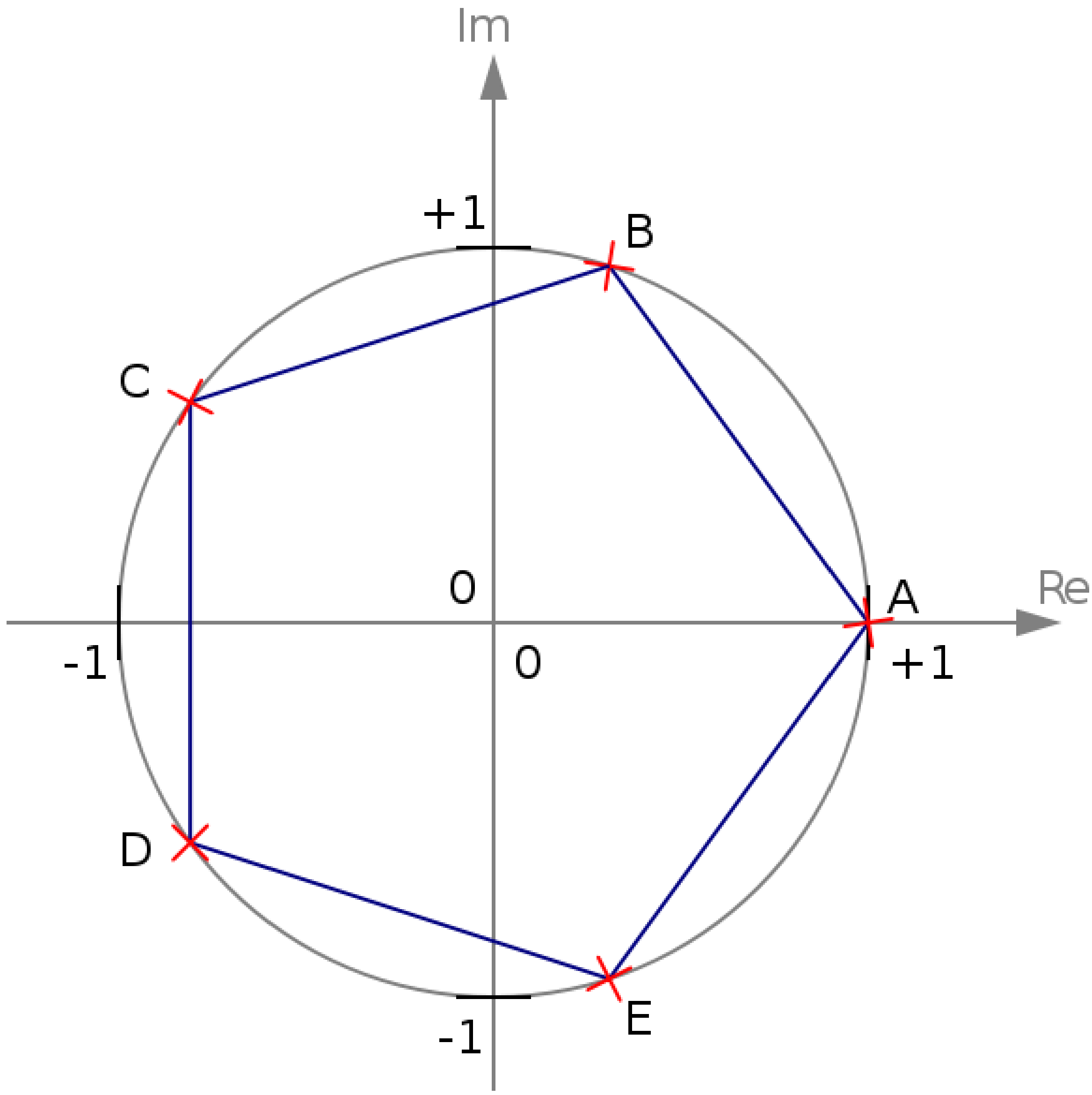


Рисунок Е2 – Геометрическое изображение суммы комплексных чисел

Приложение Ж



$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Рисунок Ж1 - Геометрическое изображение корней из комплексного числа

Приложение З

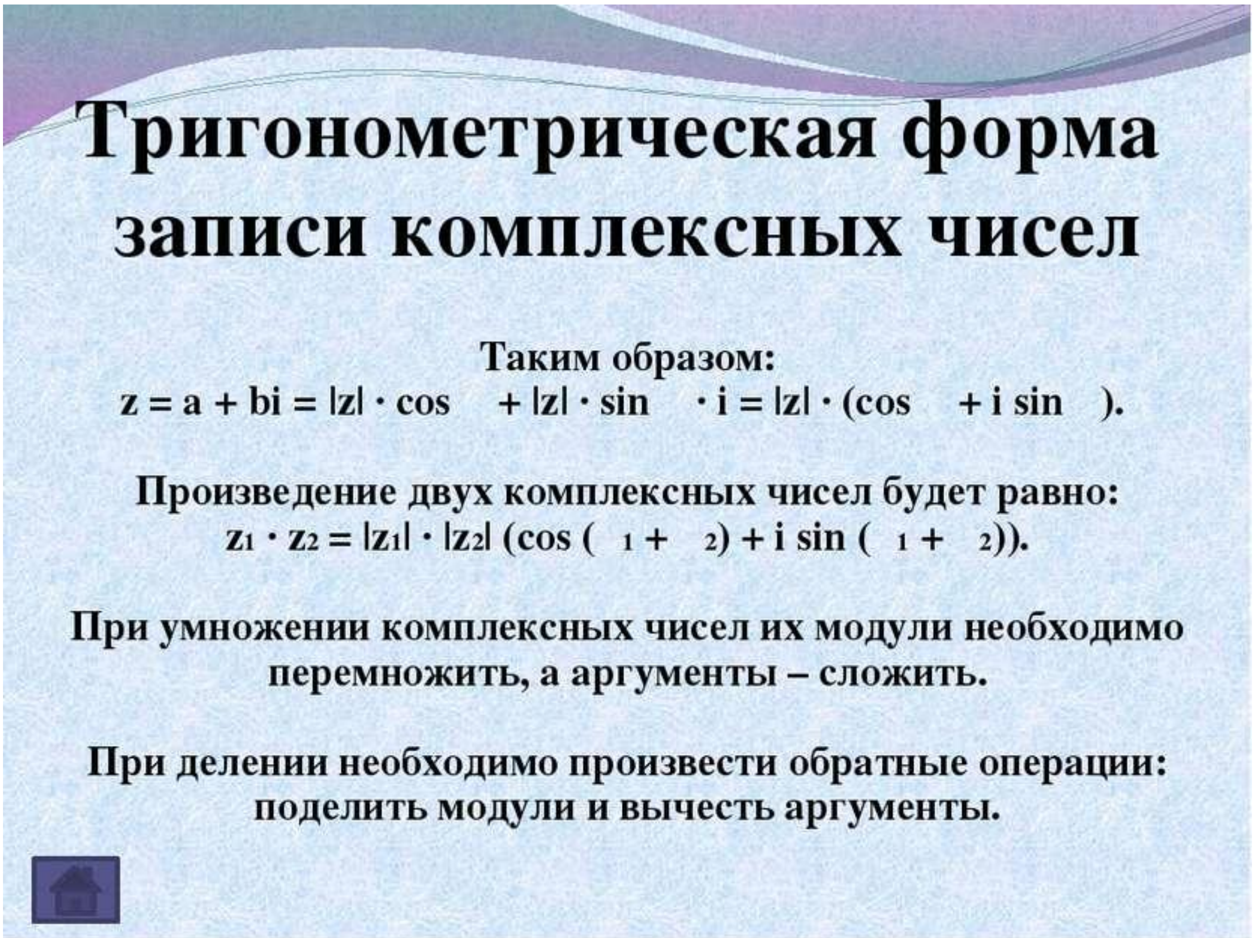


Рисунок З1 – Тригонометрическая форма записи комплексного числа

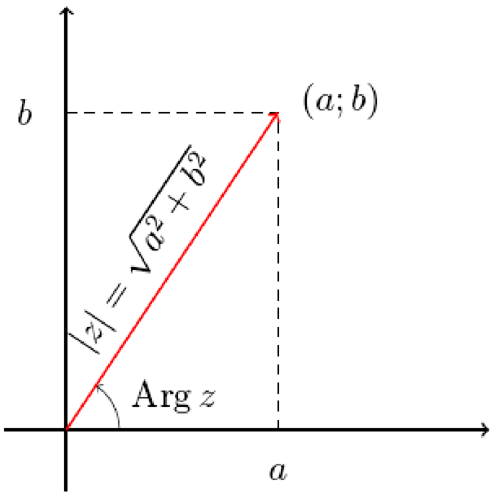


Рисунок З2 –Изображение модуля и аргумента комплексного числа

Приложение И

Рисунок И1- Комплексные числа в электротехнике и связи

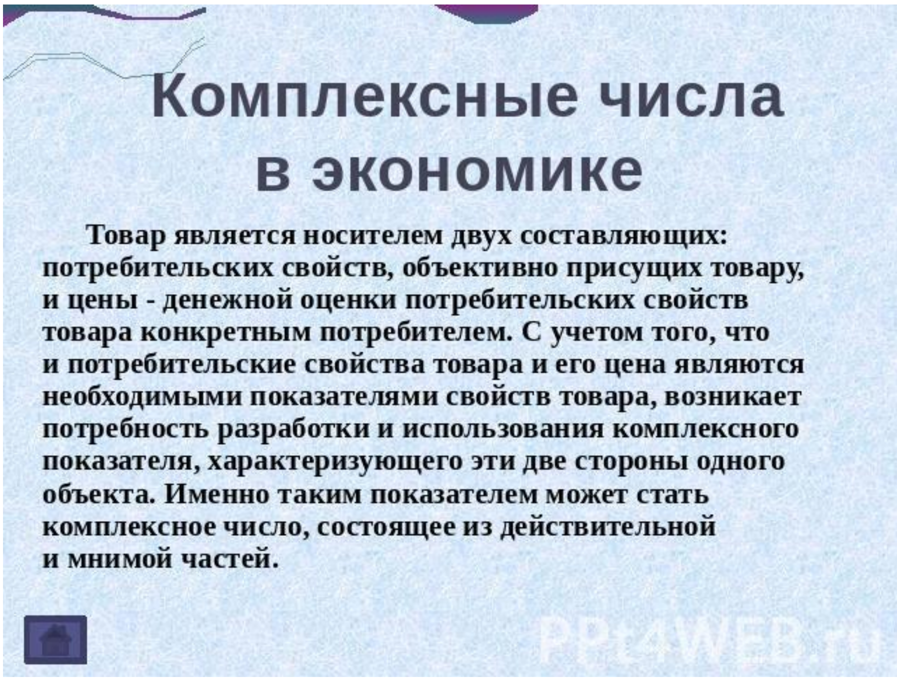


Рисунок И2- Комплексные числа в экономике

Приложение К

Рисунок К1- Комплексные числа в конструировании

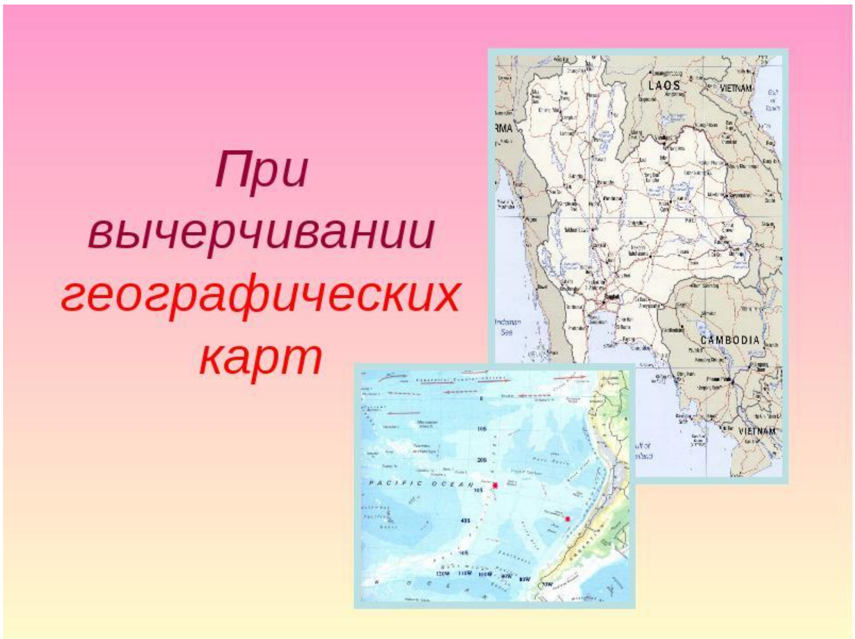


Рисунок К2- Комплексные числа в картографии

Приложение Л

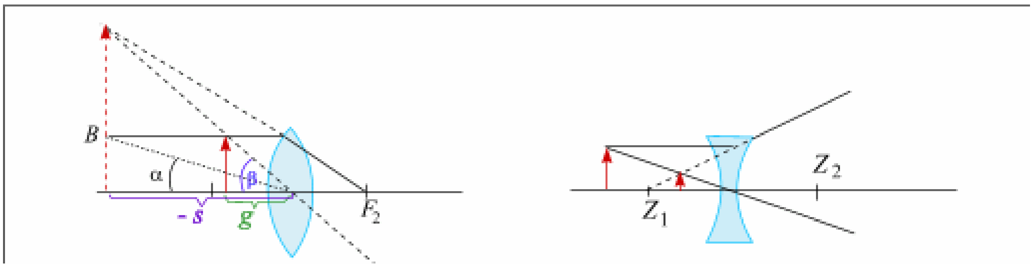


Рисунок Л1- Комплексные числа в оптике

Рисунок Л2- Комплексные числа в калькуляторе

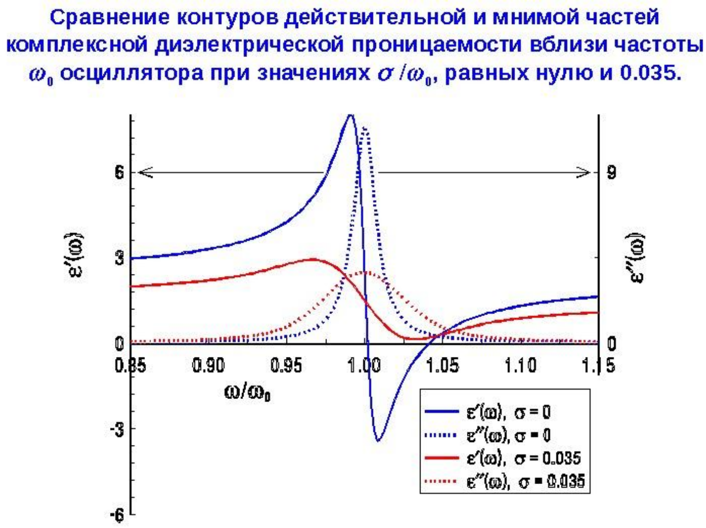


Рисунок Л3- Комплексные числа в электрическом контуре