МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПЕРВЫХ КУРСОВ
ЛЮБЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

Братск, 2020

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«_____»_____________2020 г. ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2020 г. №_____

Содержание

Введение ... 3
1 Справочный материал ... 6
2 Нахождение элементов, площадей поверхностей и объемов геометрических фигур ... 15
3 Вопросы для самоконтроля ... 52
4 Задачи для самостоятельного решения ... 54
5 Тестовые задания ... 63
Заключение ... 65
Список использованных источников ... 66
Приложение А ... 67
Приложение Б ... 68
Приложение В ... 69
Приложение Г ... 70
Приложение Д ... 71
Приложение Е ... 72
Приложение Ж ... 73
Приложение З ... 74
Приложение И ... 75
Приложение К ... 76
Приложение Л ... 77
Приложение М ... 78
Приложение Н ... 79
Приложение О ... 80
Приложение П ... 81
Приложение Р ... 82
Приложение С ... 83
Приложение Т ... 84
Приложение У ... 85
Приложение Ф ... 86
Приложение Х ... 87
Приложение Ц ... 88
Приложение Ч ... 89
Приложение Ш ... 90
Приложение Щ ... 91
Приложение Э ... 92
Приложение Ю ... 93
Приложение Я ... 94

Введение

Геометрия - одна из древнейших отраслей математики. Геометрические тела были известны задолго до того, как были выведены математические принципы. Геометрия - это математическое исследование точек, линий, плоскостей, замкнутых плоских фигур и твердых тел. Используя это, можно описать или построить каждый видимый и невидимый предмет.

Геометрия происходит от слова "geo" - земля, "metria" - мера. Геометрия возникла как область знаний, занимающаяся пространственными отношениями. Геометрия одна из двух областей математики, вторая - арифметика, или алгебра.

Возникновение геометрии вызвано потребностью человека измерять землю. Таким образом, первые геометры были преимущественно землемерами. На заре своего развития, несколько тысяч лет тому назад, геометрия Египта и Вавилона состояла из отделенных правил, полученных опытным путем и предназначавшихся главным образом для вычисления площадей и границ земельных участков.

В последующие века в связи с развитием торговли и ремесел развивается и геометрия, содержание которой значительно усложняется. Перед геометрией возникли новые задачи, связанные с измерением емкости сосудов, вычислением объектов различных тел, вообще задачи, связанные с формой, размерами и взаимным расположением различных предметов.

Большая роль в дальнейшем развитии геометрии принадлежит древнегреческим учёным (Фалес, Демокрит, Евдокс, Пифагор, Евклид и др.), которые в значительной степени развили геометрическое учение египтян и наконец в III веке до н. э, придали ей современную форму и содержание. Особенно большая роль в истории развития геометрии принадлежит древнегреческому ученому Евклиду, который в III веке до н.э, обобщил и собрал воедино разрозненные геометрическими сведения своих современников и предшественников, дополнив их своими собственными исследованиями, и дал их систематическое изложение в своих тринадцати геометрических книгах, известных под общим названием «Начала».

«Начала» Евклида является первой удачной попыткой научного построения геометрии. Насколько большой авторитет имели и имеют теперь «Начала» Евклида, видно из того, что вся последующая учебная литературная по элементарной геометрии или дословно копирует Евклида, или написана под большим его влиянием.

Считается, что геометрия впервые стала важной, когда Египетский фараон хотел обложить налогом фермеров, которые выращивали урожай вдоль реки Нил. Чтобы вычислить правильную сумму налога, люди фараона должны были измерить количество обрабатываемой земли.

Около 2900-2900 лет до нашей эры была построена первая египетская пирамида. Знание геометрии было необходимо для построения пирамид, которые состояли из квадратного основания и треугольных граней. Самая ранняя запись формулы для вычисления площади треугольника датируется 20002000 годом до нашей эры. Египтяне и вавилоняне разработали практическую геометрию для решения повседневных проблем, но нет никаких доказательств того, что они логически выводили геометрические факты из основных принципов.

Именно греки 600 – 400 лет до нашей эры разработали принципы современной геометрии. Фалес Милетский изучил подобные треугольники и написал доказательство того, что соответствующие стороны подобных треугольников пропорциональны.

Следующим считается Пифагор (569 - 475 лет до н.э.). Пифагор был первым математиком, логически выводящим геометрические факты из основных принципов. Пифагор основал братство под названием "пифагорейцы", которые преследовали знания в математике, науке и философии. Некоторые люди считают пифагорейскую школу местом рождения разума и логической мысли. Наиболее известным и полезным вкладом пифагорейцев была теорема Пифагора. Теория гласит, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы.

Евклид Александрийский (325−265 лет до н. э.) считается “отцом современной геометрии”. Евклид ввел математическую строгость и аксиоматический метод, все еще используемый сегодня. Его книга “Начало”, написанная около 300 лет до нашей эры, считается самым влиятельным учебником всех времен и народов. Книга "Начало" была известна всем образованным людям на западе до середины 20-го века. Евклид изобрел 2323 определения, 55 постулатов и 55 аксиом.

Аксиома - это утверждение, которое принимается без доказательств. Как только он доказал свое первое утверждение, на его основе он доказал второе, затем третье и т. д. Этот процесс известен как аксиоматический подход. Элементы Евклида составляют основу современной геометрии, которая преподается сегодня в школах, колледжах и университетах.

До появления Рене Декарта (1596−1650) в геометрии не было крупных изменений. Декарт объединил алгебру и геометрию для создания аналитической геометрии. Аналитическая геометрия, также известная как координатная геометрия, включает размещение геометрической фигуры в системе координат для иллюстрации доказательств и получения информации с использованием алгебраических уравнений.

Следующее большое развитие в геометрии пришло с развитием неевклидовой геометрии. Карл Фридрих Гаусс (1777−1855) изобрел неевклидову геометрию, не основанную на постулатах Евклида. Параллельный постулат гласит, что через заданную точку на прямой есть одна и только одна прямая, параллельная этой линии. Неевклидова геометрия задала математическую основу для теории относительности Эйнштейна.

1 Справочный материал

1.1 Куб

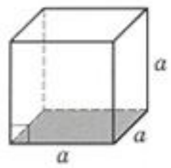


Рисунок 1 - Изображение куба

Диагональ куба вычисляется по формуле

$$d = a\sqrt{3}\,, \qquad (1)$$

где a - ребро куба.

Площадь боковой поверхности куба вычисляется по формуле

$$S_{бок} = 4a^2, \qquad (2)$$

Площадь полной поверхности куба вычисляется по формуле

$$S_{полн} = 6a^2, \qquad (3)$$

Объем куба вычисляется по формуле

$$V = a^3. \qquad (4)$$

1.2 Прямоугольный параллелепипед

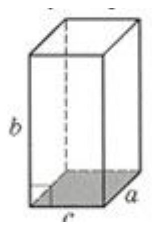


Рисунок 2 - Изображение прямоугольного параллелепипеда

Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$S_{бок} = 2(ac + bc), \qquad (5)$$

где a, b, c - измерения параллелепипеда.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$S_{полн} = 2(ac + bc + ab), \quad (6)$$

Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$V = abc. \quad (7)$$

1.3 Правильная треугольная призма

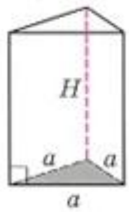


Рисунок 3 - Изображение правильной треугольной призмы

Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы находится по формуле

$$S_{бок} = 3aH, \quad (8)$$

где a - сторона основания, H – высота.

Площадь полной поверхности правильной треугольной призмы находится по формуле

$$S_{полн} = \frac{a}{2}(a\sqrt{3} + 6H), \quad (9)$$

Объем правильной треугольной призмы находится по формуле

$$V = \frac{a^2}{4} H\sqrt{3}. \quad (10)$$

1.4 Правильная шестиугольная призма

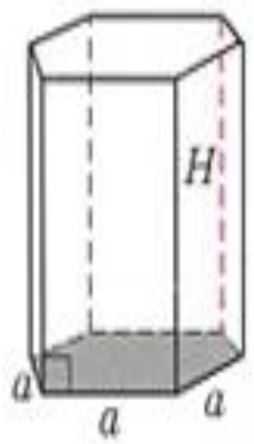


Рисунок 4 - Изображение правильной шестиугольной призмы

Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы находится по формуле

$$S_{бок} = 6aH, \tag{11}$$

где a - сторона основания, H – высота

Площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$S_{полн} = 3a\,(a\sqrt{3} + 2H), \tag{12}$$

Объем правильной шестиугольной призмы прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

$$V = \frac{3a^2}{2}\,\mathrm{H}\sqrt{3}. \tag{13}$$

1.5 Правильный тетраэдр

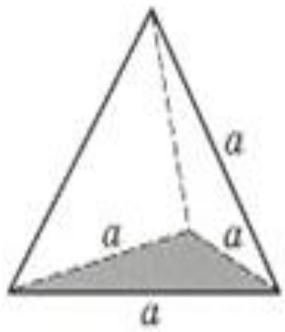


Рисунок 5 - Изображение правильного тетраэдра

Площадь боковой поверхности правильного тетраэдра находится по формуле

$$S_{бок} = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}, \qquad (14)$$

где a - ребро тетраэдра,

Площадь полной поверхности правильного тетраэдра находится по формуле

$$S_{полн} = a^2\sqrt{3}, \qquad (15)$$

Объем правильного тетраэдра находится по формуле

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}. \qquad (16)$$

1.6 Правильная треугольная пирамида

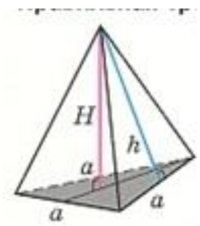


Рисунок 6 - Изображение правильной треугольной пирамиды

a - сторона основания,
h - апофема,
H - высота,

Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{бок} = \frac{3}{2}ah, \qquad (17)$$

где a - сторона основания, h – апофема, H – высота.

Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{полн} = \frac{a}{4}(a\sqrt{3} + 6h), \qquad (18)$$

Объем правильной треугольной пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{a^3 H}{4\sqrt{3}}. \quad (19)$$

1.7 Правильная четырехугольная пирамида

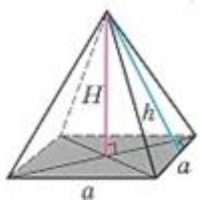


Рисунок 7 - Изображение правильной четырехугольной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{бок} = 2ah, \quad (20)$$

где a - сторона основания, h – апофема, H – высота.

Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{полн} = a(a + 2h), \quad (21)$$

Объем правильной четырехугольной пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{a^2 H}{3}. \quad (22)$$

1.8 Правильная шестиугольная пирамида

Рисунок 8 - Изображение правильной шестиугольной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{бок} = 3ah, \quad (23)$$

где a - сторона основания, h – апофема, H – высота.

Площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды находится по формуле

$$S_{полн} = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2h), \quad (24)$$

Объем правильной шестиугольной пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{a^2 H\sqrt{3}}{2}. \quad (25)$$

Чертежи усеченных пирамид показаны в приложениях

1.9 Цилиндр

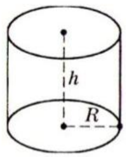


Рисунок 9 - Изображение цилиндра

Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле

$$S_{бок} = 2\pi Rh, \quad (26)$$

где R - радиус основания, h – высота.

Площадь полной поверхности цилиндра находится по формуле

$$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh, \quad (27)$$

Объем цилиндра находится по формуле

$$V = \pi R^2 h. \quad (28)$$

1.10 Конус

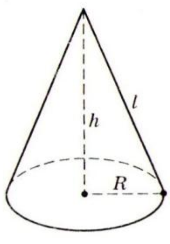


Рисунок 10 - Изображение конуса

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле

$$S_{бок} = \pi Rl, \quad (29)$$

где R - радиус основания, h - высота, l - образующая,
Площадь полной поверхности конуса находится по формуле

$$S_{полн} = \pi R(R + l), \quad (30)$$

Объем конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h. \quad (31)$$

1.11 Усеченный конус

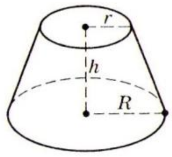


Рисунок 11 - Изображение усеченного конуса

Площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле

$$S_{бок} = \pi l(R + r), \quad (32)$$

где R - радиус нижнего основания, r - радиус верхнего основания, h - высота, l - образующая,
Площадь полной поверхности усеченного конуса находится по формуле

$$S_{полн} = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2), \quad (33)$$

Объем усеченного конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2). \quad (34)$$

1.12 Сфера, шар

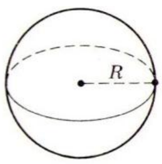


Рисунок 12 - Изображение сферы, шара

Площадь поверхности сферы находится по формуле

$$S_{сферы} = 4\pi R^2 = \pi d^2, \qquad (35)$$

где R - радиус сферы(шара), d - диаметр сферы (шара),

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad (36)$$

1.13 Шаровой сектор

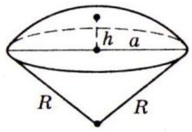


Рисунок 13 - Изображение шарового сектора

$$S = \pi R(2h + a), \qquad (37)$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \qquad (38)$$

1.14 Шаровой сегмент

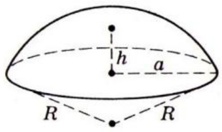


Рисунок 14 - Изображение шарового сегмента

$$a^2 = h(2R - h), \qquad (39)$$

$$S_{бок} = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2), \qquad (40)$$

$$S_{полн} = \pi(2Rh + a^2) = \pi(2rh + 2a^2), \qquad (41)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(R - \frac{h}{3}). \qquad (42)$$

1.15 Шаровой слой

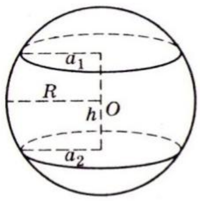


Рисунок 15 - Изображение шарового слоя

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi({a_1}^2 + {a_2}^2)h \quad (43)$$

Замечание 1.

Для любой призмы и цилиндра

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} \quad (44)$$

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot H \quad (45)$$

$$V = S_{осн} \cdot H \quad (46)$$

Для любой полной пирамиды и конуса

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} \quad (47)$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_{бок} \quad (48)$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \quad (49)$$

Для любой усеченной пирамиды

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{верх.осн} + S_{нижн.\ осн}, \quad (50)$$

$$V_{ус,\ пир.} = \frac{1}{3} \cdot H(S_{верх.осн} + S_{нижн.осн.} + \sqrt{S_{верх.осн} \cdot S_{нижн.осн.}}) \quad (51)$$

Для любого усеченного конуса

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{верх.осн} + S_{нижн.\ осн}, \quad (50)$$

$$V_{ус,конр.} = \frac{1}{3} \cdot H(S_{верх.осн} + S_{нижн.осн.} + S_{верх.осн} \cdot S_{нижн.осн.}), \quad (52)$$

где

H - высота;

$h_{бок}$ - апофема пирамиды, образующая конуса;

$P_{осн}$ - периметр основания;

$S_{осн}$ - площадь основания;

$S_{полн}$ - площадь полной поверхности;

$S_{бок}$ - площадь боковой поверхности;

$S_{верх.осн}$ - площадь верхнего основания;

$S_{нижн.\ осн}$ - площадь нижнего основания;

V - объем.

2 Нахождение элементов, площадей поверхностей и объемов геометрических фигур

2.1 Многогранники

Задача 1.

Ребро куба равно 4. Найдите длину диагонали грани, длину диагонали куба, площадь поверхности, объем, площадь сечения.

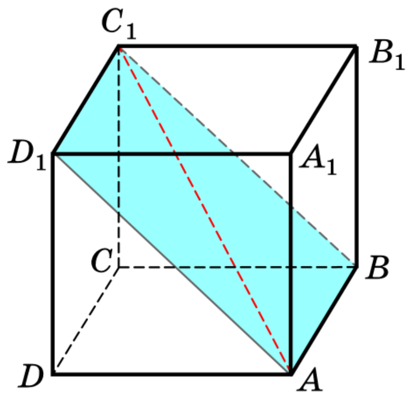


Рисунок 16 - Изображение куба с диагональным сечением

Решение.

1) Длину диагонали грани найдем, используя теорему Пифагора:
$AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2 = 4^2 + 4^2 = 32$,
тогда $AB_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

2) Длину диагонали куба найдем, используя формулу (1):
$d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

3) Площадь поверхности куба найдем, используя формулу (3):
$S_{полн} = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96$.

4) Объем куба найдем, используя формулу (4)
$V = a^3 = 4^3 = 64$.

5) Сечение ABC_1D_1 является прямоугольником, поэтому
$S_{сеч} = AB \cdot AD_1 = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2};\ 4\sqrt{3};\ 96;\ 64;\ 16\sqrt{2}$.

Задача 2.

Найдите угол α между диагональю грани и диагональю куба.

Решение.

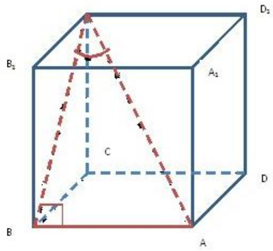


Рисунок 17 - Изображение угла α между диагональю грани и диагональю куба

Треугольник ABC_1 - прямоугольный.

$\sin \alpha = \frac{AB}{AC1} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Тогда $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 3.

Через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины, проведено сечение. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно 4.

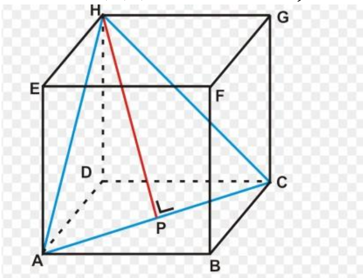


Рисунок 18 - Изображение сечения, проведенного через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины

Решение. В сечении получается равносторонний треугольник ACH.

Площадь равностороннего треугольника со стороной a находится по формуле

$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Подставляя в эту формулу $a = 4$, получаем

$S = \frac{4^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 4.

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 12. Найдите длину диагонали b.

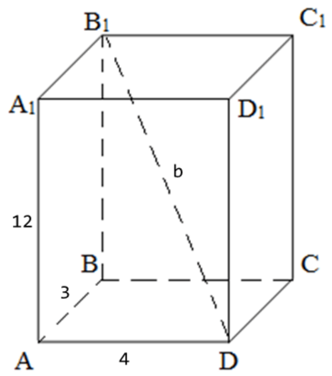


Рисунок 19 - Изображение измерений прямоугольного параллелепипеда

Решение. Квадрат диагонали параллелепипеда найдем по формуле $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Тогда $b^2 = 4^2 + 3^2 + 12^2 = 16 + 9 + 144 = 169$, $b = 13$.

Ответ:13.

Задача 5.

Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 5:3:4, диагональ параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$. Найдите углы наклона диагонали к основанию и боковому ребру, площадь поверхности и объем параллелепипеда.

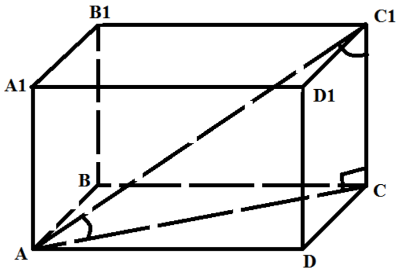


Рисунок 20 - Изображение углов наклона диагонали к основанию и боковому ребру прямоугольного параллелепипеда

Решение.

Для нахождения перечисленных параметров необходимо найти измерения параллелепипеда.

Обозначим за x коэффициент пропорции, тогда $AD = a = 5x$, $DC = b = 3x$, $CC_1 = c = 4x$. По условию $AC_1 = 10\sqrt{2}$.

$AC_1^2 = (5x)^2 + (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow 200 = 25x^2 + 9x^2 + 16x^2 \Rightarrow 50x^2 = 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$ и $AD = a = 10$, $DC = b = 6$, $CC_1 = c = 8$.

Находим диагональ основания AC:

По теореме Пифагора

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 10^2 + 6^2 \Rightarrow AC^2 = 136 \Rightarrow AC = \sqrt{136}$.

В прямоугольном треугольнике ACC_1

$\sin\angle A = \frac{CC1}{AC1} = \frac{8}{10\sqrt{2}} \approx 0,56587$, arcsin 0,5687 =

$\sin\angle C_1 = \frac{\mathbf{AC}}{AC1} = \frac{\sqrt{136}}{10\sqrt{2}} = \approx 0,8246$, arcsin 0,8246 =

Площадь поверхности параллелепипеда найдем по формуле (6)

$S_{полн} = 2(ac + bc + \ )$:

$S_{полн} = 2(10\cdot8 + 6\cdot8 + 10\cdot6) = 376$ кв.ед. .

Объем параллелепипеда найдем по формуле (7)

$V = abc$:

$V = 10\cdot8\cdot6 = 480$ куб. ед.

Ответ: 480 куб. ед.

Задача 6.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ , а с одной из боковых граней - угол α . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

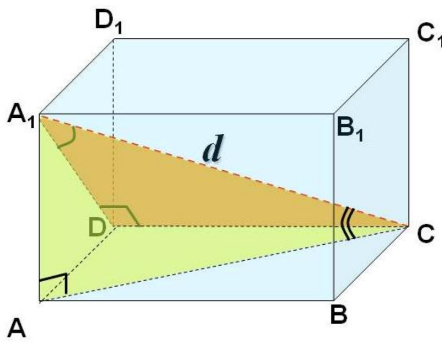


Рисунок 21 - Изображение углов наклона диагонали прямоугольного параллелепипеда к плоскости основания и к плоскости боковой грани

Решение.

Для нахождения площади боковой поверхности параллелепипеда используем формулу (5):

$S_{бок} = 2(ac + bc)$

Найдем измерения параллелепипеда.

В треугольнике A_1 AC

$\sin\angle C = \frac{AA1}{A1C} \Rightarrow AA_1 = A_1C \cdot \sin\varphi = d\cdot \sin\varphi$,

т.е. $c = d\cdot \sin\varphi$;

$\cos\angle C = \frac{\mathbf{AC}}{A1C} \Rightarrow AC = A_1C\cdot \cos\varphi$, т.е. $b = d\cdot \cos\varphi$

В треугольнике A_1 DC

$\sin\angle A_1 = \frac{DC}{A1C} \Rightarrow DC = A_1C \cdot \sin\alpha = d\cdot \sin\alpha$,

т.е. $a = d\cdot \sin\alpha$.

$S_{бок} = 2(d\cdot \sin\alpha\cdot d\cdot \sin\varphi + d\cdot \cos\varphi \cdot d\cdot \sin\varphi) = 2d^2 \sin\varphi(\sin\alpha + \cos\varphi)$.

Ответ: $S_{бок} = 2d^2 \sin\varphi(\sin\alpha + \cos\varphi)$.

Задача 7.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна **6** и составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани и угол 45° с плоскостью основания.

1. Объясните, как построить угол в 30° между диагональю параллелепипеда и плоскостью боковой грани.

2. Объясните, как построить угол в 45° между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

3. Найдите длины отрезков AB, AD_1 , DD_1.

4. Составьте план вычисления длины отрезка AD и объема параллелепипеда.

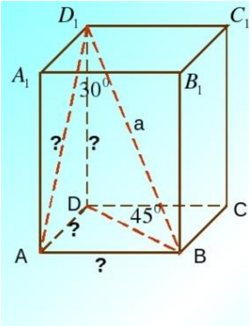


Рисунок 22 - Чертеж к задаче 7

Задача 8.

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

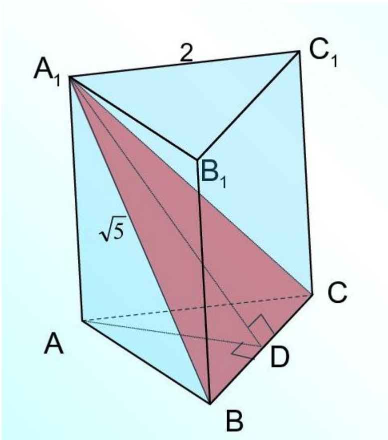


Рисунок 23 - Чертеж к задаче 8

Решение. Найдем длины отрезков AA_1 и A_1D.

В прямоугольном треугольнике A_1AB по теореме Пифагора

$A_1A^2 = A_1B^2 - AB^2 \Rightarrow A_1A^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow A_1A = 1.$

В прямоугольном треугольнике A_1DB по теореме Пифагора

$A_1D^2 = A_1B^2 - DB^2 \Rightarrow A_1A^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow A_1D = 2$

В прямоугольном треугольнике A_1AD

$\sin\angle D = \frac{AA1}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle D = 30°$.

Ответ: 30.°

Задача 9.

Найдите площадь полной поверхности и объем призмы, представленной на рисунке 24. Угол $C_1AC = 60°$.

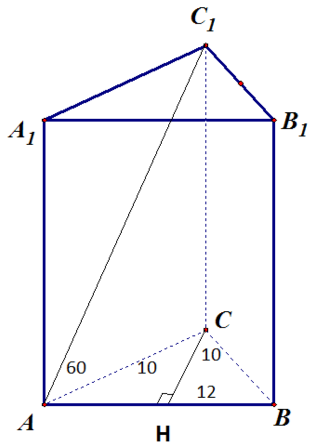


Рисунок 24 - Чертеж к задаче 9

Решение.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.(44)

$S_{осн} = \frac{1}{2}$ AB · CH.

CH = $\sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$S_{осн} = \frac{1}{2}$ AB · CH = $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$

$P_{осн} = 10+10+12 = 32$.

Высоту призмы H найдем из соотношений в прямоугольном треугольнике C_1CA:

$\text{tg } 60° = \frac{CC1}{AC} \Rightarrow CC_1 = AC \cdot \text{tg } 60° = 10\sqrt{3}$.

$S_{бок} = 32 \cdot 10\sqrt{3} = 320\sqrt{3}$.

Тогда $S_{полн} = 320\sqrt{3} + 2 \cdot 48 = 320\sqrt{3} + 96$.

Ответ: $320\sqrt{3} + 96$.

Задача 10.

В правильной треугольной призме диагональ боковой грани образует со стороной основания угол в 30° и равна 4 см. Найдите объем призмы.

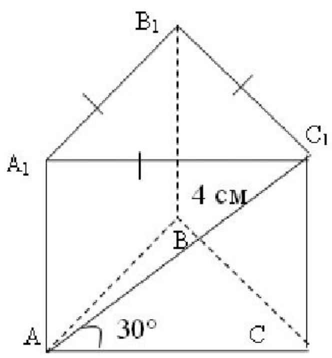


Рисунок 25 - Чертеж к задаче 10

Решение. $V = \frac{a^2}{4} H\sqrt{3}$ (формула 10).

H = CC_1 = 2см как катет, лежащий против угла в 30°.

Найдем сторону основания AC = a по теореме Пифагора:

AC = = $\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$см.

Тогда $V = \frac{(2\sqrt{3})^2}{4}\ 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$см^3.

Ответ: $6\sqrt{3}$см^3.

Задача 11.

Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

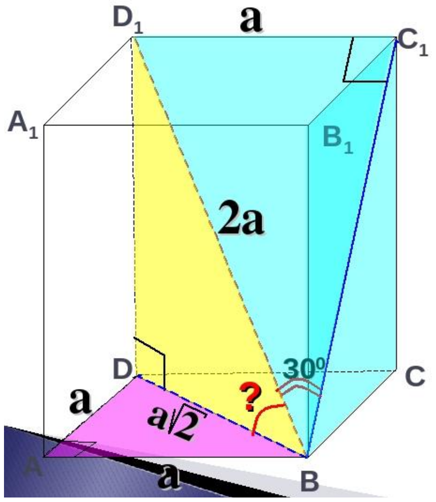


Рисунок 26 - Чертеж к задаче 11

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник D_1DB:

$\cos \angle B = \frac{DB}{BD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle B = 45°$.

Обратите внимание, что величина ∠B не зависит от величины ребра a!

Ответ: 45°.

Задача 12.

Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 и образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите сторону основания призмы, площадь боковой поверхности призмы, площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания призмы параллельно диагонали призмы.

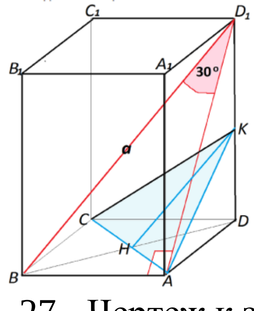


Рисунок 27 - Чертеж к задаче 12

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольнике D_1AB:

Сторона основания a = AB = $\frac{1}{2}$ BD_1 = 3.

Используя решение задачи 11, утверждаем, что в прямоугольном треугольнике D_1DB $\angle B = 45°$, поэтому этот треугольник равнобедренный и $D_1D = DB = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной 3).

Тогда высота призмы H = c = $D_1D = 3\sqrt{2}$.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot H = 3 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} = = 36\sqrt{2}$.

$S_{сеч} = S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2}$ AC · KH.

$AC = DB = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

KH = = $\frac{1}{2}$ D_1B как длина средней линии треугольника D_1DB

. Находим $D_1B = \sqrt{BD^2 + BD^2} = BD\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$.

Тогда KH = = $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 12 = 18\sqrt{2}$.

Ответ: 3; $36\sqrt{2}$; $18\sqrt{2}$.

Задача 13.

Основанием прямой призмы ABCD $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм ABCD со сторонами 4 см и 4√3 см и углом, равным 30 градусов. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол в 60 градусов. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

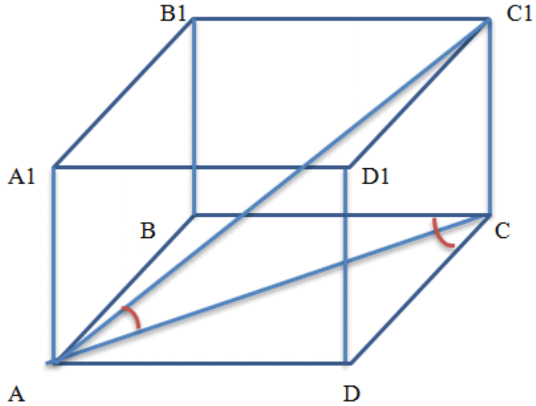


Рисунок 28 - Чертеж к задаче 13

Решение.

Поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна180°, то углы B и D. будут равны 180 - 30 = 150 градусов.

Диагональ параллелограмма AC, таким образом, образует треугольник ACD с углом C равным 150° .

Применим теорему косинусов, при этом обозначив диагональ параллелограмма как d, а стороны параллелограмма как a и b. Учтем, что равен cos 150° = - $\sqrt{3}$ / 2. Получаем:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos 150°.$$

$$d^2 = 16 + 48 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (- \sqrt{3} / 2) = 112.$$
$$d = 4\sqrt{7} \Rightarrow \ AC = \ 4\sqrt{7} \ .$$

Зная величину диагонали параллелограмма, найдем высоту параллелограмма.

Треугольник, который образует диагональ AC_1 (AC_1C) с основанием призмы, согласно условию задачи (призма - прямая) является прямоугольным. Угол $\angle C_1AC$ по условию равен 60°. Для прямоугольного треугольника тангенс угла $\angle C_1AC$ равен отношению противолежащего катета к прилежащему, то есть

$tg (\angle C_1AC) = C_1C / AC$.

Учтем, что $tg\ 60° = \sqrt{3}$.

Соответственно, $C_1C = AC \cdot tg (\angle C_1AC) = 4\sqrt{3} \cdot tg\ 60° = 4 \sqrt{21}$.

Зная высоту призмы, определим площадь ее боковой поверхности:

$S = 2ha + 2hb$,

$S = 2 \cdot 4\sqrt{21} \cdot 4 \sqrt{3} + 2 \cdot 4 \sqrt{21} \cdot 4 = 96\sqrt{7} + 16\sqrt{21} \approx 327{,}31.$

Ответ: $96\sqrt{7} + 16\sqrt{21} \approx 327{,}31$.

Задача 14.

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями , равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

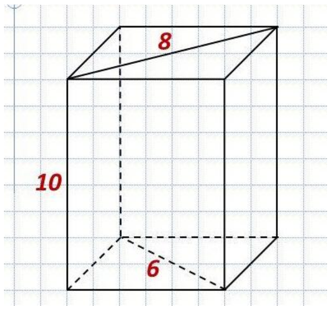


Рисунок 29 - Чертеж к задаче 14

Решение. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ (формула 44).

$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$.

Для нахождения периметра основания необходимо найти длину стороны ромба a.

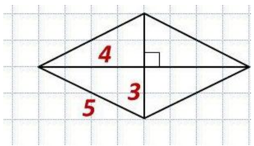


Рисунок 30 - Изображение основания призмы задачи 14

Так как диагонали ромба пресекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам, очевидно, что $a = 5$ (рисунок...).

Тогда $S_{бок} = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200$.

$S_{осн}$ найдем как площадь ромба с известными диагоналями;

$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$

$S_{полн} = 200 + 2 \cdot 24 = 248.$

Ответ: 248кв.ед.

Задача 15.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.

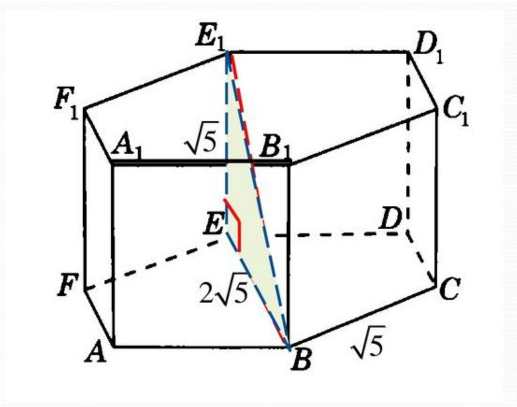


Рисунок 31 - Чертеж к задаче 15

Решение.

Так как кратчайшее расстояние измеряется по перпендикуляру, то BE_1 является гипотенузой прямоугольного треугольника:

$$BEE_1 \Rightarrow BE_1 = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5 + 100} = \sqrt{105} \approx 10{,}25.$$

Ответ: $\approx 10{,}25$.

Задача 16. Найти объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.

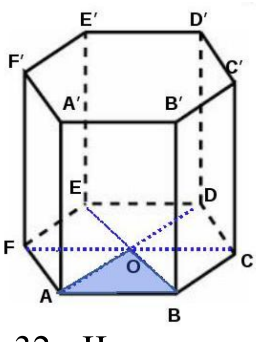


Рисунок 32 - Чертеж к задаче 16

Решение. $V = S_{осн} \cdot H$ (45).

$S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$

$V = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \frac{27}{2} = 13{,}5.$

Ответ: 13,5куб. ед.

Задача 17.

Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.

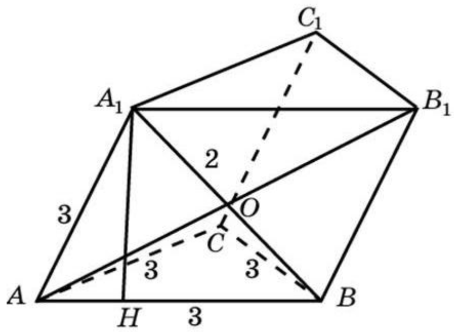


Рисунок 33 - Чертеж к задаче 17

Решение. проведем диагональ AB_1.

Имеем $AO = \sqrt{A_1A^2 - OA_1^{\,2}} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

В ромбе ABB_1A_1 высота A_1H является высотой призмы.

Находим A_1H, используя формулу площади ромба:

$AB \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \Rightarrow 3 \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} \Rightarrow A_1H = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

$V = S_{осн} \cdot H$ (формула 45).

$S_{осн} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$.

$V = \frac{9}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{6}$ куб. ед.

Ответ: $3\sqrt{6}$ куб. ед.

Задача 18.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой E_1F_1.

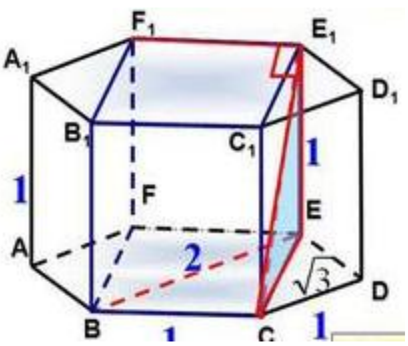


Рисунок 34 - Чертеж к задаче 18

Решение.

"Разрежем" призму таким образом, чтобы получился прямоугольный параллелепипед. Значит, E_1C - искомое расстояние. Найти его можно из прямоугольного треугольника CEE_1:

$$E_1C = \sqrt{CE^2 + EE_1^2}.$$

Найдем *CE* (рисунок 35):

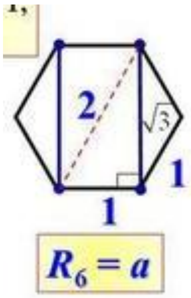


Рисунок 35 - Изображение основания призмы задачи 18

$CE = \sqrt{3}.$

$E_1C = \sqrt{3+1} = 2.$

Ответ:2.

Задача 19.

Дана правильная треугольная пирамида SABC, длина стороны основания равна 18, высота пирамиды равна 13. Найдите длину бокового ребра, площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

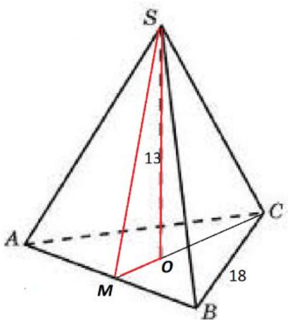


Рисунок 36 - Чертеж к задаче 19

Решение.

1. Длину бокового ребра, например, SC найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC:

$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2}.$$

$$OC = \frac{2}{3}CM.$$

$$CM = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{324-81} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}.$$

$$OC = \frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

SC = $\sqrt{169+108}$ = SC = $\sqrt{277}$ ≈16,64.

2. $S_{бок} = \frac{3}{2}a\,h$, (формула 17), где h = SM, a = 18.

Длину апофемы пирамиды SM найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOM:

SM = $\sqrt{SO^2 + OM^2}$.

OC = $\frac{1}{3}$ CM = $\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

SM = $\sqrt{169+27} = \sqrt{169+27} = \sqrt{196}$ = 14.

$S_{бок} = \frac{3}{2}\cdot 18\cdot 14 = 378$кв. ед.

3. Объем пирамиды найдем по формуле (47)$V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$:

$S_{осн} = \frac{18^2}{4}\sqrt{3} = = 81\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3}\,81\sqrt{3}\cdot 13 = 351\sqrt{3}$куб. ед.

Ответ: ≈16,64; 378кв. ед.; $351\sqrt{3}$куб. ед.

Задача 20.

Дана правильная треугольная пирамида SABC, апофема которой равна 12 и наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Найдите площадь поверхности пирамиды и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

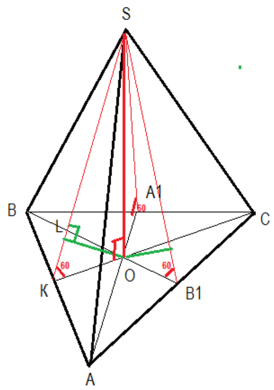


Рисунок 37 - Чертеж к задаче 20

Решение.

1. $S_{бок} = \frac{3}{2}a\,h$, (формула 17), где h = SK = 12, a = AB.

Найдем OK:

OK = $\frac{1}{2}$ SK = $\frac{1}{2}\cdot 12 = 6 \Rightarrow$ CK = 18 $\Rightarrow a = 12\sqrt{3}$.

$S_{бок} = \frac{3}{2}\cdot 12\sqrt{3}\cdot 12 = 216\sqrt{3}$ кв. ед.

2. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания найдем из прямоугольного треугольника SOC:

tg ∠ SCO = $\frac{SO}{CO}$,

CO = 2OK = 12,

$SO = SK \cdot \sin 60° = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$,

$\text{tg}\,\angle SCO = \frac{9\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \angle SCO = \text{arctg}\,\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $216\sqrt{3}$ кв. ед.; $\text{arctg}\,\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Задача 21.

Дан правильный тетраэдр, ребро которого равно 6. Найдите площадь полной поверхности и объем тетраэдра.

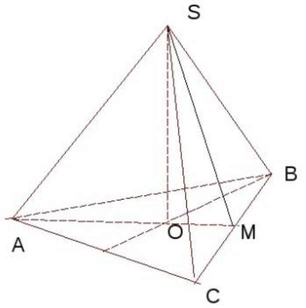


Рисунок 38 - Чертеж к задаче 21

Решение.

$S_{полн} = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{6^2}{4}\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

$S_{осн} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Высоту H = SO найдем из прямоугольного треугольника SOA:

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$.

$OA^2 = (\frac{2}{3} AM)^2 = (\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3})^2 = (\frac{a}{3}\sqrt{3})^2 = (\frac{6}{3}\sqrt{3})^2 = 12$.

$SO = \ = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{24}. = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{72} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$куб. ед.

Ответ: $36\sqrt{3}$*кв. ед.*; $18\sqrt{2}$куб. ед .

Задача 22.

В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 10, угол между высотой и боковым ребром равен 45°. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

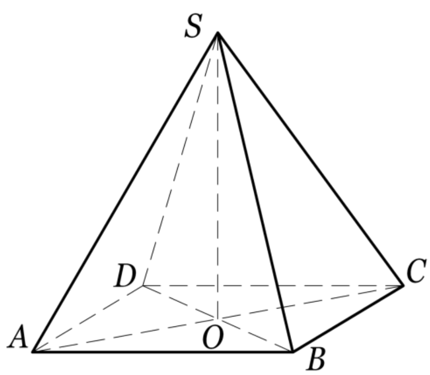


Рисунок 39 - Чертеж к задаче 22

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SOA:

SO = OA.

пусть OA = x. Тогда по теореме Пифагора $x^2 + x^2 = SA^2 \Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow$ $x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow SO = OA = 5\sqrt{2}$.

$AC = 2OA = 10\sqrt{2}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC:

по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow 2AB^2 =(10\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2AB^2 = 200$ $\Rightarrow AB^2 = 100$.

AB = 10.

Ответ: 10; $5\sqrt{2}$.

Вывод: если в правильной четырехугольной пирамиде , угол между высотой и боковым ребром равен 45°, то боковое ребро равно стороне основания, проще говоря, все ребра пирамиды равны.

Задача 23.

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10, угол между высотой и апофемой равен 60 °. Найдите боковое ребро, высоту пирамиды, угол между боковым ребром и плоскостью основания.

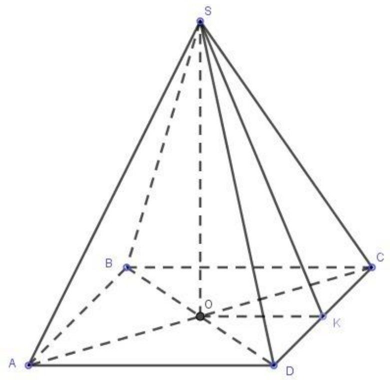


Рисунок 40 - Чертеж к задаче 23

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SOK:

$\angle OSK = 60° \Rightarrow \angle SKO = 30°$,

$OK = 5 \Rightarrow SO = \frac{OK}{tg30°} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 5\sqrt{3} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$.

$OC = OK\sqrt{2} \Rightarrow OC = 5\sqrt{2}$.

Тогда в прямоугольном треугольнике SOC по теореме Пифагора $OC^2 + SO^2 = SC^2 \Rightarrow SC^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow SC^2 = 50 + 75 = 125 \Rightarrow SC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

$tg \angle SCO = \frac{SO}{CO} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \angle SCO = arctg \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$, arctg $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 24.

Объем правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равен 288. Найдите объем пирамиды C_1AOB.

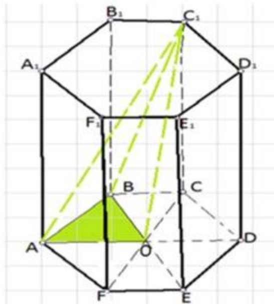


Рисунок 41 - Чертеж к задаче 24

Решение.

очевидно, что пирамида составляет $\frac{1}{6}$ часть призмы, поэтому

$V_{пир} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6} \cdot 288 = 48$куб.ед.

Ответ: 48куб.ед.

Задача 25.

В основании пирамиды SABCD лежит ромб с диагоналями 8 и 6. Угол наклона апофемы SK к плоскости основания равен 30 °. Найдите объемы пирамид SABCD и SBMC, если точка M является серединой стороны основания.

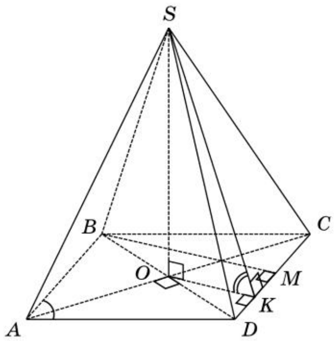


Рисунок 42 - Чертеж к задаче 25

Решение.

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ (формула 47).

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$, $V_{SBMC} = \frac{1}{3} S_{BMC} \cdot SO$.

Высота указанных пирамид равны!

Найдем площадь ромба ABCD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Высоту пирамиды найдем из прямоугольного треугольника SOK:

$\operatorname{tg} \angle SKO = \frac{SO}{OK} \Rightarrow SO = OK \cdot \operatorname{tg} \angle SKO$.

OK найдем, используя формулу площади треугольника:

$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OD \Rightarrow CD \cdot OK = CO \cdot OD$.

Сторону основания найдем из прямоугольного треугольника COD по теореме Пифагора :

$CO^2 + OD^2 = CD^2 \Rightarrow CD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow CD = 5.$

Тогда $5 \cdot OK = 4 \cdot 3 \Rightarrow OK = 12/5$.

$SO = \frac{12}{5} \cdot \text{tg } 30° = \frac{12}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$.

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{32\sqrt{3}}{5}$ куб.ед.

Найдем площадь треугольника BMC:

$S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$.

$MC = \frac{1}{2} CD = 5/2$.

BM найдем, используя формулу площади треугольника:

$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot BD \Rightarrow CD \cdot BM = CO \cdot BD$.

Имеем $5 \cdot BM = 4 \cdot 6 \Rightarrow BM = 24/5$.

Тогда $S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{5}{2} = 6$.

$V_{SBMC} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ куб.ед.

Сравните полученные объемы.

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{5}$ куб.ед., $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ куб.ед.

Задача 26.

В правильной шестиугольной пирамиде высота SO = 4см, апофема SK равна 5см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

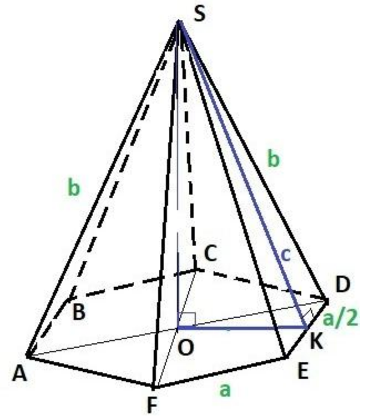


Рисунок 43 - Чертеж к задаче 26

Решение.

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ (формула 47), $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_{бок}$ (формула 48)

$h_{бок}$ = SK = 5см.

$P_{осн} = 6a$.

Сторону основания a найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OKD (рисунок...)

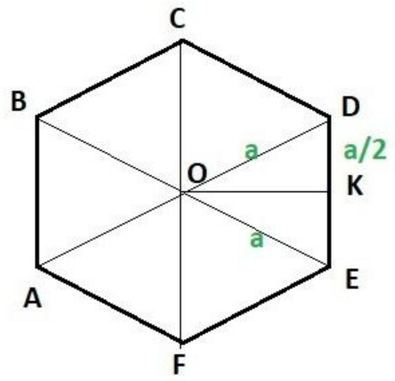


Рисунок 44 - Изображение основания призмы задачи 26

a^2 - $(\frac{1}{2}a)^2 = \text{ОК}^2 \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = \text{ОК}^2$.

ОК^2 найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOK: $\text{OK}^2 = \text{SK}^2 - \text{SO}^2 \Rightarrow \text{OK}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$.

Тогда $\frac{3}{4}a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$P_{осн} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 5 = 45\sqrt{3}$.

$S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$.

$S_{полн} = 45\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 63\sqrt{3}$кв.ед.

Ответ: $63\sqrt{3}$кв.ед.

Задача 27.

Объем правильной шестиугольной пирамиды равен 6000, сторона основания равна 10. Найдите боковое ребро.

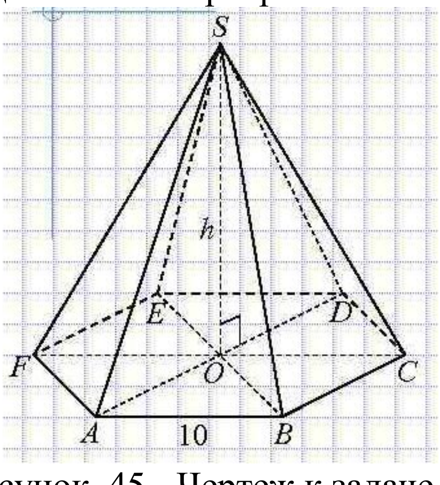


Рисунок 45 - Чертеж к задаче 27

Решение.

В правильном шестиугольнике OC = AB = 10.

$S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{3} \cdot \text{H} = 50\sqrt{3} \cdot \text{H}$.

$50\sqrt{3} \cdot \text{H} = 6000 \Rightarrow \text{H} = 40\sqrt{3}$.

Боковое ребро SC найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC:

$SC^2 = OC^2 + SO^2 \Rightarrow SC^2 = OC^2 + SO^2 = 10^2 + (40\sqrt{3})^2 = 4900.$

SC = 70.

Ответ:70.

Задачи на нахождение элементов, площадей сечений, площадей поверхностей и объемов усеченных пирамид смотрите в приложениях О, П.

2.2 Тела вращения

Задача 28.

Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом в 45 °. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая цилиндра равна 10.

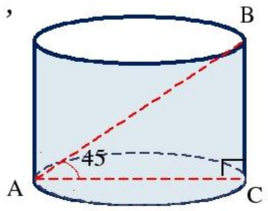


Рисунок 46 - Чертеж к задаче 28

Решение.

Δ ABC равнобедренный $\Rightarrow$ AC = BC $\Rightarrow$ 2R = 10 $\Rightarrow$ R = 5.

$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$, (формула 27), где h = BC = 10.

$S_{полн} = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 150\pi$кв.ед.

Ответ: 150πкв.ед.

Задача 29.

Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением единичного квадрата ABCD вокруг прямой AD.

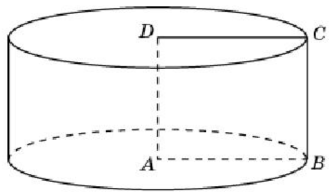


Рисунок 47 - Чертеж к задаче 29

Решение.

$S_{бок} = 2\pi Rh$, R = 1, h = BC = 1$\Rightarrow$ Sбок = 2π кв. ед.

Ответ: 2π кв. ед.

Задача 30.

Найдите площадь внешней и внутренней поверхности щляпы, размеры которой (в см) указаны на рисунке 48.

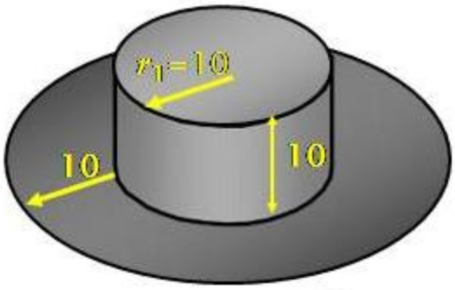


Рисунок 48 - Чертеж к задаче 30

Решение.

1) Если дно шляпы опустить на плоскость ее полей, то получим круг радиуса $R = r_1 + 10 = 20$см.

2) Площадь этого большого круга

$S_{бк} = \pi R^2 = \pi 20^2 = 400\pi см^2$.

3) Найдем площадь боковой поверхности цилиндрической части:

$S_{бок} = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 200\pi см^2$.

4) Найдем площадь шляпы:

$S_{шляпы} = 2 \cdot (S_{бк} + S_{бок}) = 2 \cdot (400\pi + 200\pi) = 1200\pi$ $см^2$.

Ответ: 1200π $см^2$.

Задача 31.

Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, осевое сечение которого - квадрат с площадью, равной 12.

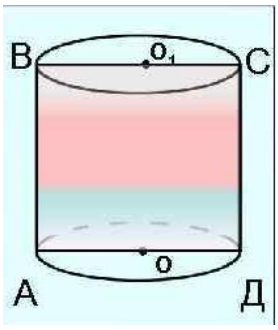


Рисунок 49 - Чертеж к задаче 31

Решение.

$S_{бок} = 2\pi Rh$.

$S_{ос.сеч.} = 12 \Rightarrow AD = CD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$R = OD = \sqrt{3}$.

$S_{бок} = 2\pi \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12\pi$кв.ед.

Ответ: 12πкв.ед.

Задачу можно обобщить. Сделайте это самостоятельно.

Задача 32.

Высота цилиндра на 2см меньше его радиуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равен 160πкв.ед.. Найдите объем цилиндра.

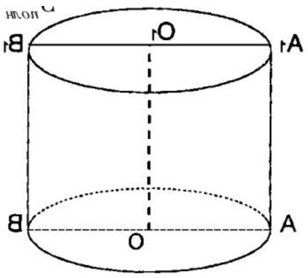


Рисунок 50 - Чертеж к задаче 32

Решение.

$V = \pi R^2\ h$ (формула 28).

Найдем радиус основания и высоту, используя площадь боковой поверхности:

$S_{бок}\ = 2\pi Rh \Rightarrow 160\pi = 2\pi\text{R}\cdot\ (\text{R-2})$.

Решая последнее уравнение, получаем R = 10, h = 8.

Тогда $V = \pi \cdot 10^2\ \cdot 8 = 800\pi$куб.ед.

Ответ: 800πкуб.ед.

Задача 33.

Найдите объем цилиндра, если развертка его боковой поверхности есть квадрат со стороной 6.

Решение.

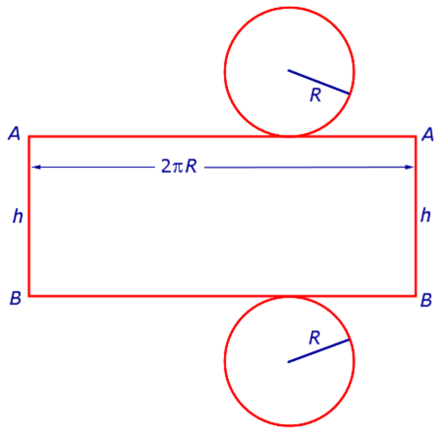


Рисунок 51 - Изображение развертки цилиндра

$V = \pi R^2\ h$ (формула 28).

Очевидно, что высота цилиндра h = 6.

Радиус основания R найдем из уравнения

$2\pi\text{R} = 6 \Rightarrow \text{R}\ = \frac{6}{2\pi} \Rightarrow \text{R}\ = \frac{3}{\pi}$

Тогда $V = \pi \cdot (\frac{3}{\pi})^2\ \cdot 6 = 54/\pi$ (куб.ед.).

Ответ: $54/\pi$ (куб.ед.).

Задача 34.

Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к площади боковой поверхности.

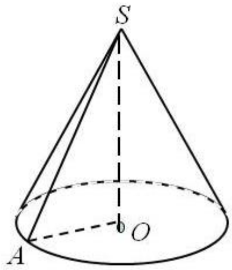


Рисунок 52 - Чертеж к задаче 34

Решение.

Пусть радиус основания конуса равен R , тогда высота конуса h = 2R.

Площадь основания конуса $S_{осн} = \pi R^2$

$S_{бок} = \pi Rl$.

Образующую конуса найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOA:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Rightarrow SA^2 = (2R)^2 + R^2 \Rightarrow SA^2 = 5R^2 \Rightarrow SA = R\sqrt{5}$.

$S_{бок} = \pi R\, R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$.

Находим искомое отношение:

$\frac{Sосн}{Sбок} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Задача 35.

Высота конуса равна 8, а длина образующей равна 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

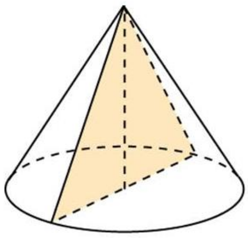


Рисунок 53 - Изображение осевого сечения конуса

Решение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого равно диаметру основания конуса, а высота совпадает с высотой конуса.

Найдем радиус основания конуса по теореме Пифагора:

$R^2 = l^2 - h^2 \Rightarrow R^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$.

$S_{ос.сеч} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = R \cdot h = 6 \cdot 8 = 48$кв.ед.

Ответ: 48кв.ед.

Задача 36.

Радиус основания конуса равен 4см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите площадь осевого сечения , площадь боковой поверхности и объем конуса (используйте рисунок к задаче 35).

Решение.

1) $S_{ос.сеч} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = R \cdot h$.

Найдем высоту конуса. так как осевое сечение - прямоугольный треугольник, то углы при основании этого сечения равны 45 ° и h = R = 4см.

$S_{ос.сеч} = R \cdot h = 6 \cdot 6 = 36$см^2.

2) $S_{бок} = \pi Rl$.

Образующую конуса найдем по теореме Пифагора:

$l^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow l^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow l^2 = 32 \Rightarrow l = 4\sqrt{2}$.

Тогда $S_{бок} = \pi Rl = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\,\pi$см^2.

3) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$(формула 31).

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64\pi}{3}$см^3.

Ответ: 36см^2; $16\sqrt{2}\,\pi$см^2; $\frac{64\pi}{3}$см^3.

Задача 37.

Радиус основания конуса равен 9. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса, если осевое сечение конуса - равносторонний треугольник.

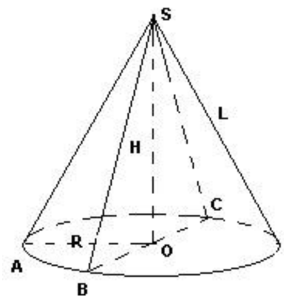


Рисунок 54 - Чертеж к задаче 37

Решение.

1) $S_{полн} = \pi R(R + l)$, (формула 30).

Так как Δ SBC равносторонний, то $2R = l = 18$.

Тогда $S_{полн} = \pi \cdot 9(9 + 18) = 243\pi$кв.ед.

2) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (формула 31)

Найдем высоту конуса по теореме Пифагора:

$h^2 = l^2 - R^2 \Rightarrow h^2 = 18^2 - 9^2 \Rightarrow h^2 = 243 \Rightarrow h = 9\sqrt{3}$.

3) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 9\sqrt{3} = 243\sqrt{3}$ куб.ед.

Ответ: 243πкв.ед.; $243\sqrt{3}$ куб.ед.

Задача 38.

Радиус основания равностороннего конуса равен 9. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен 45 ° .

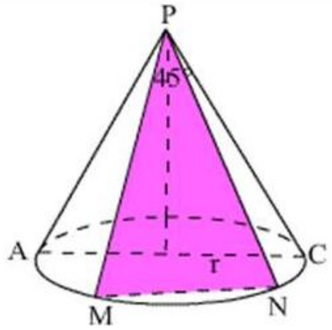


Рисунок 55 - Чертеж к задаче 38

Решение.

Так как конус равносторонний, то PM = PN = 18.

MN найдем, используя теорему косинусов:

$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2 \cdot PM \cdot PN \cdot \cos 45°$.

$MN^2 = 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 648 - 648 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 189{,}8$.

MN = 13, 78.

Площадь сечения найдем по формуле Герона:

$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$,

где p - полупериметр, a, b, c - стороны треугольника.

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+18+13{,}78}{2} = 24{,}89$.

$S_{\Delta} = \sqrt{24{,}89 \cdot (24{,}89-18) \cdot (24{,}89-18) \cdot (24{,}89-13{,}78)} \approx 114{,}57$.

Ответ: ≈114,57.

Задача 39.

Найдите площадь полной поверхности и объем усеченного конуса, если он образован вращением прямоугольной трапеции с основаниями 10 и 16 вокруг меньшей стороны, равной 8.

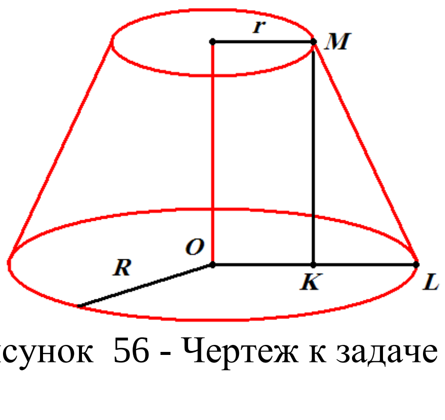


Рисунок 56 - Чертеж к задаче 39

Решение.

R =16, r = 10, h =8.

$S_{полн} = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$, (формула 33),

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$. (формула 34).

Найдем длину образующей усеченного конуса l. Для этого проведем в конусе высоту МК.

В прямоугольном треугольнике MKL по теореме Пифагора
$ML^2 = MK^2 + KL^2$, $KL = R - r = 16 - 10 = 6 \Rightarrow ML^2 = 8^2 + 6^2 = 100$,
$ML = 10$.
$S_{полн} = \pi \cdot 10\,(16 + 10) + \pi(16^2 + 10^2) = 616\,\pi$ кв.ед.
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot (16^2 + 16 \cdot 10 + 10^2) = 172$ куб. ед.
Ответ: $616\,\pi$ кв.ед.; 172 куб. ед.

Задача 40.

Площадь боковой поверхности конуса равна 80π см^2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте. найдите площадь боковой поверхности образовавшегося усеченного конуса.

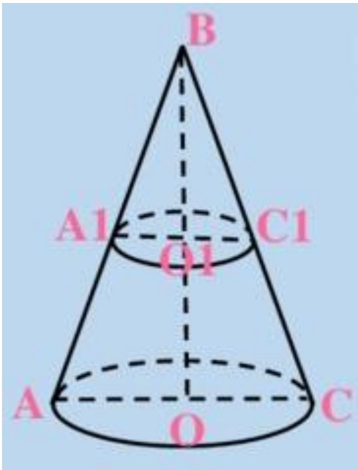


Рисунок 57 - Чертеж к задаче 40

Решение.
$S_{бок.усеч.} = S_{бок.бол.кон.} - S_{бок\,мал.кон}$.
$S_{бок} = \pi Rl$.
$S_{бок\,мал.кон} = \pi \cdot \frac{1}{2}$ BA $\cdot \frac{1}{2} \cdot$ AO $= \frac{1}{4}\pi \cdot$ BA $\cdot$ AO $= 20\pi$ см^2.
$S_{бок.усеч.} = 80\pi - 20\pi = 60\pi$ см^2.
Ответ: 60π см^2.

Задача 41.

Площадь большого круга шара равна 1. Найдите объем шара.

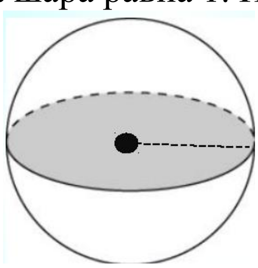


Рисунок 58 - Чертеж к задаче 41

Решение.
Радиус большого круга равен радиусу шара.

$S_{кр} = \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = 1 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$(формула 36) $\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{\frac{1}{\pi}})^3 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3\pi}$ куб. ед.

Ответ: $\frac{4\sqrt{\pi}}{3\pi}$ куб. ед.

Задача 42.

Вычислить объем шара, площадь поверхности которого равна 144π.

Воспользуемся рисунком 58.

Решение.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$(формула 36).

Найдем радиус шара:

$S_{ш} = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R^2 = \sqrt{\frac{144\pi}{4\pi}} = 6$.

Тогда $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288$куб ед.

Ответ: 288куб ед.

Задача 43.

Найти площадь поверхности сферы по данным, представленным на рисунке 59, если площадь сечения равна 16π, расстояние о центра сферы до сечения равно 3.

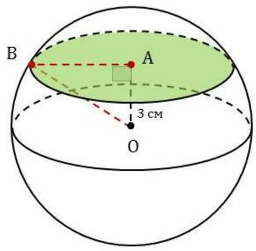


Рисунок 59 - Чертеж к задаче 43

Решение.

1) $S_{кр} = \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow$ r = AB = 4.

2) R = 5 (по теореме Пифагора).

3) $S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ кв.ед.

Ответ: 100π кв.ед.

Задача 44.

Во сколько увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

Решение.

Так как в формуле объема радиус содержится в третьей степени, а остальные входящие постоянные величины, то объем увеличится в 3^3,т.е. в 27 раз.

Ответ: в 27 раз.

Задача 45.

Объем одного шара в 64 раза больше объема другого. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Решение.

Учитывая решение предыдущей задачи, делаем вывод, что радиус первого шара в 4 раза больше радиуса второго.

В формулу площади поверхности шара радиус входит во второй степени, поэтому площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго в 16 раз (4^2).

Ответ: в 16 раз.

Задача 46.

Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

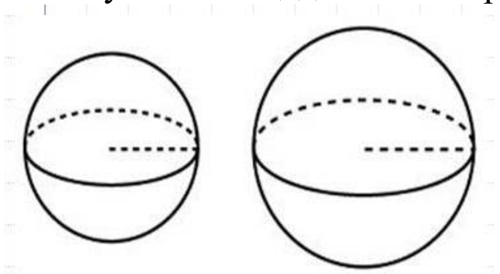


Рисунок 60 - Чертеж к задаче 46

Решение.

$S_3 = S_1 + S_2 = 4\pi 6^2 \; 4\pi 8^2 = 100\pi \Rightarrow R_3 = 10$.

Ответ: 10.

Задача 47.

Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равна сумме их объемов.

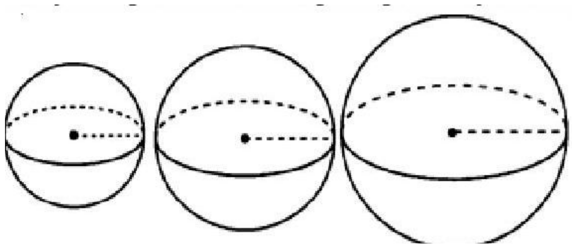


Рисунок 70 - Чертеж к задаче 47

Решение.

$R_4^3 = R_1^3 + R_2^3 + R_3^3 = 6^3 + 8^3 + 10^3 = 1728 \Rightarrow R_4 = 12$.

Ответ: 12.

2.3 Комбинации геометрических фигур

Сфера называется вписанной в многогранник (многогранник называется описанным около сферы), если все грани многогранника касаются этой сферы.

Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности.

В пирамиду, у которой в основание можно вписать окружность, центр которой служит основанием высоты пирамиды, можно вписать сферу (шар).

Центр вписанной сферы (шара) лежит на высоте этой пирамиды и является точкой пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла, образованного апофемой и ее проекцией на основание.

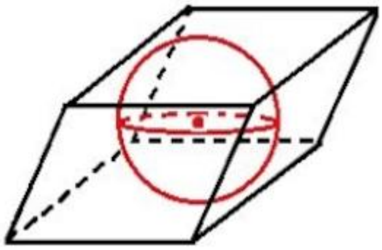


Рисунок 71 - Изображение шара, вписанного в произвольную призму

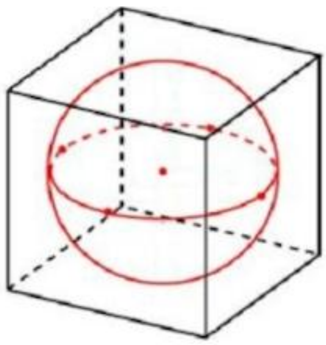


Рисунок 72 - Изображение шара, вписанного в куб

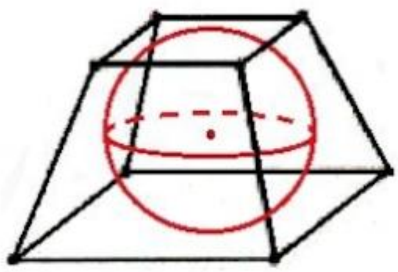


Рисунок 73 - Изображение шара, вписанного в правильную усеченную четырехугольную пирамиду

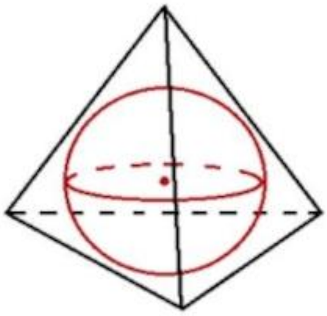


Рисунок 74 - Изображение шара, вписанного в правильный тетраэдр

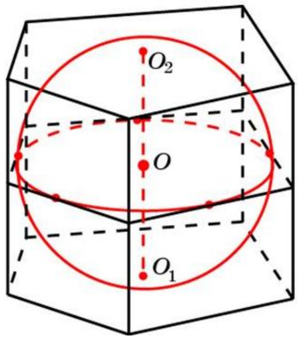


Рисунок 75 - Изображение шара, вписанного в пятиугольную пирамиду

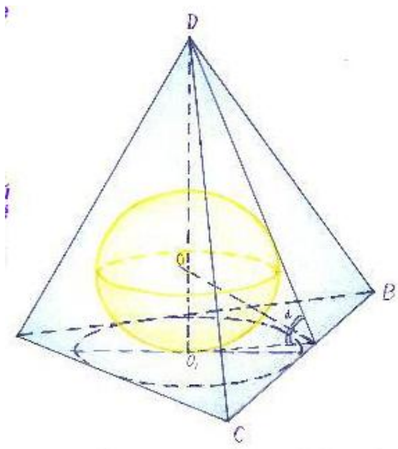


Рисунок 76 - Изображение шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду

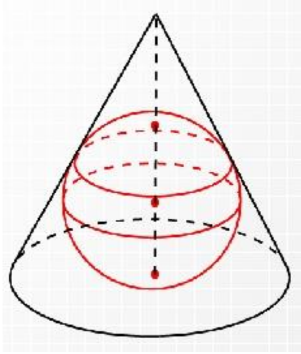


Рисунок 77 - Изображение шара, вписанного в конус

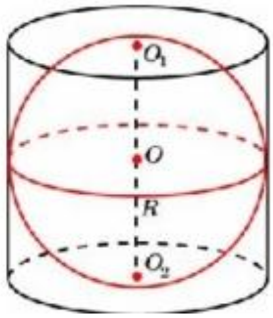


Рисунок 78 - Изображение шара, вписанного в цилиндр

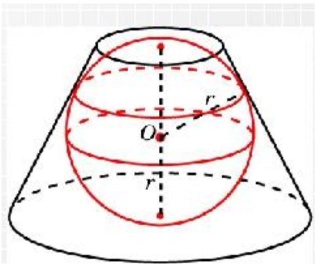


Рисунок 79 - Изображение шара, вписанного в усеченный конус

Сфера (шар) называется описанной около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности сферы (шара).

Другие определения, касающиеся вписанных и описанных фигур, Вы можете изучить по учебной литературе.

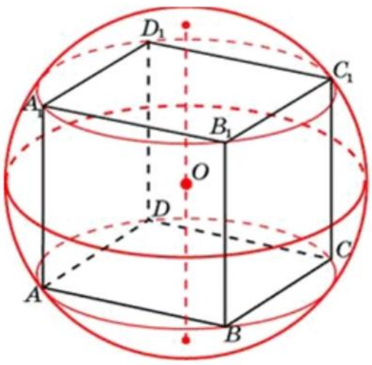


Рисунок 80 - Изображение шара, описанного около куба

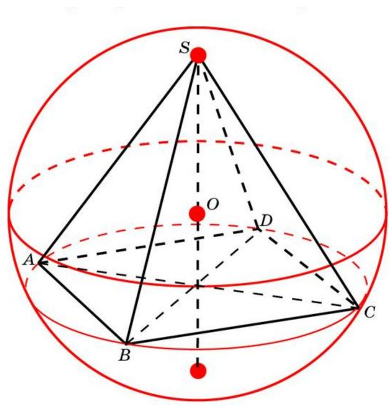


Рисунок 81 - Изображение шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды

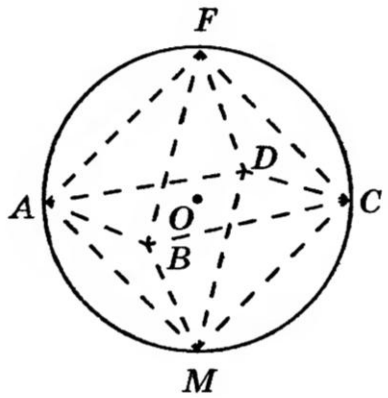


Рисунок 82 - Изображение шара, описанного около правильного октаэдра

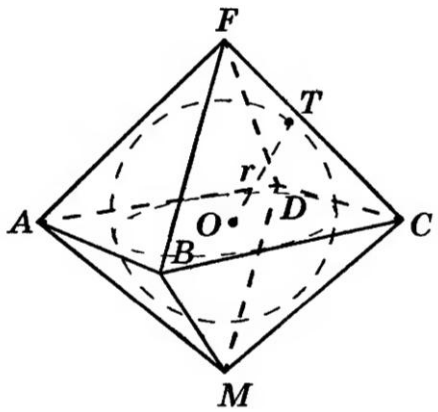


Рисунок 83 - Изображение шара, вписанного в правильный октаэдр

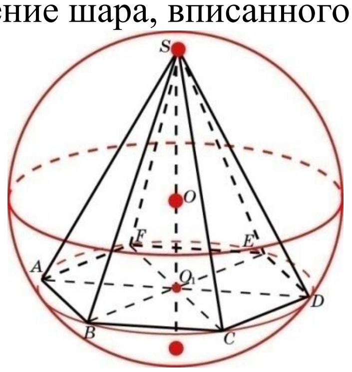


Рисунок 84 - Изображение шара, описанного около правильной шестиугольной пирамиды

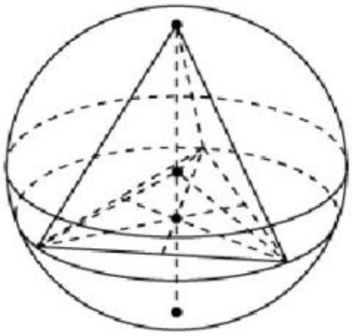


Рисунок 85 - Изображение шара, описанного около правильной треугольной пирамиды

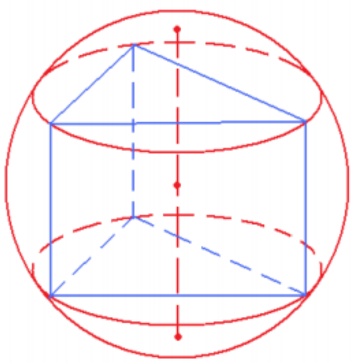


Рисунок 86 - Изображение шара, описанного около правильной треугольной призмы

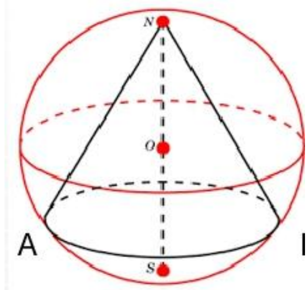


Рисунок 87 - Изображение шара, описанного около конуса

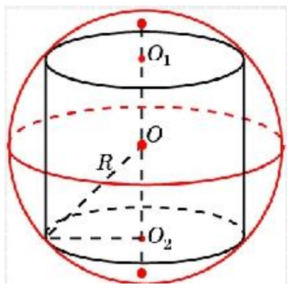


Рисунок 88 - Изображение шара, описанного около цилиндра

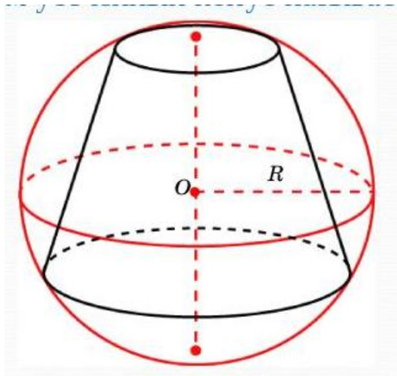


Рисунок 89 - Изображение шара, описанного около усеченного конуса

Некоторые из вышеуказанных и другие комбинации геометрических тел рассмотрим в следующих задачах.

Задача 48.

Площадь поверхности куба, вписанного в некоторую сферу, равна $25 + 2\sqrt{17}$. Найдите площадь поверхности куба, вписанного в сферу, радиус которой в два раза больше радиуса исходной сферы. Воспользуйтесь рисунком 80.

Решение.

Коэффициент пропорции к равен 2. Так как вычисляем площадь, то при расчетах берем $к^2$.

$S_2 = к^2 \cdot S_1 = 2 \cdot (25 + 2\sqrt{17}) = 100 + 8\sqrt{17}$.

Ответ: $100 + 8\sqrt{17}$.

Задача 49.

Около правильной треугольной призмы описана сфера. Найдите ее радиус, если боковое ребро призмы равно 10 см, радиус окружности, описанной около основания призмы равен 12 см.

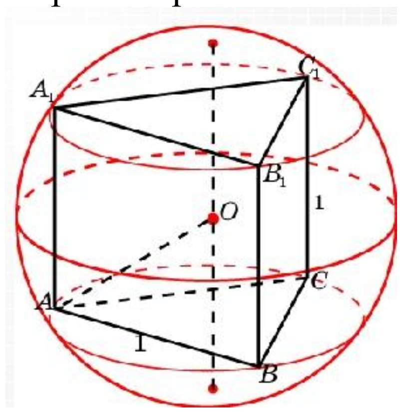


Рисунок 90 - Чертеж к задаче 49

Решение.

1) Найдем сторону основания призмы. Для этого используем формулу связи стороны a равностороннего треугольника и радиуса r описанной около него окружности: $a = r\sqrt{3} \Rightarrow a = 12\sqrt{3}$ см.

2) Обозначим точку пересечения высоты призмы, содержащей точку O , с основанием O_1.

В прямоугольном треугольнике AO_1O: $AO^2 = AO_1{}^{2} + O_1O^2$.

$O_1O = 5$, $AO_1 = 12 \Rightarrow AO^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AO = R = 13$ см.

Ответ: R = 13 см.

Задача 50.

Найдите радиус сферы, описанной около единичного тетраэдра.

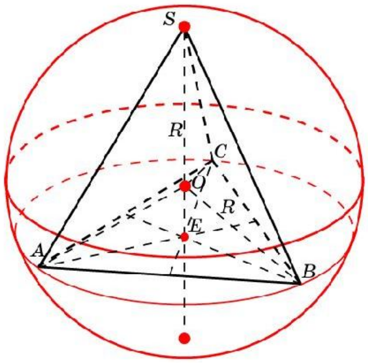


Рисунок 91 - Чертеж к задаче 50

Решение.

1) В тетраэдре SABC имеем: $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $SE = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) В прямоугольном треугольнике OBE имеем:

$\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2$.

Решая это уравнение относительно R, находим $R = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Задача 51.

Найдите радиус сферы, вписанной в единичный октаэдр.

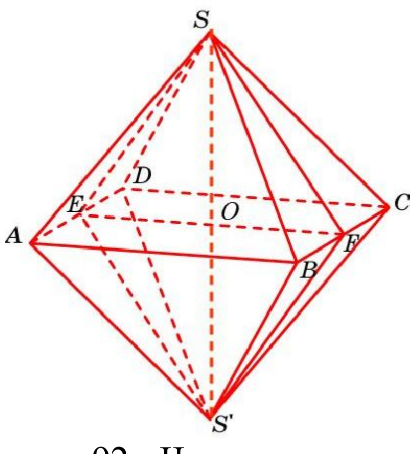


Рисунок 92 - Чертеж к задаче 51

Решение.

Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в ромб SES´F, в котором SE = SF = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, EF = 1, SO = $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Тогда высота ромба, проведенная из вершины E, будет равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (нахождение высоты ромба рассмотрено в задаче 25).

Искомый радиус равен половине высоты и равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача 52.

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, боковые ребра которой равны 1, и плоские углы при вершине равны 45 °.

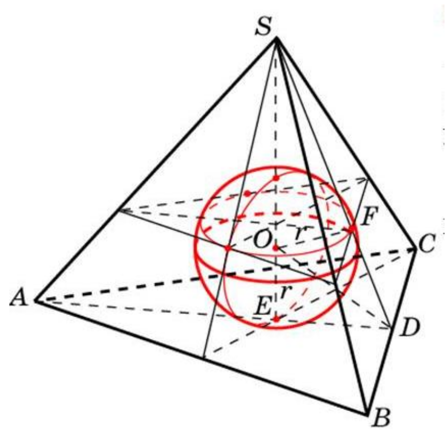


Рисунок 93 - Чертеж к задаче 52

Решение. В тетраэдре SABC имеем:

SD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, DE = $\frac{\sqrt{6}}{6}$, SE = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Из подобия треугольников SOF и SDE получаем уравнение

r : ($\frac{\sqrt{3}}{3}$ - r) = $\frac{\sqrt{6}}{6}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, решая которое находим r = $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: r = $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Задача 53.

Чему равно отношение площади поверхности куба и вписанного в него шара?

Решение.

1) Рассмотрим диаметральное (осевое) сечение шара.

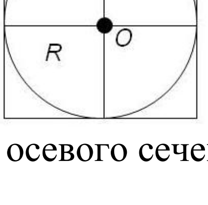


Рисунок 94 - Изображение осевого сечения шара, вписанного в куб

Сторона куба равна двум радиусам шара (a = 2R) .

$S_ш = 4\pi R^2 \Rightarrow S_к = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$.

2) Найдем отношение $\frac{S_к}{S_ш} = \frac{24R^2}{4\pi R^2} = \frac{6}{\pi}$.

Ответ: $\frac{6}{\pi}$.

Задача 54.

Высота конуса равна 8, образующая равна 10. Найдите радиус описанного шара.

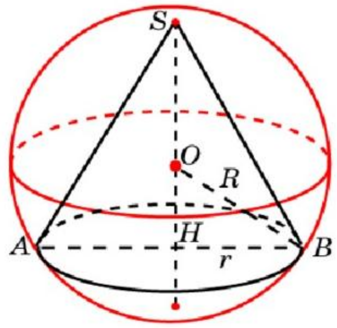


Рисунок 95 - Чертеж к задаче 54

Решение.

1) Радиус описанного шара R равен радиусу окружности, описанной около ΔSAB.

Площадь этого треугольника может быть найдена по формулам

$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SH$ и $S = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4R}$.

SH = 8, SA = SB = 10.

2) Найдем AB:

$AB = 2 \cdot HB = 2 \cdot \sqrt{SB^2 - SH^2} = 2 \cdot \sqrt{10^2 - 8^2} = 12$.

3) Радиус R найдем из соотношения

$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot SH = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4R} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4R} \Rightarrow R = 6{,}25$.

Ответ: R = 6,25.

Задача 54.

Найдите площадь поверхности сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3.

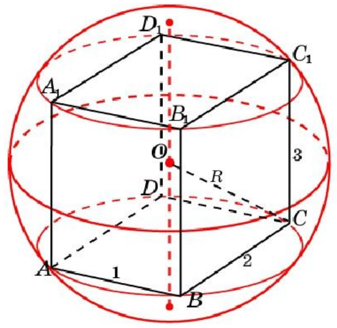


Рисунок 96 - Чертеж к задаче 54

Решение.

1) $S_{сф} = 4\pi R^2$.

Радиус сферы равен половине диагонали $d = AC_1$ параллелепипеда.

2) Вычислим диагональ параллелепипеда:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \Rightarrow d = \sqrt{14} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

3) $S_{сф} = 4\pi(\frac{1}{2}\sqrt{14})^2 = 4\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 14 = 14\pi$.

Ответ: 14π.

Задача 55.

В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой равна 8, апофема равна 10. Найдите площадь поверхности конуса.

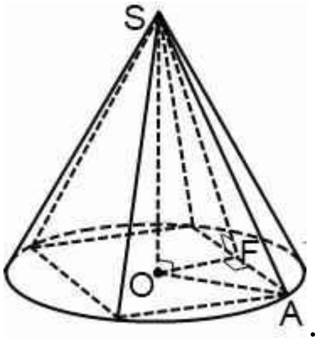


Рисунок 97 - Чертеж к задаче 55

Решение.

1) $S_{полн} = \pi R(R + l)$ (формула 30).

SO = 8, SF = 10.

2) Найдем радиус основания и образующую конуса: R = OA, l = SA .

3) Из прямоугольного треугольника SOF по теореме Пифагора имеем:

$SF^2 = SO^2 + OF^2 \Rightarrow OF^2 = SF^2 - SO^2 \Rightarrow OF^2 = 10^2 - 8^2 = 36$,

OF = 6.

4) Из прямоугольного треугольника OFA по теореме Пифагора имеем:

$OA^2 = FA^2 + OF^2 = 2\,OF = 12 \Rightarrow OA = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{3}$.

5) Из прямоугольного треугольника SOA по теореме Пифагора имеем:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Rightarrow SA^2 = 8^2 + (\sqrt{12})^2 \Rightarrow SA^2 = 64 + 12 = 76$,

$SA = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} = l$.

6) $S_{полн} = \pi R(R + l) = \pi\cdot 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 2\sqrt{19}) = 8\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + \sqrt{19})$.

Ответ: $8\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + \sqrt{19})$.

Задача 56.

В конус с высотой 12 и образующей $6\sqrt{6}$ вписан куб. Найдите объем куба.

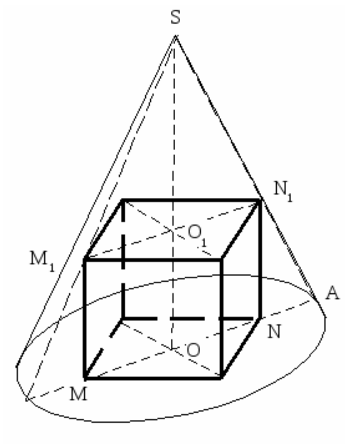


Рисунок 98 - Чертеж к задаче 56

Решение.

V = a^3 (формула 4).

1) Найдем радиус основания конуса:

$R^2 = (6\sqrt{6})^2 - 12^2 = 72 \Rightarrow R = 6\sqrt{2}$.

2) Треугольники SOA и N_1NA подобны, поэтому $\frac{SO}{N_1N} = \frac{OA}{NA}$.

SO = 12, $N_1N = a$, OA = $6\sqrt{2}$, NA = OA - ON = $6\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Имеем $\frac{12}{a} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}}$.

Решая последнее уравнение относительно a, получаем $a = 6$.

3) V = 6^3 = 216 куб ед.

Ответ: 216 куб ед.

При решении многих задач на комбинации тел вращения и многогранников изображать тела вращения нет необходимости, особенно сферу. Достаточно, проанализировав заданную геометрическую ситуацию, изобразить осевое сечение. Например, если сфера (шар) вписана в куб, то изображается осевое сечение – окружность, вписанная в квадрат. Если куб вписан в сферу (шар), то изображается прямоугольник, вписанный в окружность. Если конус вписан в сферу, то изображается равнобедренный треугольник, вписанный в окружность. Если сфера вписана в конус, то изображается окружность, вписанная в равнобедренный треугольник и т. п.

3 Вопросы для самоконтроля

1. Что называется многогранником?
2. Что называется гранями, ребрами, вершинами многогранника?
3. Какой многогранник называется призмой7
4. Что называется диагональю, высотой призмы?
5. Что называется диагональным сечением призмы?
6. Какая призма называется: а) прямой? б) правильной?
7. Какая фигура называется параллелепипедом?
8. Какая фигура называется кубом?

9. Какие свойства параллелепипеда следуют из того, параллелепипед является частным случаем призмы?

10. Сформулируйте свойства противолежащих граней параллелепипеда.

11. Сформулируйте свойства диагоналей параллелепипеда.

12. Что называется пирамидой?

13.Что называется вершиной, основанием, боковым ребром пирамиды?

14. Что называется диагональным сечением пирамиды?

15. Какая пирамида называется правильной?

16. Сформулируйте свойства параллельных сечений пирамиды.

17. Какая пирамида называется усеченной?

18. Какое тело называется цилиндром?

19. Дайте определение основания, высоты, образующей, площади поверхности цилиндра.

20. Какое сечение цилиндра называется осевым?

21. Какая фигура лежит в осевом сечении цилиндра ?

22. Какой цилиндр называют равносторонним?

23. Что принимают в качестве площади боковой поверхности цилиндра?

24. Запишите формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей цилиндра.

25. Объясните, почему любая призма является цилиндром?

26. Какой фигурой может быть сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?

27. Какое тело называется конусом?

28. Дайте определения основания, вершины, оси, высоты конуса.

29. Какое сечение конуса называется осевым?

30. Какая фигура лежит в осевом сечении конуса?

31. Какой конус называется равносторонним?

32. Какая фигура лежит в сечении конуса плоскостью, перпендикулярной его оси?

33. Какая фигура лежит в сечении конуса плоскостью, параллельной его оси?

34. Что принимают в качестве площади боковой поверхности конуса?

35. Запишите формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса.

36. Какое тело называется усеченным конусом?

37. Дайте определение высоты усеченного конуса, его образующей.

38. Дайте определение боковой поверхности конуса.

39. Запишите формулы для вычисления площади боковой поверхностей конуса.

40. Дайте определение сферы и шара.

41. Какое сечение называется большим кругом сферы?

42. Какая плоскость называется касательной плоскостью к сфере?

43. Дайте определение шарового сегмента и сферического сегмента.

44. Дайте определение шарового слоя.

45. Дайте определение шарового сектора.

46. Что принимают в качестве высоты шарового сектора?

47. Что называется объемом тела?

48. Как определяется действие вычисления объема тела?

49. Перечислите свойства объема тела?

50. Запишите формулы для определения объема прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, поясните смысл входящих элементов.

51. Можно ли применять формулу объема прямой призмы для вычисления объема прямого параллелепипеда?

52. Объясните, как используется формула для вычисления объема тела по площади его поперечного сечения

53. Как вычисляется объем наклонной призмы?

54. Запишите формулу объема пирамиды, усеченной пирамиды.

55. Как вычисляется объем тела вращения?

56. Запишите формулу объема цилиндра, конуса

57. Запишите формулу объема усеченного конуса.

58. Запишите формулу объема шара, шарового сектора.

59. Запишите формулу объема шарового сегмента.

60. Запишите формулу объема шарового слоя.

61. Как вычисляется площадь поверхности многогранника?

62. Как вычисляется площадь поверхности тела вращения?

63. Что представляет собой развертка куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса?

64. В каком случае призму называют: а) вписанной в цилиндр; б) описанной около цилиндра?

65. В каком случае пирамиду называют: а) вписанной в конус; б) описанной около конуса?

66. В каком случае говорят, что сфера: а) вписана в многогранник; б) описана около многогранника?

67. Всегда ли можно описать сферу около прямой треугольной призмы?

68. Во всякую ли прямую треугольную призму можно вписать сферу?

69. При каком условии в усеченный конус можно вписать сферу?

4 Задачи для самостоятельного решения

Задача 57.

Найдите расстояние от вершины куба С, ребро которого равно 6, (рисунок 99) до точки О.

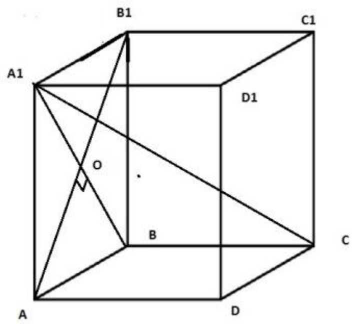


Рисунок 99 - Чертеж к задаче 57

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Задача 58.

Найдите площадь сечения куба, если его объем равен 27.

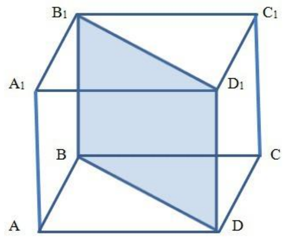


Рисунок 100 - Чертеж к задаче 58

Ответ: $9\sqrt{2}$.

Задача 59.

Найдите площадь сечения куба, если его ребро равно 3, а точка К делит ребро в отношении 1:2.

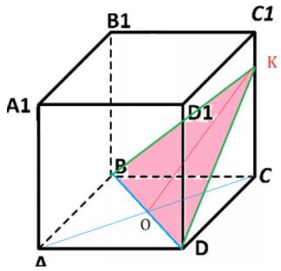


Рисунок 101 - Чертеж к задаче 59

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

Задача 60.

Найдите площадь сечения куба, если его ребро равно 3, а верхнее основание сечения делит ребро куба в отношении 1:2.

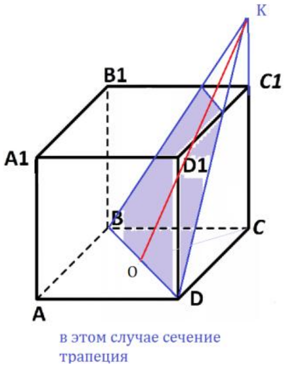


Рисунок 102 - Чертеж к задаче 60

Ответ: $\sqrt{74}$.

Задача 61.

Диагональ грани прямоугольного параллелепипеда равна 8, ребро, перпендикулярное этой грани, равно 6. Найдите диагональ параллелепипеда.

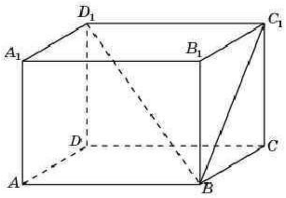


Рисунок 103 - Чертеж к задаче 61

Ответ: 10.

Задача 62.

Найдите площадь сечения призмы, изображенной на рисунке 104, если все ребра призмы равны 4 и угол между диагоналями граней равен 30 °.

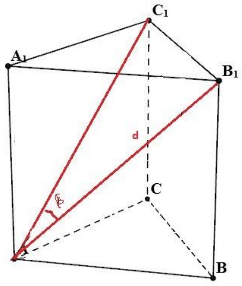


Рисунок 104 - Чертеж к задаче 62

Ответ: 8.

Задача 63.

В правильной треугольной призме, изображенной на рисунке 104, найдите расстояние от точки B до ребра A_1C_1.Высота призмы равна 6, ребро призмы равно 4.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 64.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.

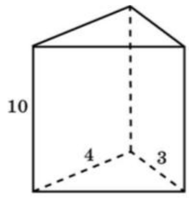


Рисунок 105 - Чертеж к задаче 64

Ответ: 132.

Задача 65.

Высота правильной четырехугольной призмы равна $8\sqrt{3}$, сторона основания равна 8. Найдите расстояние между вершиной А и точкой пересечения диагоналей DD_1C_1C.

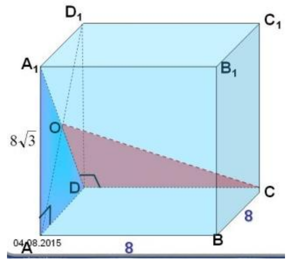


Рисунок 106 - Чертеж к задаче 65

Ответ: 8.

Задача 66.

В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а ее высота 4 см.

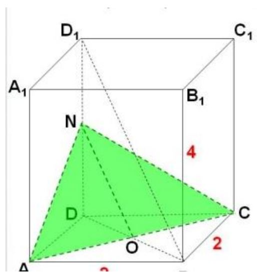


Рисунок 107 - Чертеж к задаче 66

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Задача 67.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1\ D_1\ E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми

1)BB_1 и AE_1; 2) AA_1 и B_1C_1 ; 3) D_1E_1 и BB_1; 4) AA_1 и BC_1 ; 5) FF_1 и BC_1 ; 6) BB_1 и ED_1 .

Задача 68.

Найдите площадь полной поверхности и объем правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания $a = 12$, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $45°$.

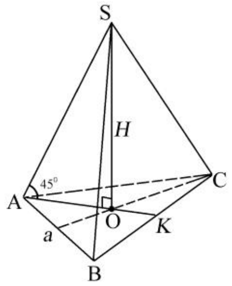
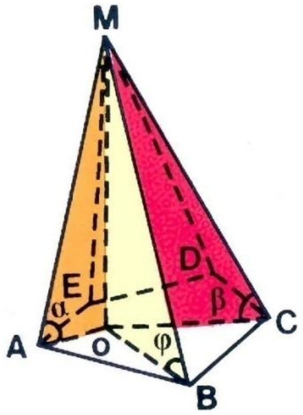


Рисунок 108 - Чертеж к задаче 68

Ответ: $36\sqrt{15}$, $144\sqrt{3}$.

Задача 69.

Найдите решение задачи по данным рисунка 109.



Дано:

MABCDE – пирамида

MO $\perp$ (ABC)

$\angle$ MAO $=60^0$

$\angle$ MCO $=45^0$

AM = 12

Найти:

MO, AO, CO, MC.

Рисунок 109 - Чертеж к задаче 69

Ответ: $6\sqrt{3}$, 6, $6\sqrt{3}$, $6\sqrt{6}$.

Задача 70.

Найдите объем пирамиды по данным рисунка 110, если в основании пирамиды лежит прямоугольный равнобедренный треугольник (боковые стороны треугольника равны 4).

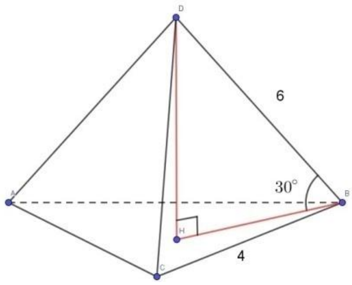


Рисунок 110 - Чертеж к задаче 70

Ответ: 8.

Задача 71.

Дана четырехугольная пирамида, основанием которой является ромб с острым углом в 30 °. Высота ромба равна 6. Каждый из двугранных углов при основании равен 45 °. Найдите объем пирамиды.

План решения задачи:

1) найдите сторону ромба;

2) вычислите площадь основания;

3) найдите высоту пирамиды;

4) вычислите объем пирамиды.

Вы можете предложить свое решение.

Ответ: 36.

Задача 72.

В правильной шестиугольной пирамиде высота равна 4, апофема равна 5. Найдите площадь поверхности и объем пирамиды.

Ответ: $48\sqrt{3}$кв.ед., $24\sqrt{3}$куб.ед.

Задача 73.

Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Боковое ребро против стороны основания 14 перпендикулярно плоскости основания и равно 16. Найдите площадь поверхности пирамиды.

Ответ: 448,11 кв.ед.

Задача 74.

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 8. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13. Найдите объем пирамиды.

Ответ:192.

Задача 75.

Бак, имеющий форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды, вмещает 190 л бензина. Найдите глубину этого бака, если стороны его оснований равны 60 см и 40 см.

Ответ: 6,48 дм.

Задача 76.

В правильной треугольной усеченной пирамиде высота равна 4, боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{19}$, O и O_1 - центры оснований, $A_1O_1 = 2\sqrt{3}$. Найдите АС. (Указание: используйте чертеж приложения...).

Ответ: 9.

Задача 77.

Сколько потребуется посыпки на торт "Муравейник" диаметром основания 26 см и высотой 16 см, если на каждый квадратный сантиметр ее потребуется 3 г. Торт имеет форму конуса, вся посыпка представляет собой боковую поверхность.

Ответ: 2526г.

Задача 78.

Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?

Ответ: в 1,5 раза.

Задача 79.

Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара - 5 см. рассмотрите два случая.

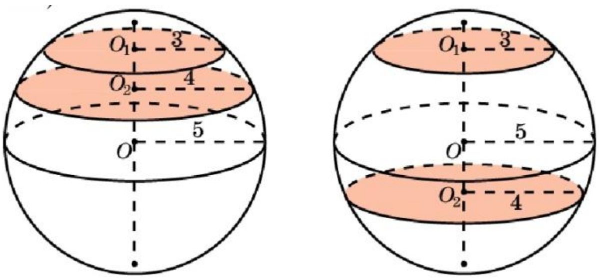


Рисунок 111 - Чертеж к задаче 79

Ответ: а) $\frac{38}{3}\pi$; б) $\frac{434}{3}\pi$.

Задача 80.

Найдите объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

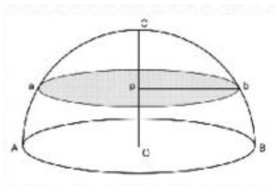


Рисунок 112 - Чертеж к задаче 80

Ответ: 19 500π.

Задача 81.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке 113, все двугранные углы которого прямые.

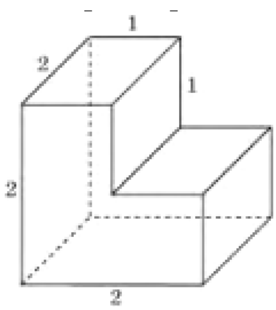


Рисунок 113 - Чертеж к задаче 81

Ответ: 18.

Задача 82.

Найдите объем пирамиды, изображенной на рисунке 114. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.

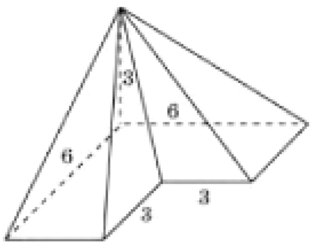


Рисунок 114 - Чертеж к задаче 82

Ответ: 27.

Задача 83.

В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень воды поднялся в 1,5 раза. чему равен объем детали?

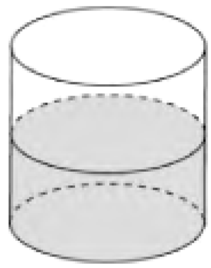


Рисунок 115 - Чертеж к задаче 83

Ответ: 3л.

Задача 84.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке 116 (все двугранные углы прямые).

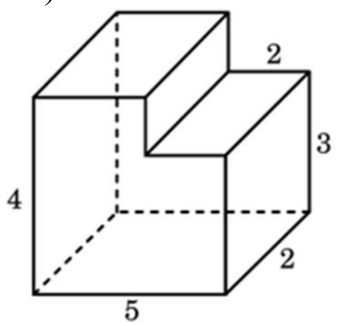


Рисунок 116 - Чертеж к задаче 84

Ответ: 36.

Задача 85.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке 117 (все двугранные углы прямые).

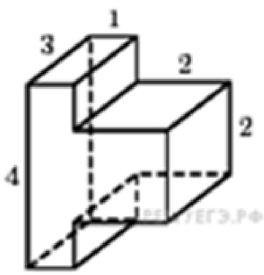


Рисунок 117 - Чертеж к задаче 85

Ответ: 24.

Задача 86.

Радиус основания конуса равен 4 , радиус описанной сферы равен 5. Найдите высоту конуса. Воспользуйтесь рисунком 95.

Ответ: 8.

Задача 87.

Найдите площадь сечения правильной усеченной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту . Высоты оснований пирамиды равны 8 и 5, высота пирамиды равна 8.

Ответ: 52.

Задача 88.

Решите задачу Архимеда: найдите отношение объема шара к объему описанного цилиндра.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5 Тестовые задания

Задание 1.Диагональ куба равна $6\sqrt{3}$, тогда ребро куба равно...

Варианты ответа:

а) 2 б) 4 в) 6 г) 8

Задание 2. Ребро куба равно $6\sqrt{3}$, тогда диагональ боковой грани равна...

Варианты ответа:

а) $3\sqrt{6}$ б) $6\sqrt{3}$ в) $4\sqrt{2}$ г) $5\sqrt{3}$

Задание 3. Если ребро куба равно $3\sqrt{3}$, то диагональ куба равна...

Варианты ответа:

а) 8 б) 9 в) 6 г) 7

Задание 4.В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 1, 3 и 5, то его диагональ составляет...

Варианты ответа:

а) $\sqrt{8}$ б) 15 в) $\sqrt{25}$ г) $\sqrt{35}$

Задание 5. Объем правильной четырехугольной призмы , высота которой равна 2, равен 32. Тогда сторона основания составляет...

Варианты ответа:

а) 2 б) 4 в) 6 г)5

Задание 6.Площадь поверхности куба составляет 54 квадратных единицы, тогда ребро куба равно...

Варианты ответа:

а) 3 б) 4 в) 5 г) 6

Задание 7. Если ребро куба равно 2,то площадь поверхности куба равна...

Варианты ответа:

а) 6 б) 8 в) 16 г) 24

Задание 8. Объем куба составляет 27 кубических единиц, тогда его ребро равно...

Варианты ответа:

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

Задание 9. Площадь поверхности куба составляет 96 квадратных единицы, тогда диагональ куба равна...

Варианты ответа:

а) $4\sqrt{3}$ б) $3\sqrt{3}$ в) $2\sqrt{3}$ г) $5\sqrt{3}$

Задание 10. Объем правильной четырехугольной призмы с высотой 1 равен 3,тогда сторона основания равна...

Варианты ответа:

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

Задание 11.Объем конуса с высотой 1 равен 27π. Тогда радиус основания конуса равен...

Варианты ответа:

а) 3 б) 5 в) 9 г) 9

Задание 12. Если радиус сферы равен 2, то площадь ее поверхности равна...

Варианты ответа:

а) 16π б) 24π в) 36π г) 81π

Задание 13.Если диагональ куба, описанного около шара, равна $4\sqrt{2}$, то радиус шара равен..

Варианты ответа:

а) 2 б) 4 в) 1 г) 8

Задание 14. Площадь боковой поверхности равностороннего цилиндра равна 64π. Тогда радиус основания равен...

Варианты ответа:

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5

Задание 15. Если радиус основания равностороннего конуса равен 3, то площадь боковой поверхности конуса равна...

Варианты ответа:

а) 6π б) 9π в) 12π г) 18π

Задание 16. Если радиус основания равностороннего цилиндра равен 2, то объем цилиндра равен...

Варианты ответа:

а) 16π б) 12π в) 18π г) 22π

Задание 17. Если площадь боковой поверхности равностороннего конуса равна 32π , то длина образующей равна...

Варианты ответа:

а) 4 б) 6 в) 8 г) 10

Задание 18. Объем шара равен 36π. Тогда его диаметр равен ...

Варианты ответа:

а) 4 б) 6 в) 8 г) 10

Задание 19.Если радиус шара, вписанного в куб, равен 2, то ребро куба равно...

Варианты ответа:

а) 2 б) 4 в) 6 г) 8

Задание 20. Если площадь боковой поверхности равностороннего конуса равна 32π , то радиус основания конуса равен...

Варианты ответа:

а) 2 б) 4 в) 6 г) 8

Заключение

В современной математике выявлено, что реальные геометрические отношения зависят от физической структуры материи. Это подтверждают исследования ученых 19-20 столетий. Современная квантовая теория все с большей настойчивостью выдвигает необходимость применения геометрии, отличной от евклидовой, к проблемам микромира.

Геометрия претендует в качестве наиболее мощного орудия точного естествознания на овладение механикой и физикой, она стоит у вершины человеческого знания. Будущее покажет.

Геометрия изучает формы, размеры, взаимное расположение предметов независимо от их других свойств - массы, цвета и т.п. Геометрия не только дает представление о фигурах, их свойствах, взаимном расположении, но и учит рассуждать, ставить вопросы, искать на них ответы, анализировать, использовать методы индукции и дедукции, сравнивать, делать выводы, то есть логически мыслить.

Список использованных источников

1 http: // www.math test.ru.
2 http: // www.webmath.ru.
3 http: // e - scince.ru.
4 http: // mathem lib.ru.
5. Сайт: mat. 1september.ru.

Приложение А

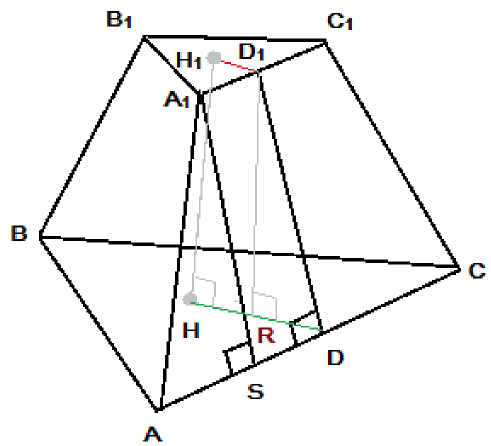


Рисунок А.1 - Треугольная усеченная пирамида

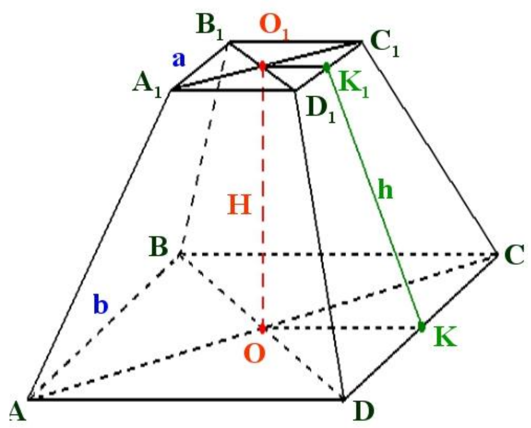


Рисунок А.2 - Четырехугольная усеченная пирамида

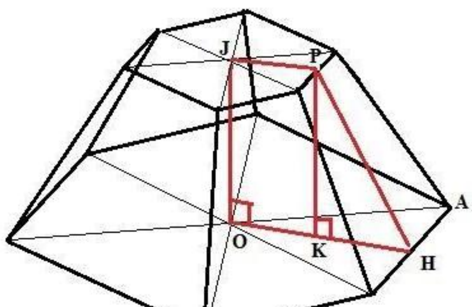


Рисунок А.3 - Шестиугольная усеченная пирамида

Приложение Б

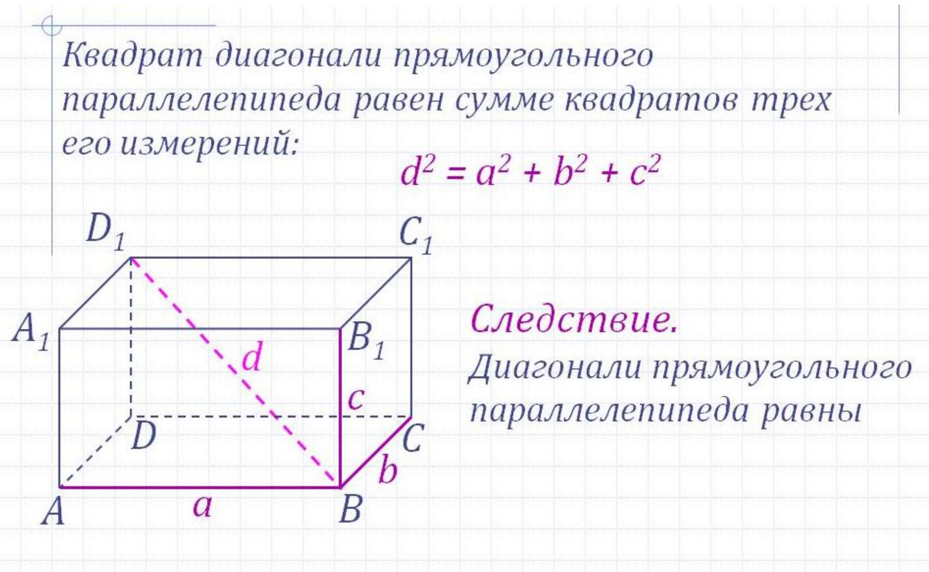


Рисунок Б.1 - Теорема о диагонали прямоугольного параллелепипеда

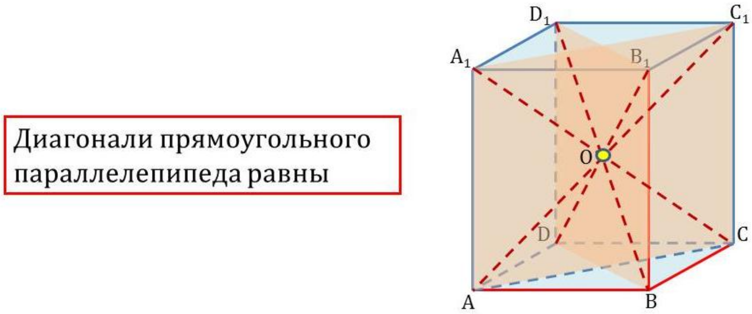


Рисунок Б2 - Чертеж к следствию рисунка Б 1

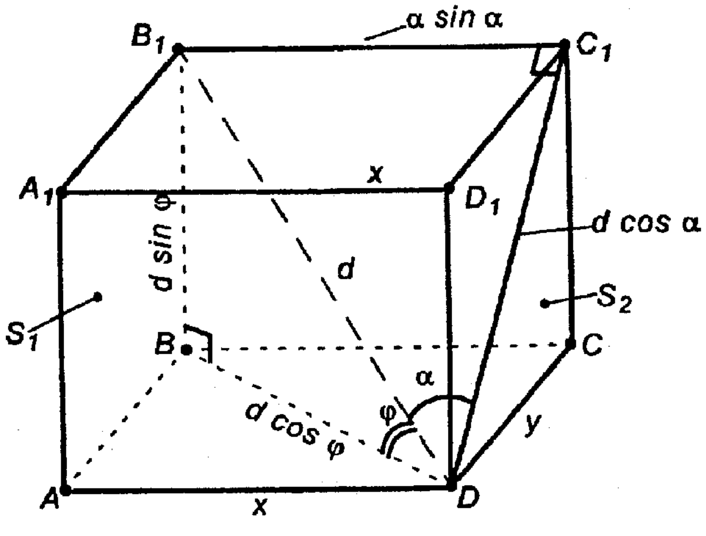


Рисунок Б.3 - Формулы связи элементов прямоугольного параллелепипеда

Приложение В

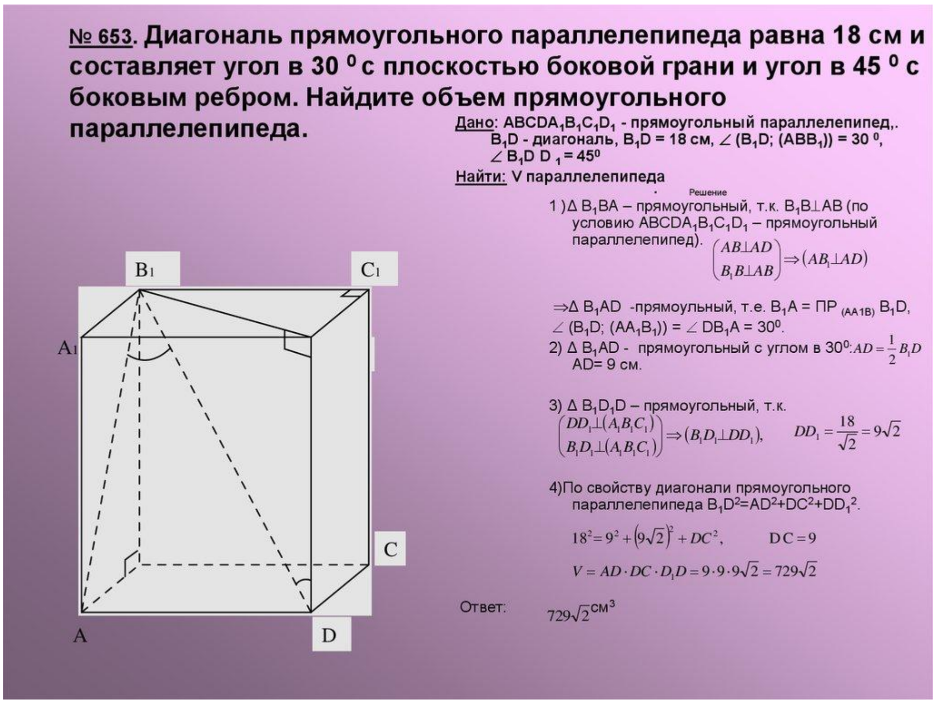
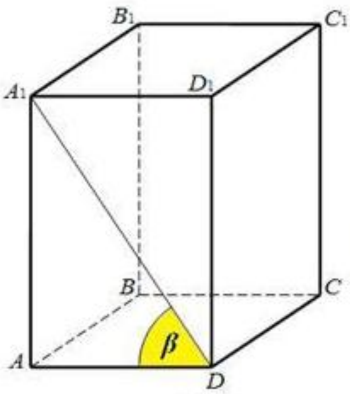


Рисунок В.1 - Нахождение объема прямоугольного параллелепипеда

В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом β. Определите площадь полной поверхности, если площадь основания равна Q.



В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат со стороной $AB = a$, боковые рёбра перпендикулярны основанию, и пусть длина бокового ребра $AA_1 = b$.

1 июня 2019 г.

Тогда площадь полной поверхности этой призмы равна $S_{\text{полн}} = 2a^2 + 4ab$ (1).

По условию $a^2 = Q$, т.е. $a = \sqrt{Q}$.

Угол между диагональю боковой грани призмы и плоскостью основания – это угол между этой диагональю и её проекцией на плоскость основания. На рисунке такой диагональю является отрезок A_1D, а её проекция на плоскость основания – отрезок AD – сторона квадрата $ABCD$. Поэтому $\angle A_1DA = \beta$ и $AD = a = \sqrt{Q}$. Тогда $b = \sqrt{Q} \cdot \mathrm{tg}\beta$

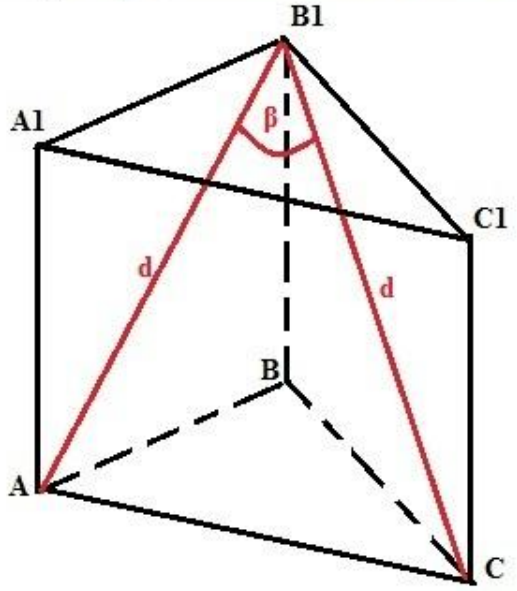
Подставим a и b в формулу (1) и получим:

$$S_{\text{полн}} = 2Q + 4\sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q} \cdot \mathrm{tg}\beta = 2Q(1 + 2\mathrm{tg}\beta).$$

Рисунок В.2 - Нахождение площади поверхности прямоугольного параллелепипеда

Приложение Г

Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна d и образует с диагональю боковой грани, которая выходит из той же вершины, угол β. Найдите площадь полной поверхности призмы.

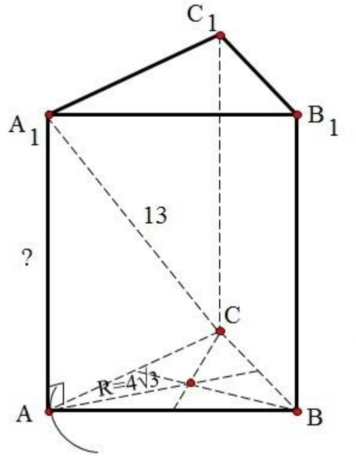


Основание правильной треугольной призмы - правильный треугольник, а боковые грани - равные прямоугольники.
Следовательно, диагонали боковых граней тпкже равны.
Тогда по теореме косинусов в треугольнике AB1C имеем:
$AC^2 = 2d^2 - 2d^2\text{Cos}\beta = 2d^2(1-\text{Cos}\beta)$.
$AC = d\sqrt{(2(1-\text{Cos}\beta))}$.
Высота призмы (AA1) равна по Пифагору: $AA1 = \sqrt{(d^2 - 2d^2(1-\text{Cos}\beta))}$.
Площадь основания $So = (\sqrt{3}/4)*a^2$ **(формула, где a - сторона треугольника).**
$So = (\sqrt{3}/4)*2d^2(1-\text{Cos}\beta)$.
Площадь боковой грани $Sг = AC*AA1 = d\sqrt{(2(1-\text{Cos}\beta))}*d\sqrt{(1 - 2(1-\text{Cos}\beta))}$.
Площадь полной поверхности призмы - это сумма двух площадей оснований и трех боковых граней.
$Sп = (\sqrt{3}/4)*4d^2(1-\text{Cos}\beta) + 3d^2\sqrt{(2(1-\text{Cos}\beta))}*\sqrt{(1 - 2(1-\text{Cos}\beta))}$ **или**
$Sп = \sqrt{3}*d^2*(1-\text{Cos}\beta) + 3d^2*\sqrt{(2(1-\text{Cos}\beta))}*\sqrt{(1 - 2(1-\text{Cos}\beta))}$ **или**
$Sп = d^2*(\sqrt{3}*(1-\text{Cos}\beta) + 3*\sqrt{[(2(1-\text{Cos}\beta))*(1-2(1-\text{Cos}\beta))]}$

Рисунок Г - Нахождение площади поверхности правильной треугольной призмы

Приложение Д

В правильной треугольной призме радиус описанной вокруг основания окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Вычислите высоту призмы, если диагональ боковой грани равна 13 см.



Радиус описанной около правильного треугольника окружности:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Сторона, через радиус описанной окружности:

$$a = \sqrt{3}R$$

$$a = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4 = 12$$

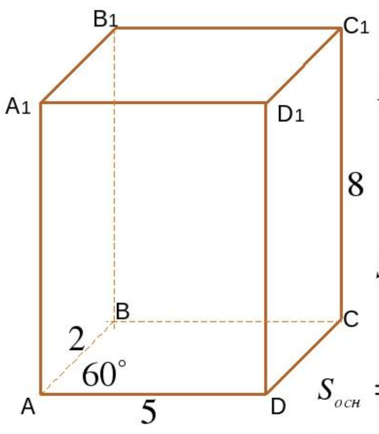
Тогда AC=12.

Из ΔA_1AC найдём A_1A по теореме Пифагора:

$$A_1A = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: $A_1A = 5$ см.

Рисунок Д.1 - Нахождение высоты правильной треугольной призмы



$$S_{бок} = P_{осн}H \cdot$$

$$P_{осн} = (AB + AD) \cdot 2$$

$$P_{осн} = (5 + 2) \cdot 2 \qquad S_{бок} = 14 \cdot 8$$

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ$$

$$S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ$$

$$S_{осн} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \qquad S_{полн} = 10\sqrt{3} + 112$$

$$V = S_{осн} \cdot H \qquad V = 5\sqrt{3} \cdot 8$$

Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм со сторонами 2 см и 5 см и острым углом 60 градусов. Боковое ребро призмы 8 см. . Найти площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

Рисунок Д.2 - Нахождение площади поверхности и объема призмы, основание которой - параллелограмм

Приложение Е

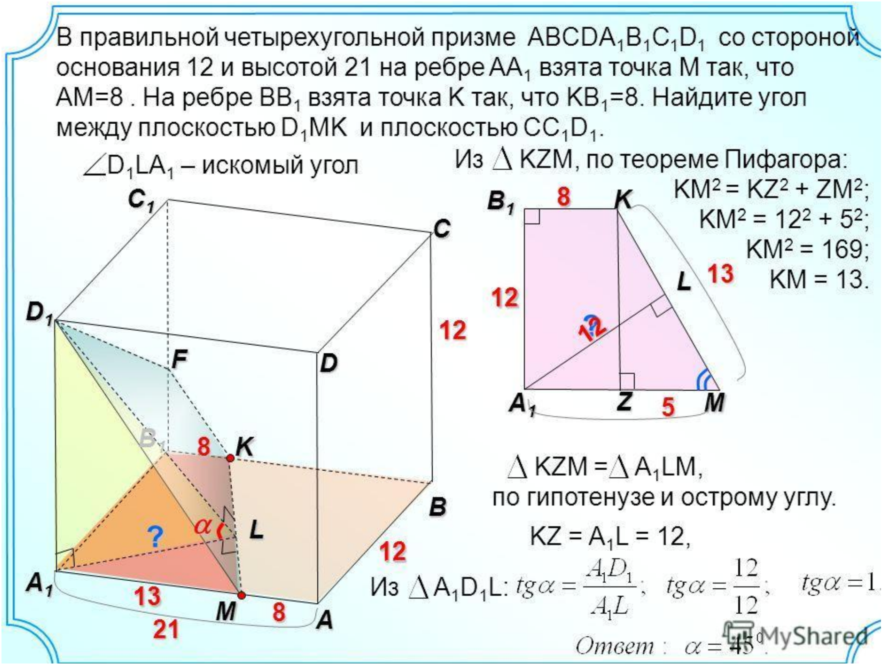


Рисунок Е.1 - Нахождение угла наклона сечения куба к плоскости основания

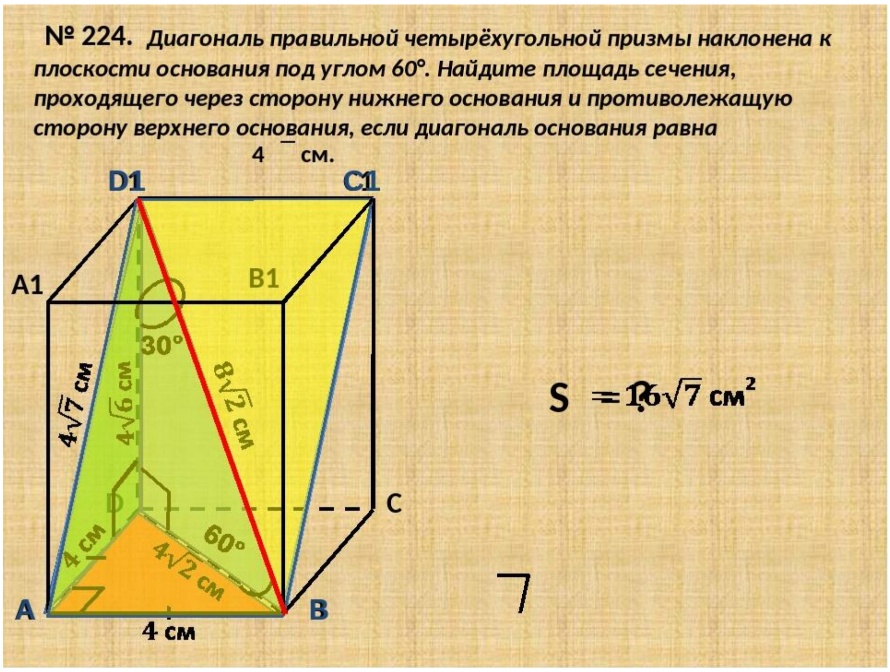
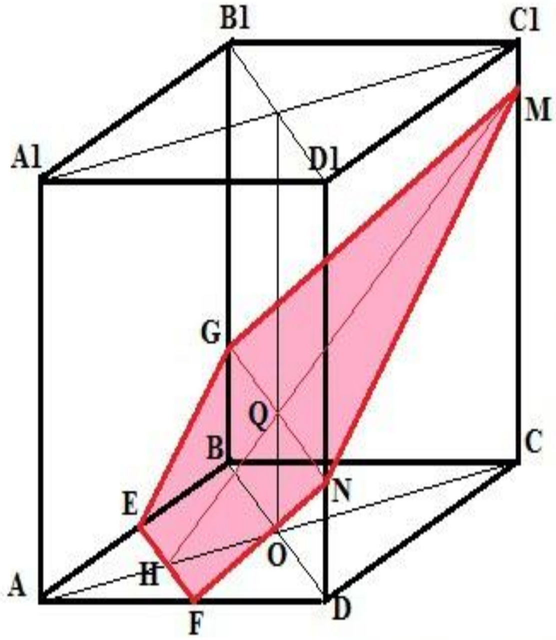


Рисунок Е. 2 - Нахождение площади сечения прямоугольного параллелепипеда

Приложение Ж

В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Найти площадь полученного сечения и острый угол его, если сторона основания призмы равна b.

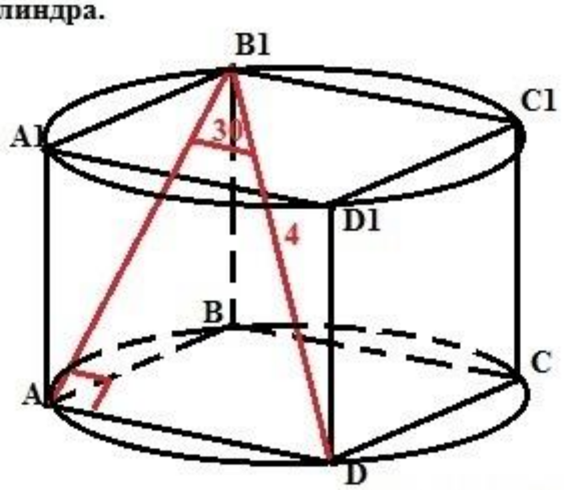


Правильная четырехугольная призма - это шестигранник, основаниями которого являются два равных квадрата, а боковые грани представляют собой равные прямоугольники.
Диагональ основания (квадрата) равна $b\sqrt{2}$.
Тогда: $AC=BD=b\sqrt{2}$.
$EF=b\sqrt{2}/2$.
$GN=BD=b\sqrt{2}$.
$HC=(3/4)*AC=(3/4)*b\sqrt{2}$.
$HM=HC/\cos\alpha=3*b\sqrt{2}/(4\cos\alpha)$.
$HQ=(1/3)*HM=b\sqrt{2}/(4\cos\alpha)$.
$QM=(2/3)*HM=2*b\sqrt{2}/(4\cos\alpha)$.
Площадь сечения - фигура, состоящая из трапеции BEFD с основаниями BD и EF и высотой HQ.
Площадь трапеции равна: $(EF+GN)*HQ/2=(b\sqrt{2}/2+b\sqrt{2})*b\sqrt{2}/(8\cos\alpha)=3b^2/(8\cos\alpha)$.
Площадь треугольника равна: $(1/2)*GN*QM$ или $(1/2)*b\sqrt{2}*b\sqrt{2}/(2\cos\alpha)$. Или $b^2/(2\cos\alpha)$.
Площадь сечения равна: $3b^2/(8\cos\alpha)+b^2/(2\cos\alpha)=7b^2/(8\cos\alpha)$.
Тангенс половины острого угла GMN сечения равен $QN/QM=(b\sqrt{2}/2)/b\sqrt{2}/(2\cos\alpha)=\cos\alpha$.
По формуле приведения $Tg(2x)=2tgx/1+tg^2x$.
В нашем случае $tg(\angle GMN)=2\cos\alpha/(1+\cos^2\alpha)$. (Дальше - тригонометрия).
Ответ: $S=7b^2/(8\cos\alpha)$. Искомый угол равен $arctg(2\cos\alpha/(1+\cos^2\alpha))$.

Рисунок Ж - Нахождение площади сечения правильной четырехугольной призмы

Приложение З

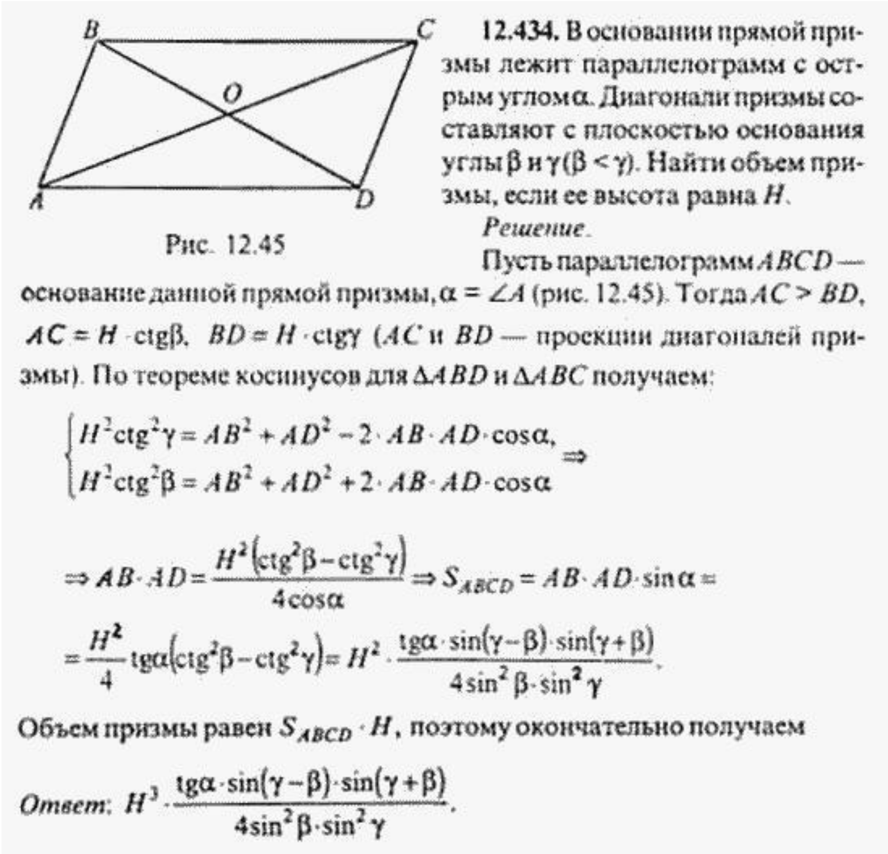
Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 4 и составляет с плоскостью боковой грани угол 30°. Найти объем призмы и описанного около нее цилиндра.



В прямоугольном треугольнике AB1D (<B1AD=90°, так как плоскости AA1B1B и ABCD - грани призмы - взаимно перпендикулярны). Против угла 30° лежит катет AD (сторона квадратк - основания), равный половине гипотенузы (диагонали призмы).
AD=AB=BC=DC=2.
Тогда диагональ квадрата $BD=2\sqrt{2}$ и боковое ребро (высота призмы) равно $\sqrt{(B1D^2-BD^2)}=\sqrt{(16-8)}=2\sqrt{2}$.
Объем призмы $V=So*h = 4*2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.
радиус описанной около основания (квадрата) окружности (основания цилиндра равен диагонали квадрата: $Rц=2\sqrt{2}$, высота цилиндра = высоте призмы$=2\sqrt{2}$. Объеи цилиндра:
$Vц=So*h =\pi R^2*h=16\sqrt{2}*\pi$.
Ответ: $Vп=8\sqrt{2}$, $Vц=16\sqrt{2}*\pi$.

Рисунок З - Нахождение объема призмы и описанного около нее цилиндра

Приложение И



B C O A D

Рис. 12.45

12.434. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α. Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы β и γ $(\beta < \gamma)$. Найти объем призмы, если ее высота равна H.

Решение.

Пусть параллелограмм $ABCD$ — основание данной прямой призмы, $\alpha = \angle A$ (рис. 12.45). Тогда $AC > BD$, $AC = H \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $BD = H \cdot \operatorname{ctg}\gamma$ (AC и BD — проекции диагоналей призмы). По теореме косинусов для ΔABD и ΔABC получаем:

$$\begin{cases} H^2\operatorname{ctg}^2\gamma = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha, \\ H^2\operatorname{ctg}^2\beta = AB^2 + AD^2 + 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB\cdot AD = \frac{H^2\left(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\gamma\right)}{4\cos\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{H^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\gamma\right) = H^2\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(\gamma-\beta)\cdot\sin(\gamma+\beta)}{4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

Объем призмы равен $S_{ABCD}\cdot H$, поэтому окончательно получаем

Ответ: $H^3\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(\gamma-\beta)\cdot\sin(\gamma+\beta)}{4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}$.

Рисунок И.1 - Нахождение площади поверхности и объема призмы, основание которой - параллелограмм, в параметрах

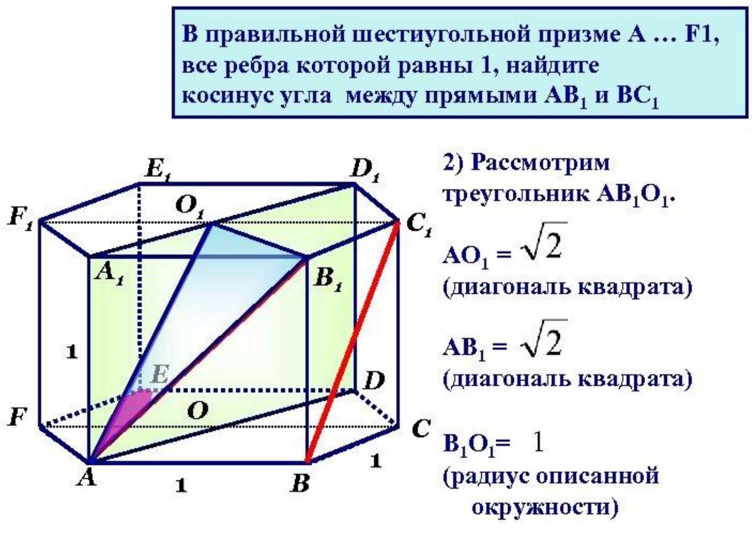


Рисунок И.2 - Нахождение угла между скрещивающимися ребрами в правильной шестиугольной призме

Приложение К

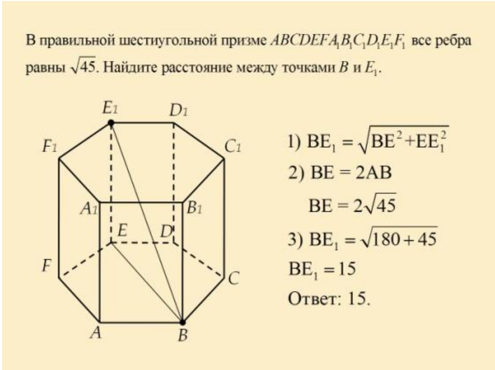


Рисунок К.1 - Нахождение диагонали правильной шестиугольной призмы

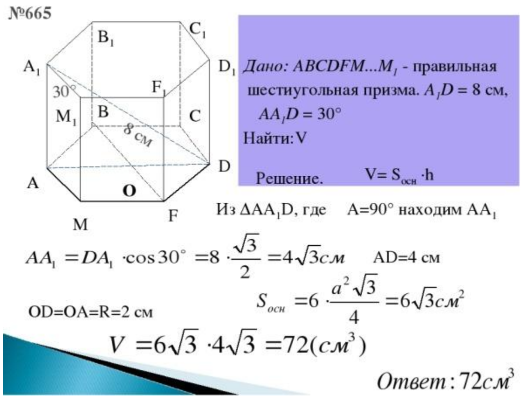


Рисунок К.2 - Нахождение объема правильной шестиугольной призмы

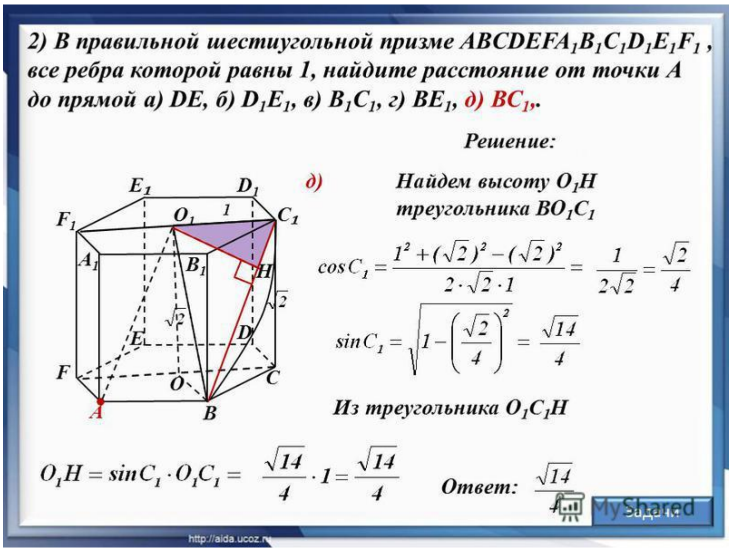


Рисунок К.3 - Нахождение расстояний между скрещивающимися ребрами правильной шестиугольной призмы

Приложение Л

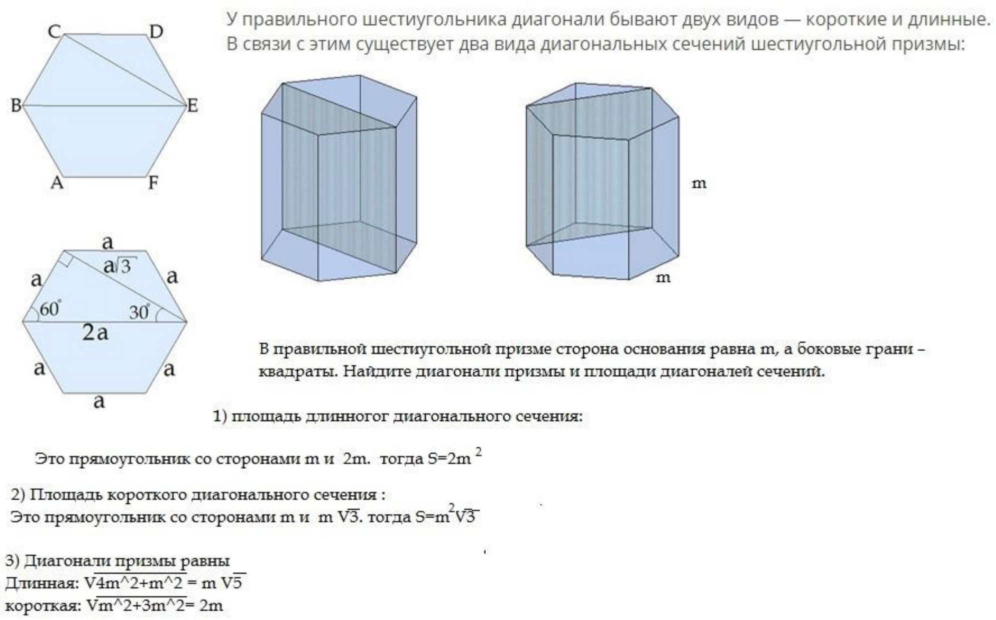


Рисунок Л.1 - Нахождение диагоналей правильной шестиугольной призмы

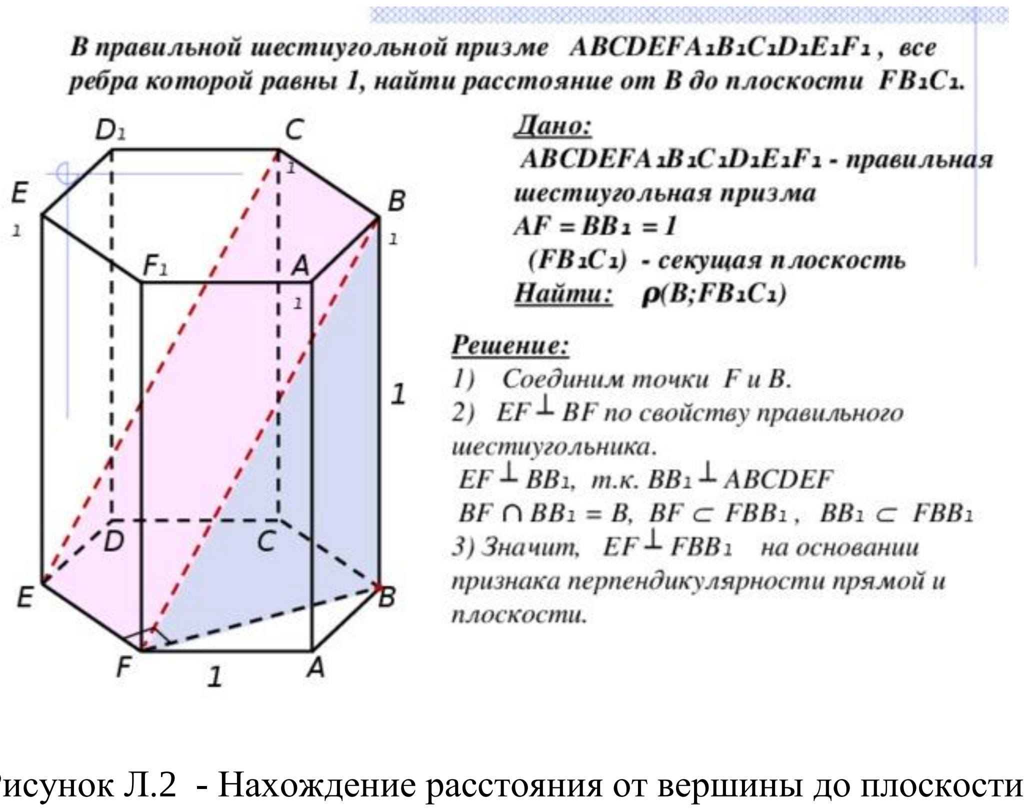


Рисунок Л.2 - Нахождение расстояния от вершины до плоскости диагонального сечения в правильной шестиугольной призме

Приложение М

Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды SABCD равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB .

Решение:

Т.к. пирамида правильная. то основанием является квадрат. BO = 6/2 = 3см. Треугольник SOB - прямоугольный. По теореме Пифагора SB в квадрате равняется SO в квадрате + OB в квадрате. SB в квадрате равняется 3 в квадрате + 4 в квадрате = 9 + 16 = 25, отсюда SB = 5см

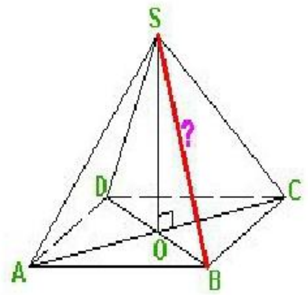
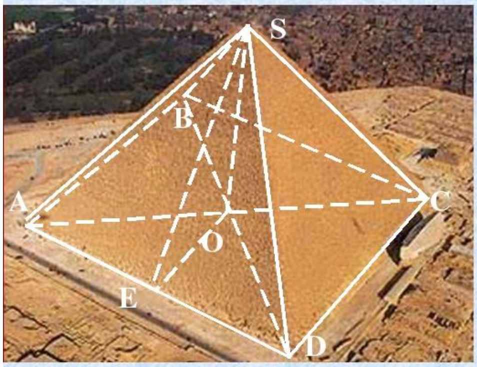


Рисунок М.1 - Нахождение бокового ребра в правильной четырехугольной пирамиде

Рисунок М.2 - Нахождение бокового ребра в правильной шестиугольной пирамиде

Приложение Н

4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды Хеопса, сторона основания которой равна 230 м и высота 138 м.



Решение:

1. Sб.пов=4Sтр

2. AC ∩ BD = O

3. Пирамида правильная ⇒ SO ⊥ (ABC)

4. OE ∥ CD ⇒ OE ⊥ AD ⇒

5. SE ⊥ AD (по теореме о 3 перпендикулярах)

6. Δ SOE – п\у

по т. Пифагора

$ES^2 = EO^2 + OS^2 = 115^2 + 138^2 =$

$= 13225 + 19044 = 32269$

ES ≈ 180

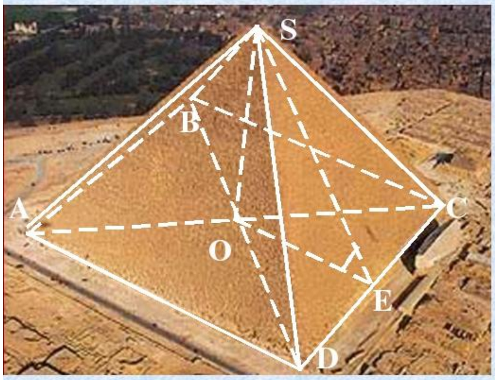
7. ES - высота ΔASD

$S_{ASD} = 0,5\ ES \cdot AD = 0,5 \cdot 180 \cdot 230 = 20700$ м²

8. $S_{б.пов} = 4S_{тр} = 4 \cdot 20700 = 82800$ м² **Ответ: 82800 м²**

Рисунок Н.1 - Нахождение площади боковой поверхности пирамиды Хеопса

1. В основании пирамиды Хеопса – квадрат со стороной 230м, тангенс угла наклона боковой грани к основанию равен 1,2. Найти высоту самой высокой египетской пирамиды, если основание ее лежит в центре квадрата.



Решение:

1. AC ∩ BD = O

2. Пирамида правильная ⇒

SO ⊥ (ABC)

3. OE ∥ AD ⇒ OE ⊥ CD ⇒

4. SE ⊥ CD (по теореме о 3 перпендикулярах)

5. Δ SOE – п\у tg E = SO : OE

6. OE = 0,5AD =115м

7. SO = OE · tg E = 115 · 1,2 = 138 м

Ответ: 138 м.

Рисунок Н.2 - Нахождение высоты пирамиды Хеопса

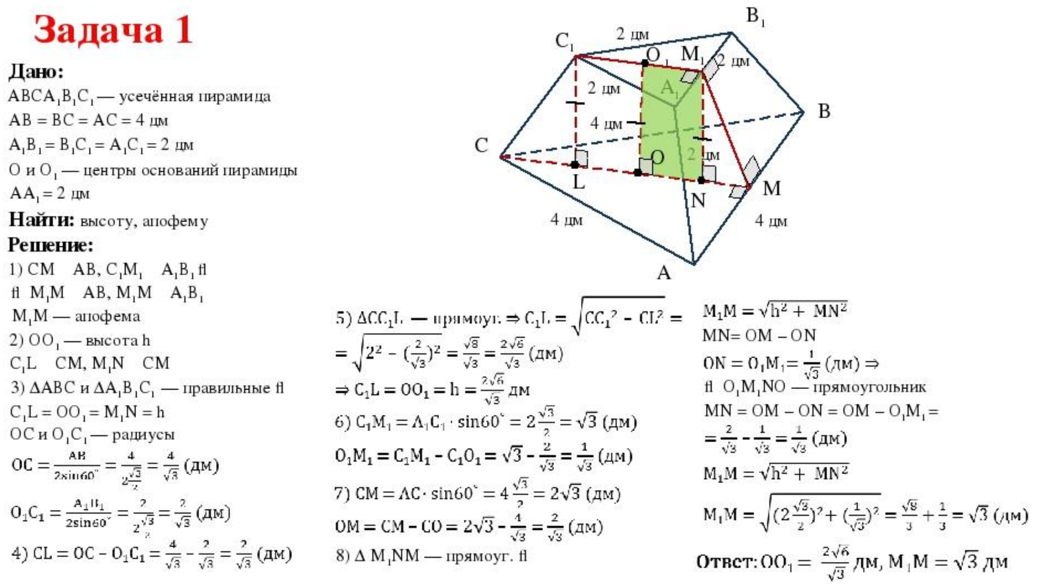


Рисунок О.1 - Нахождение высоты и апофемы правильной треугольной усеченной пирамиды

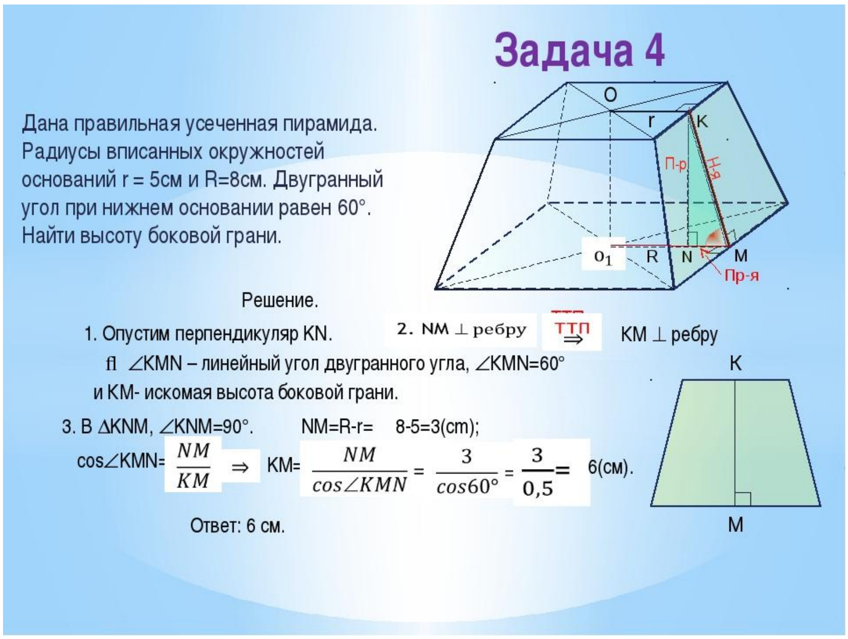
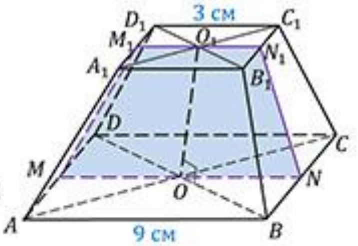


Рисунок О.2 - Нахождение апофемы правильной четырехугольной усеченной пирамиды

Приложение П

Задача. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 3 см и 9 см. Высота пирамиды равна 4 см. Найти площадь боковой поверхности.



Решение.

$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

$OO_1 \perp ABC \Rightarrow AC \cap BD = O$

$MN \parallel AB$

$M_1N_1 \parallel A_1B_1$

$MM_1N_1N = AA_1B_1B = BB_1C_1C = CC_1D_1D = DD_1A_1A$

$MM_1 = NN_1$ – апофемы усеченной пирамиды

$MP = PH = HN = 3$ см

$MM_1 = \sqrt{MP^2 + M_1P^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (см)

$S_{бок} = \frac{1}{2}\left(P_{ABCD} + P_{A_1B_1C_1D_1}\right) \cdot MM_1 = \frac{1}{2}(4 \cdot 3 + 4 \cdot 9) \cdot 5 = 120$ (см^2)

Ответ: 120 см^2.

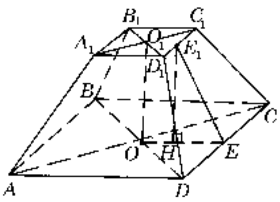
Рисунок П.1 - Нахождение площади боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды

314. **Дано:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида

$OO_1 = 63$ см, $EE_1 = 65$ см

$AB : A_1B_1 = 7 : 3$

Найти: AB; A_1B_1 – ?



Решение:

1) Рассмотрим ΔE_1HE: $\angle H = 90°$; $E_1H = 63$ см; $E_1E = 65$ см

$HE = \sqrt{E_1E^2 - E_1H^2} = \sqrt{65^2 - 63^2} = 16$ см

2) $AB : A_1B_1 = (A_1B_1 + 32) : B_1A_1 = 7 : 3$

$3A_1B_1 + 96 = 7A_1B_1$

$4A_1B_1 = 96$

$A_1B_1 = 24$ см $\Rightarrow AB = 24 + 32 = 56$ см

Ответ: 24 см, 56 см.

Рисунок П.2 - Нахождение сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды

Приложение Р

Задача 2

Дано: цилиндр

ABCD — осевое сечение

AC = 48 см

$\angle ACD = 60°$

Найти:

а) CD (высота)

б) AO (радиус)

в) $S_{осн.}$

Решение:

а) ABCD — прямоугольник $\Rightarrow \angle ADC = 90°$

ΔADC: $\angle ACD = 60°$, $\angle ADC = 90° \Rightarrow \angle CAD = 30°$

$CD = AC : 2 = 48 : 2 = 24$ (см)

б) AO — радиус, AD — диаметр

$AD = AC \cdot \sin 60° = \frac{48 \cdot \sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ (см)

$AO = AD : 2 = 24\sqrt{3} : 2 = 12\sqrt{3}$ (см)

в) $S_{осн.} = \pi r^2 = \pi(12\sqrt{3})^2 = 144 \cdot 3\pi = 432\pi$ (см^2)

Ответ: CD = 24 см, $AO = 12\sqrt{3}$ см, $S_{осн.} = 432\pi$ см^2

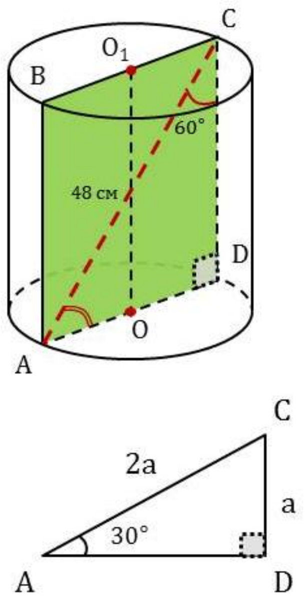


Рисунок Р.1 - Нахождение высоты и радиуса основания цилиндра

Рисунок Р.2 - Устное нахождение элементов цилиндра

Приложение С

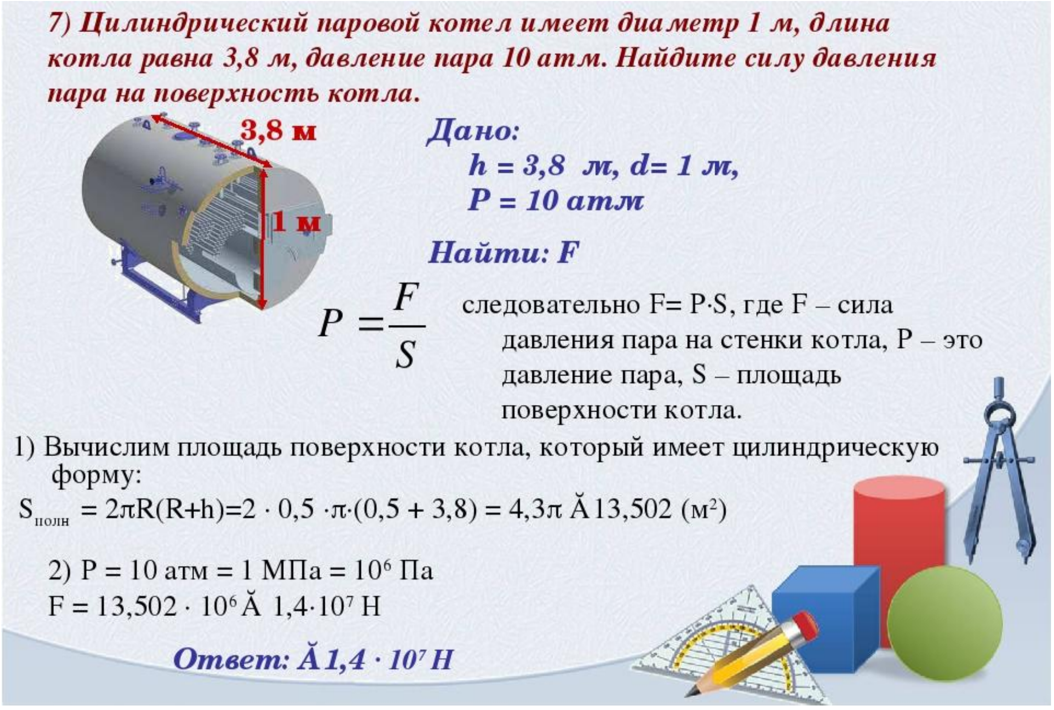
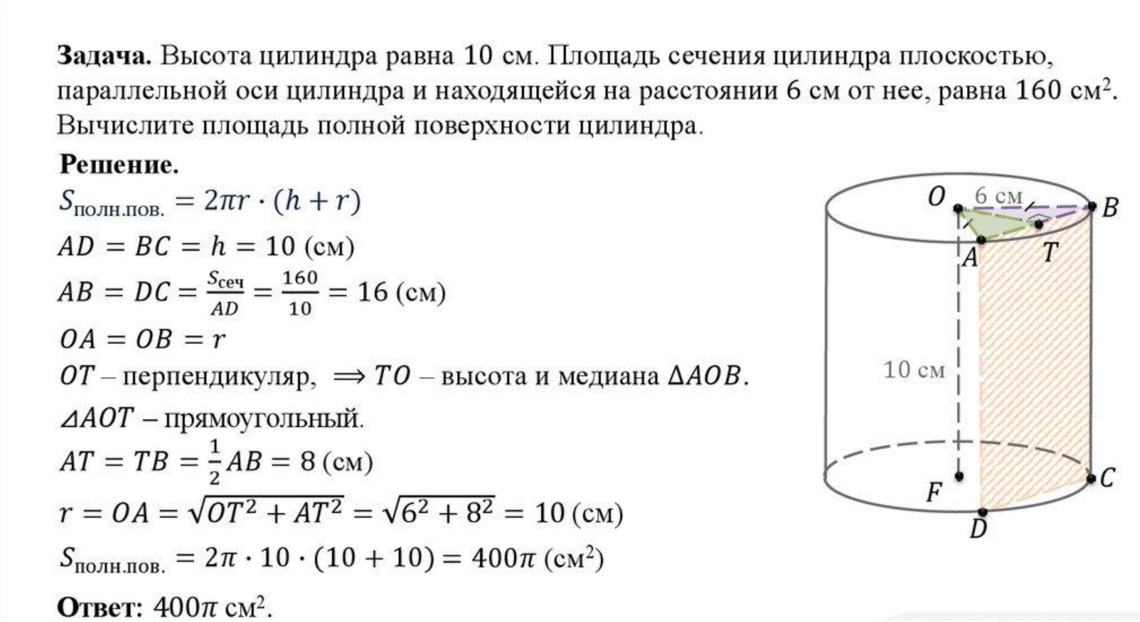


Рисунок С.1 - Прикладная задача с использованием цилиндра



Задача. Высота цилиндра равна 10 см. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и находящейся на расстоянии 6 см от нее, равна 160 $см^2$. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

Решение.

$S_{полн.пов.} = 2\pi r \cdot (h + r)$

$AD = BC = h = 10$ (см)

$AB = DC = \frac{S_{сеч}}{AD} = \frac{160}{10} = 16$ (см)

$OA = OB = r$

OT – перпендикуляр, $\Rightarrow TO$ – высота и медиана ΔAOB.

ΔAOT – прямоугольный.

$AT = TB = \frac{1}{2} AB = 8$ (см)

$r = OA = \sqrt{OT^2 + AT^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см)

$S_{полн.пов.} = 2\pi \cdot 10 \cdot (10 + 10) = 400\pi$ ($см^2$)

Ответ: 400π $см^2$.

Рисунок С.2 - Нахождение площади поверхности цилиндра

Приложение Т

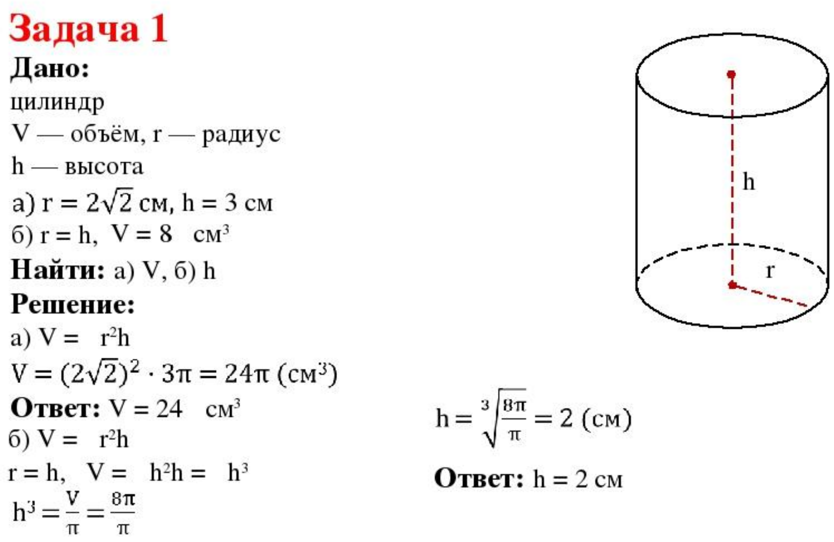


Рисунок Т.1 - Нахождение объема цилиндра

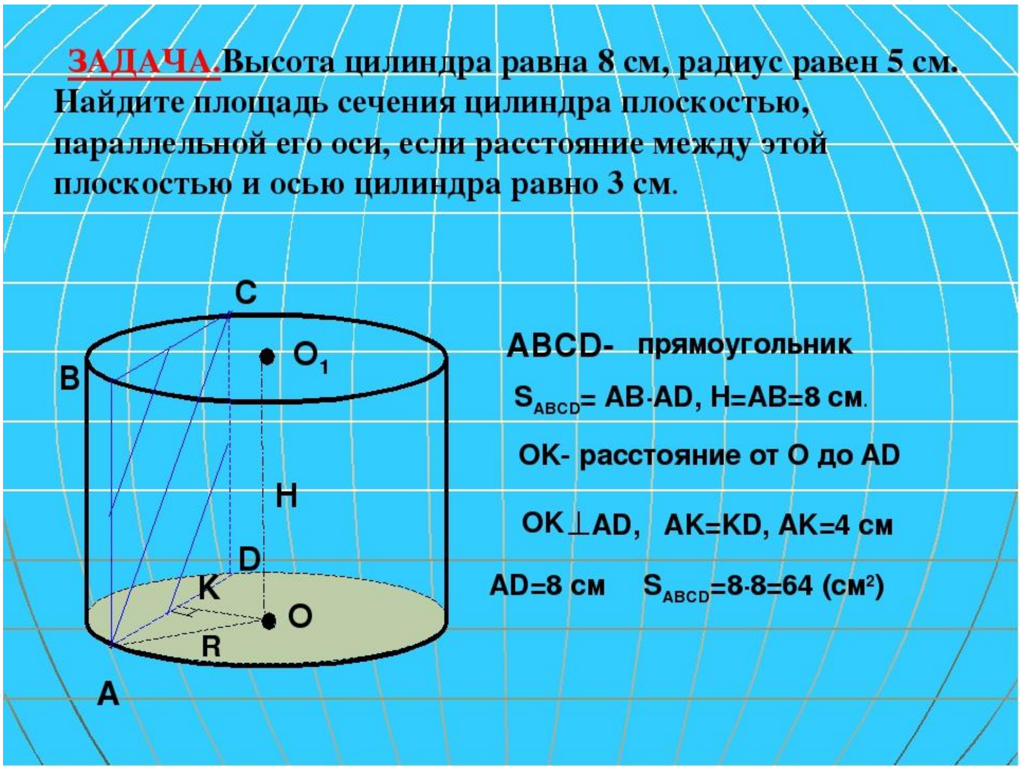


Рисунок Т.2 - Нахождение площади сечения цилиндра

Приложение У

Рисунок У.1 - Нахождение площади сечения конуса

Рисунок У.2 - Нахождение объема конуса

Приложение Ф

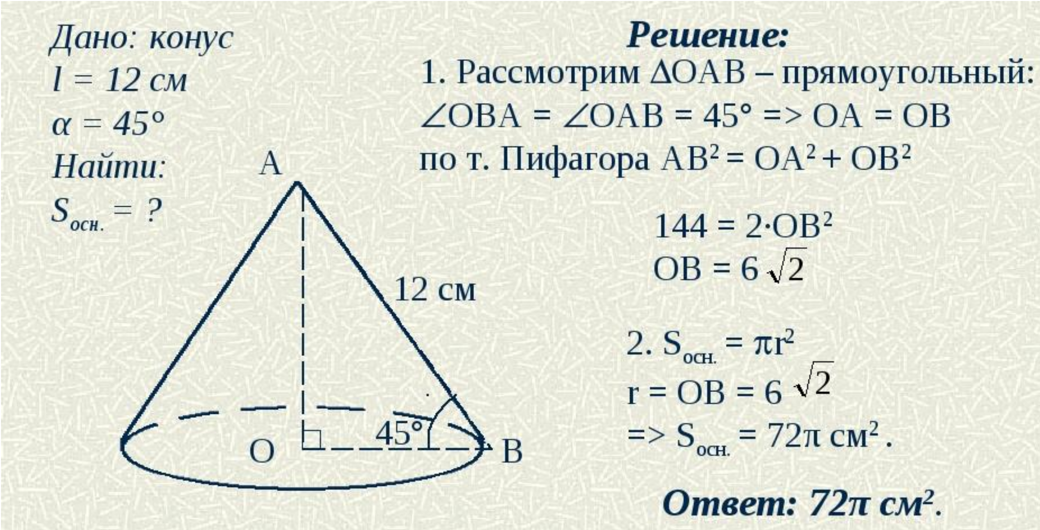


Рисунок Ф.1 - Нахождение площади основания конуса

11.098. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем конуса.

Решение.

Объем конуса $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (рис. 11.85). Площадь осевого сечения $Q = \frac{1}{2}2RH = RH$. По условию $S_{бок} = 2S_{осн}$. Отсюда $\pi Rl = 2\pi R^2$ и $l = 2R$. Из рисунка $l^2 = H^2 + R^2 = 4R^2$. Отсюда $H = R\sqrt{3}$, а также $H = \frac{Q}{R}$. Тогда $\frac{Q}{R} = R\sqrt{3}$ и получаем $R = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$. Окончательно получаем: $V_к = \frac{1}{3}\pi RH \cdot R = \frac{1}{3}\pi \frac{Q\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt[4]{3}}\pi Q\sqrt{Q}$.

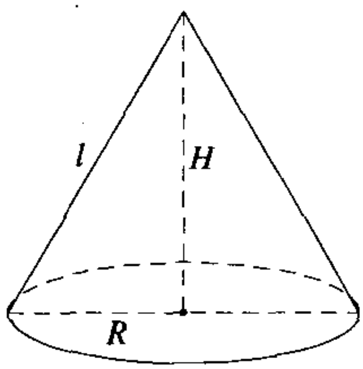


Рисунок Ф.2 - Нахождение объема конуса по площади его основания

Приложение Х

Дано: усечённый конус

$r = 5$ см, $R = 11$ см

$l = 10$ см

Найти: а) h, б) $S_{ссч.}$

Решение:

а) $A_1O_1 = 5$ см, $AO = 11$ см

$A_1P = OO_1 = h$ — высота

ΔA_1PA — прямоуг., $P = 90°$

$AP = AO - PO = AO - A_1O_1 = 11 - 5 = 6$ (см)

$AP = 6$ см, $A_1A = 10$ см

$A_1P = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (см)

б) $S_{ссч.} = \frac{AB + A_1B_1}{2} h$

$OO_1 = A_1B = 6$ см, $A_1B_1 = 2\ A_1O_1 = 10$ (см)

$AB = 2\ AO = 22$ (см)

$S_{тр.} = \frac{10 + 22}{2} \cdot 8 = 128$ (см^2)

Ответ: $h = 8$ см, $S_{сеч.} = 128$ см^2

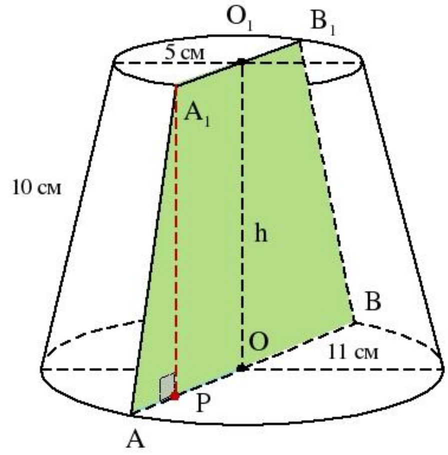


Рисунок Х.1 - Нахождение высоты и площади осевого сечения усеченного конуса

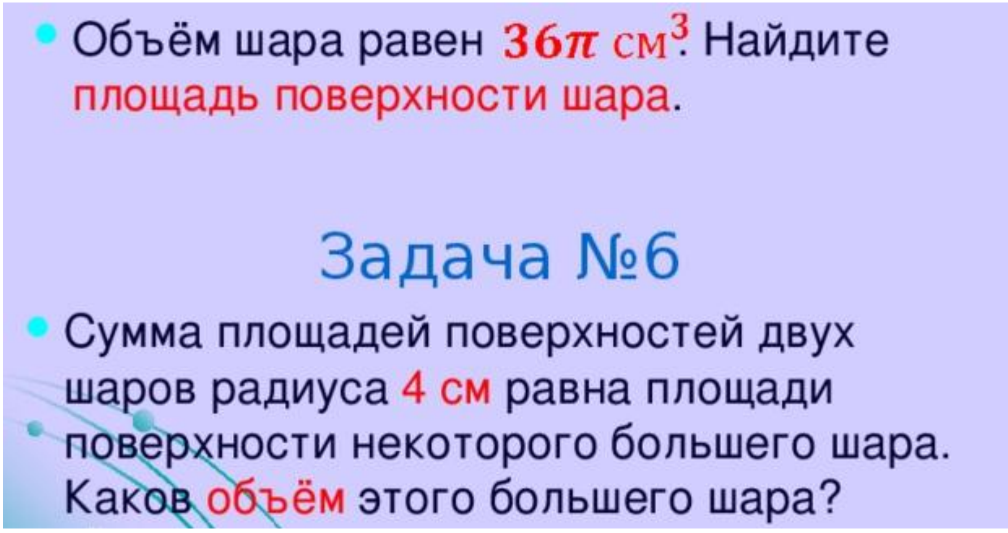
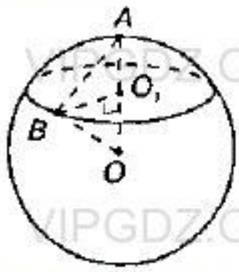


Рисунок Х.2 - Нахождение площади поверхности и объема шара

Приложение Ц

Рисунок Ц.1 - Нахождение количества расходных материалов на изготовление футбольного мяча

35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки, которой удалены (по прямой) от A на 15 см. Найдите радиус этой окружности.



Радиус шара равен половине диаметра.

Так что $AO = OB = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$ (см).

Далее, ΔAOB равнобедренный (так как $OB = OA$) и $AB = 15$ см.

Найдем площадь ΔAOB по формуле:

$S_{AOB} = \sqrt{p \cdot (p - AO) \cdot (p - OB) \cdot (p - AB)} =$

$= \sqrt{20 \cdot (20 - 12{,}5) \cdot (20 - 12{,}5) \cdot (20 - 15)} = 75$(см). Но $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO_1$.

Так что $R = BO_1 = \frac{2S_{AOB}}{AO} = \frac{2 \cdot 75}{15} = 10$(см).

Ответ: 10 см.

Рисунок Ц.2 - Нахождение радиуса сечения шара

Приложение Ч

Задача 1

Дано:
шар
R — радиус шара
$S = 64\pi$ см^2
Найти: $R_{шара}$, $V_{шара}$
Решение:
1) Найдём радиус:
$S = 4\pi R^2$
$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$
$R = \sqrt{\frac{64\pi}{4\pi}} = \sqrt{16} = 4$ (см)
2) Вычислим объём:
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4 \cdot 4^3}{3}\pi = \frac{256}{3}\pi$ (см^3)
Ответ: $R_{шара} = 4$ см, $V_{шара} = \frac{256}{3}\pi$ см^3

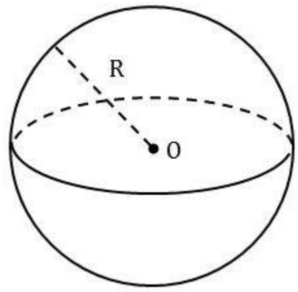
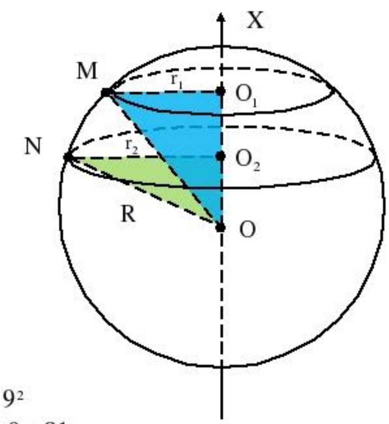


Рисунок Ч.1 - Нахождение радиуса и объема шара по известной площади его поверхности

Задача 2

Дано:
шар
r_1, r_2 — радиусы сечений
$r_1 = 9$ см, $r_2 = 12$ см
$O_1O_2 = 3$ см (расстояние между сечениями)
Найти: $V_{шара}$
Решение:
1) Найдём радиус шара:
Проведём ось OX плоскостям сечений, она пройдёт через точки O_1 и O_2
ΔOO_1M и ΔOO_2N — прямоуг.
$OO_2 = x$
$ON^2 = OO_2{}^2 + O_2N^2 = x^2 + r_2{}^2 =$
$= x^2 + 12^2$
$OO_1 = OO_2 + O_1O_2 = x + 3$
$OM^2 = OO_1{}^2 + O_1M^2 = (x+3)^2 + r_1{}^2 =$
$= (x+3)^2 + 9^2$



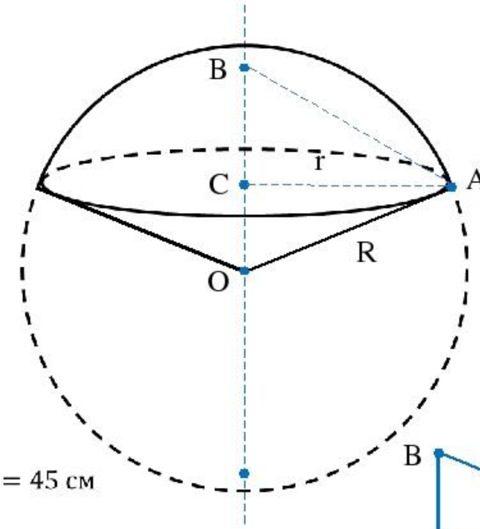
$OM = ON = R$
$x^2 + 12^2 = (x+3)^2 + 9^2$
$x^2 + 144 = x^2 + 6x + 9 + 81$
$6x = 54$ fl $x = 9$
$OO_2 = 9$
$R = ON = \sqrt{OO_2{}^2 + O_2N^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$
$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4500\pi$
Ответ: $V_{шара} = 4500$

Рисунок Ч.2 - Нахождение объема шара по известным радиусам его сечений

Приложение Ш

Задача 3.

Дано: шаровой сектор
r = 60 см
R = 75 см
Найти: $V_{\text{шар. сект.}}$



Решение:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

AO = OB = R fl h = CB = R – CO;

ΔAOC — прямоугольный;

$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = \sqrt{2025} = 45$ см

h = R – CO = 75 – 45 = 30 см

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2 \cdot 75^2 \cdot 3}{3}\pi = 112500\pi.$

Ответ: 112 500π $см^3$.

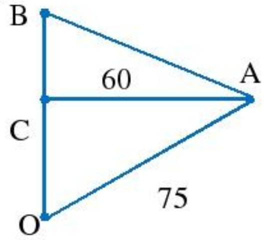


Рисунок Ш.1 - Нахождение объема шарового сектора

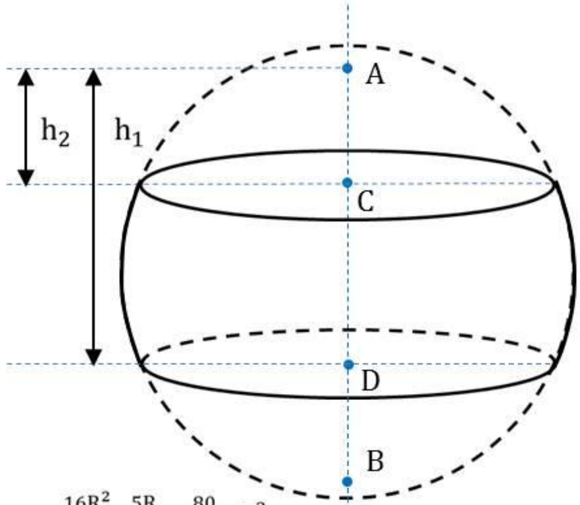
Задача 1.

Дано: шаровой слой

R — радиус шара, $(C, D) \in AB$

AB — диаметр $AC = CD = DC$

Найти: $V_{\text{шар. слоя}}$



Решение:

$\boxed{V = V_{\text{шар. сегм.1}} - V_{\text{шар. сегм.2}}}$ $AB = 2R;$

$h_1 = AD;\ \ h_2 = AC;$

$h_1 = AD = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}R;\ \ h_2 = AC = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}R;$

$$\boxed{V = \pi h^2 (R - \tfrac{1}{3}h)}$$

$V_{\text{шар. сегм.1}} = \pi {h_1}^2 (R - \frac{1}{3}h_1) = \pi (\frac{4R}{3})^2\ (R - \frac{4R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{16R^2}{9} \cdot \frac{5R}{9} = \frac{80}{81}\pi R^3;$

$V_{\text{шар. сегм.2}} = \pi {h_2}^2 (R - \frac{1}{3}h_2) = \pi (\frac{2R}{3})^2\ (R - \frac{2R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{4R^2}{9} \cdot \frac{7R}{9} = \frac{28}{81}\pi R^3;$

$V = V_{\text{шар. сегм.1}} - V_{\text{шар. сегм.2}} = \frac{80}{81}\pi R^3 - \frac{28}{81}\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3.$ **Ответ:** $\frac{52}{81}\pi R^3$.

Рисунок Ш.2 - Нахождение объема шарового слоя

Приложение Щ

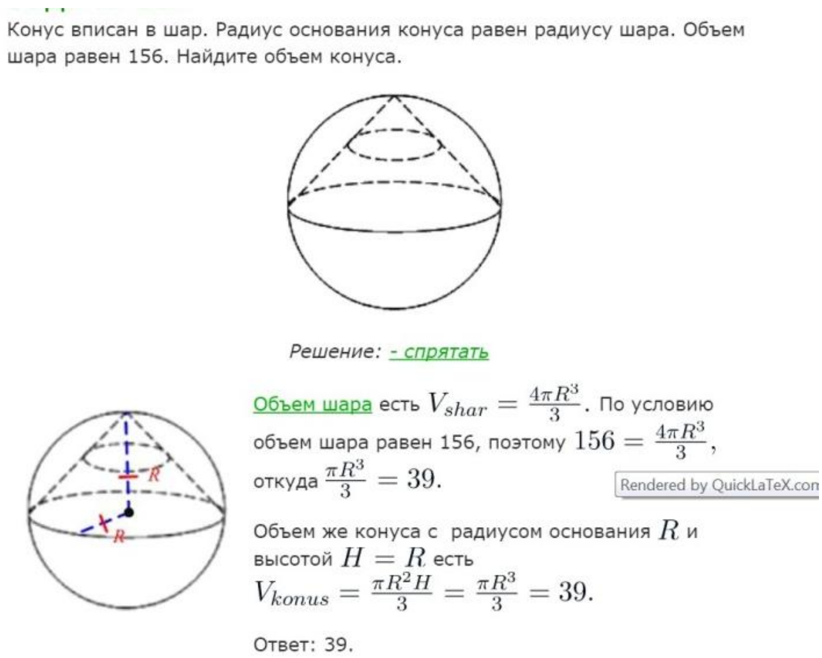


Рисунок Щ.1 - Нахождение объема конуса, вписанного в шар

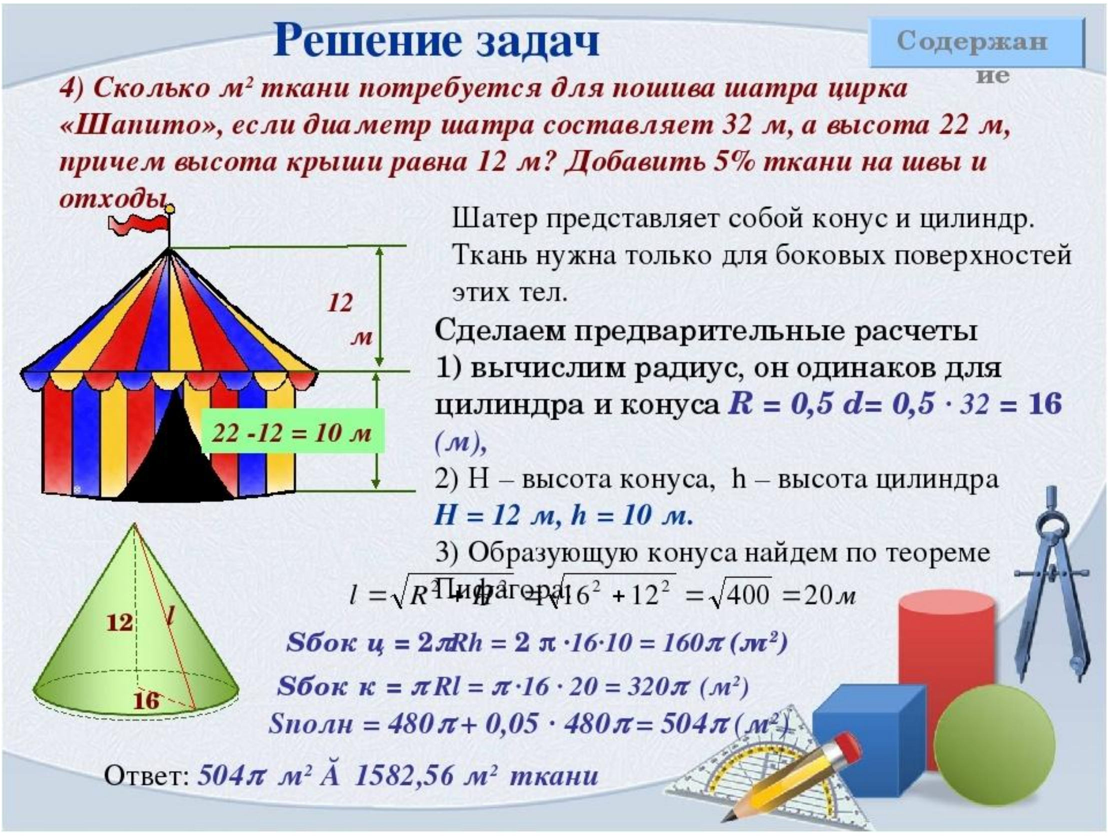


Рисунок Щ.2 - Нахождение количества расходных материалов для изготовления шатра

Приложение Э

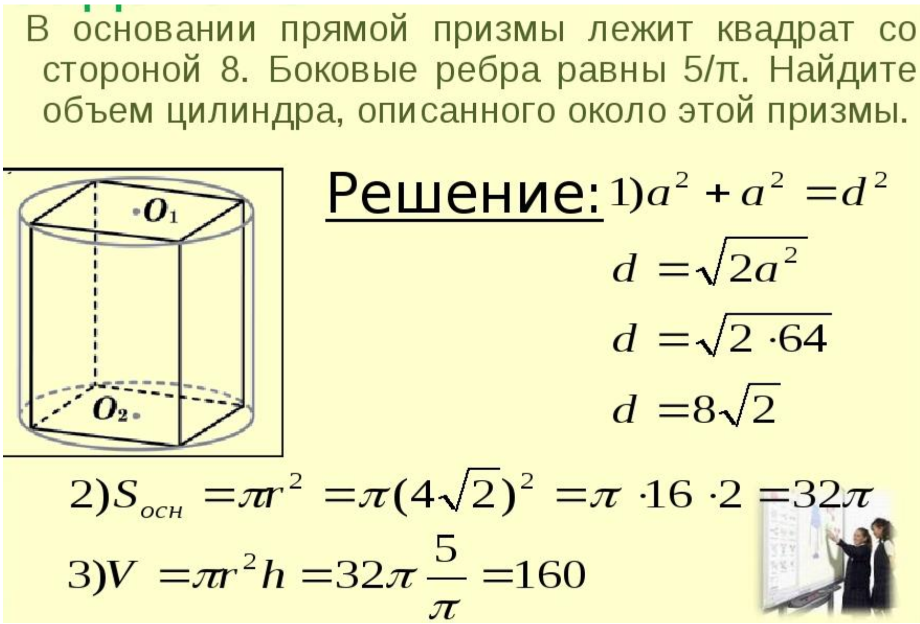


Рисунок Э.1 - Нахождение объема описанного цилиндра

Рисунок Э.2 - Нахождение поверхности вписанного в куб шара

Приложение Ю

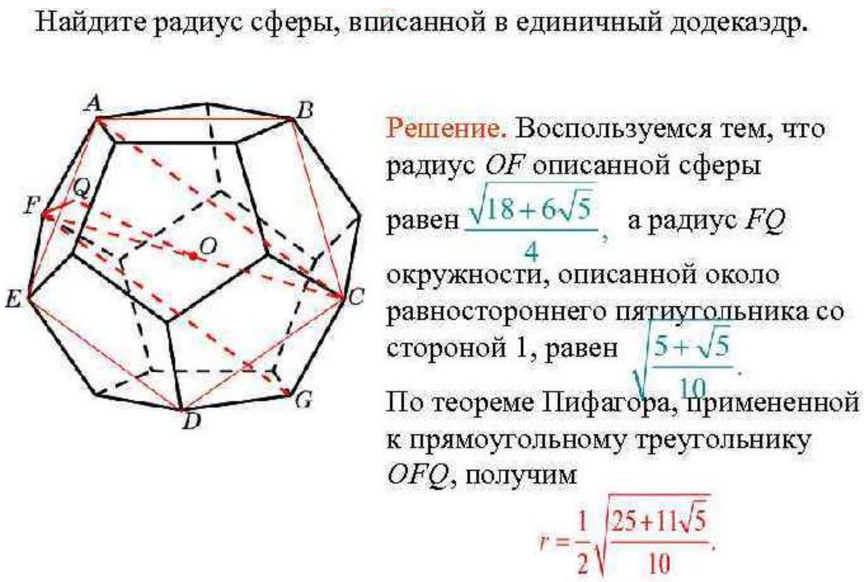


Рисунок Ю.1 - Нахождение радиуса сферы, вписанной в единичный додекаэдр

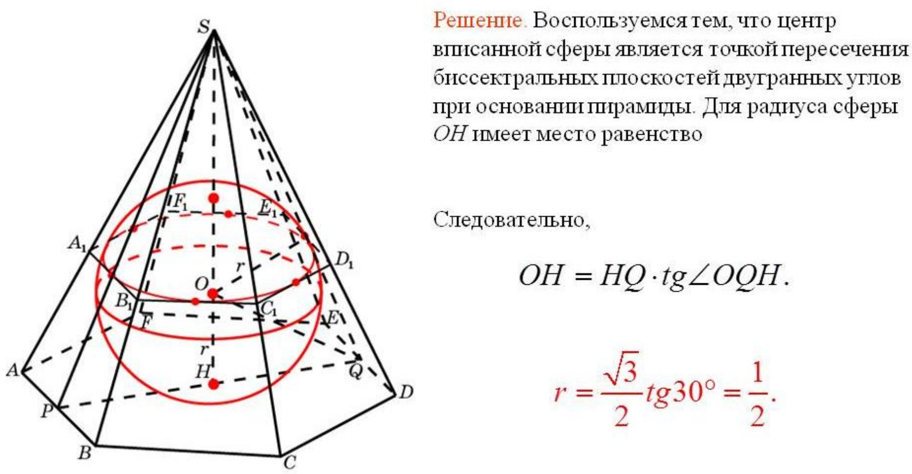


Рисунок Ю.2 - Нахождение радиуса сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду

Приложение Я

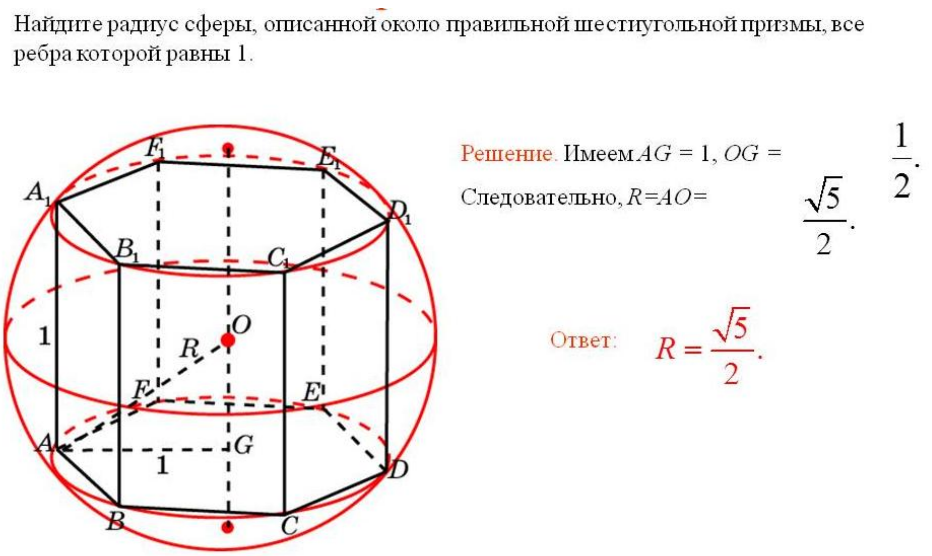


Рисунок Я.1 - Нахождение радиуса сферы, описанной около правильной шестиугольной призмы

Рисунок Я.2 - Нахождение объема шара, описанного около конуса