МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Для всех специальностей первого курса

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Преобразования тригонометрических выражений

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

Братск 2019

Составила (разработала) Макович Е. В., преподаватель кафедры физико-математических и социально гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально гуманитарных дисциплин

«______»________________ 201_ г. ________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

(Подпись председателя РС)

«_______ »_______________ 201_ г. №_______________

Содержание

Введение

Тригонометрия - составная часть математики для студентов первого курса технического или естественнонаучного направления. Хорошие знания и прочные навыки по тригонометрии являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в дальнейшем математики, физики, ряда технических дисциплин.

Настоящее пособие имеет целью помочь учащимся в повышении уровня их знаний по тригонометрии.

В данном пособии представлены основные разделы тригонометрии. Центральное место в нем отведено преобразованию тригонометрических выражений, применение тригонометрических формул.

Пособие состоит из 12 разделов, каждый из которых содержит лаконично изложенные теоретические сведения, сопровождаемые примерами. Для закрепления предлагаются различные по смыслу и сложности упражнения.

Материалы пособия могут быть использованы на занятиях преподавателями и студентами первого курса в качестве обучающего пособия. В зависимости от направления подготовки преподаватель имеет возможность рассматривать более сложные или несложные задачи. Упражнения начинаются с простыхзаданий к более сложным заданиям. Разобранные примеры позволяют студентам изучать разделы самостоятельно.

1 Радианная мера угла

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 в соответствии с рисунком 1.1.Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ±1, $\pm\frac{\pi}{2}, \pm3, \pm\pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ – иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать числовую прямую на окружность. Тогда точки с координатами ±1, $\pm\frac{\pi}{2}, \pm3, \pm\pi$ перейдут соответственно в точки окружности M_1,M_2, M_3, M_4. При этом длинна дуги PM_1 будет равна 1, длинна PM_2 =$\frac{\pi}{2}$ и так далее.

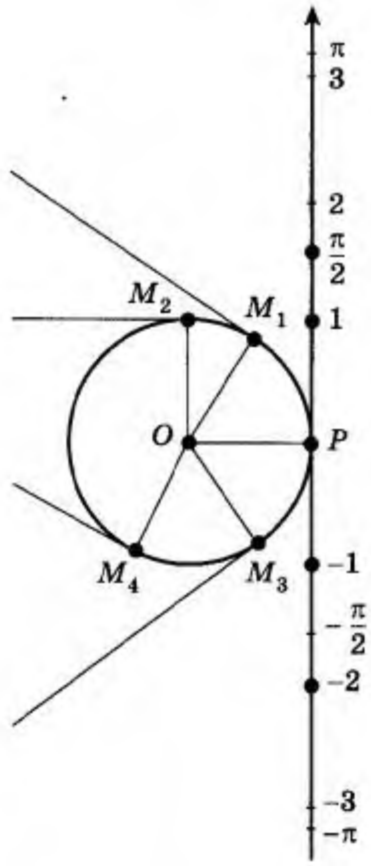


Рисунок 1.1 – Единичная окружность

Таким образом, каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусуокружности, называется углом в 1 радиан, как показано на рисунке 1.2.

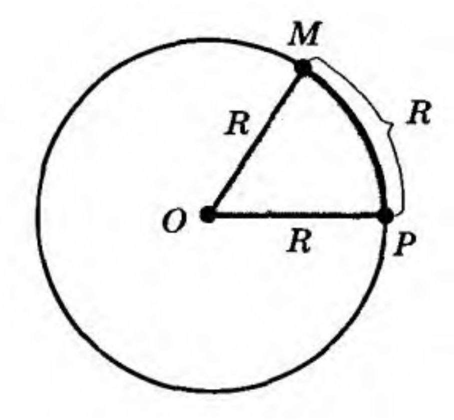


Рисунок 1.2 – Угол в один радиан

Градусная мера угла в 1 радиан равна

$$1\text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \qquad (1.1)$$

Так как π = 3,14, то 1 рад = 57,3°.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha\text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ} \qquad (1.2)$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$a^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\text{ рад} \qquad (1.3)$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Например, 360° = 2π рад, пишут 360° = 2π.

Пример 1

Найти радианную меру угла, равного:

а) 40°;

б)120°;

в)105°.

По формуле (1.3) находим:

а) 40° = 40·π / 180 = 2π/9;

б) 120° = 120·π/180 = 2π/3;

в) 105° = 105·π/180 = 7π/12.

Пример 2

Найти градусную меру угла,равного:

а) π/6;

б) π/9;

в) 2·π/3.

По формуле (1.2) находим:

а) π/6 = 180°/6 = 30°;

б) π/9 = 180°/9 = 20°;

в) 2π/3 = 2·180°/6 = 120°.

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Таблица 1 – Радианная и градусная меры угла

Градусы	0	30	45	60	90	180	270	360
Радианы	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π

Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

1) 40°;
2) 120° ;
3) 150°;
4) 75° ;
5) 32°;
6) 140°.

Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

1) $\frac{\pi}{9}$;
2)
3)
4)
5) $\frac{\pi}{20}$.

2 Поворот точки вокруг начала координат

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса1 с центром в начале координат. Ее называют единичной окружностью. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α радиан, где α – любое действительное число.

Пусть α>0. Предположим, что точка, двигаясь поединичной окружности от точки Р против часовой стрелки, прошла путь длиной α, как показано на рисунке 2.1. Конечную точку пути обозначим М.

В этом случае будем говорить, что точка М получена из точки Р поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

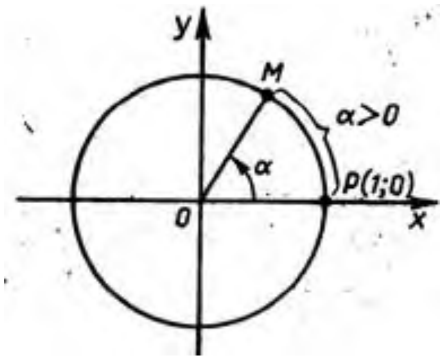


Рисунок 2.1 – Поворот точки против часовой стрелки

Пусть α<0. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длинной $|\alpha|$,как показано на рисунке 2.2.

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

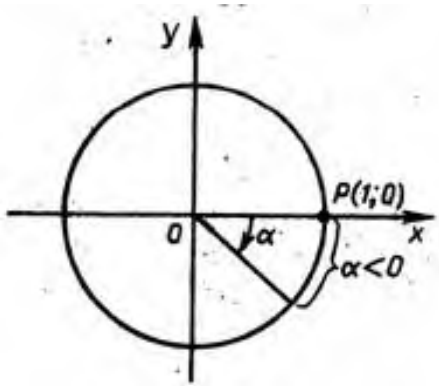


Рисунок 2.2 -Поворот точки по часовой стрелке

При повороте точки P(1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$, как показано на рисунке 2.3, получается точка М с координатами (0;1).

При повороте точки P(1;0) на угол $-\frac{\pi}{2}$, как показано на рисунке 2.3,получается точка N(0;-1).

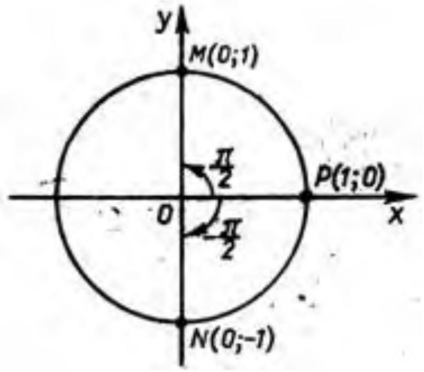


Рисунок 2.3 -Поворот точки

При повороте точки P(1;0) на угол получается точка К(0;-1).

При повороте точки P(1;0) на угол $-\pi$, как показано на рисунке 2.4, получается точка L(-1;0).

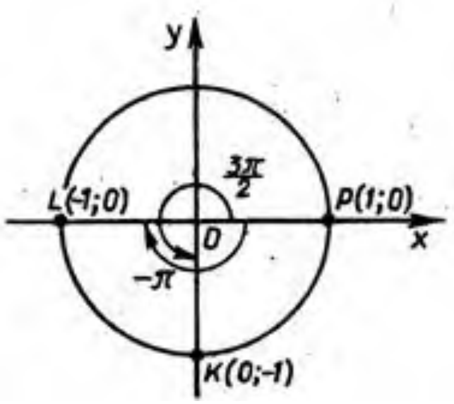
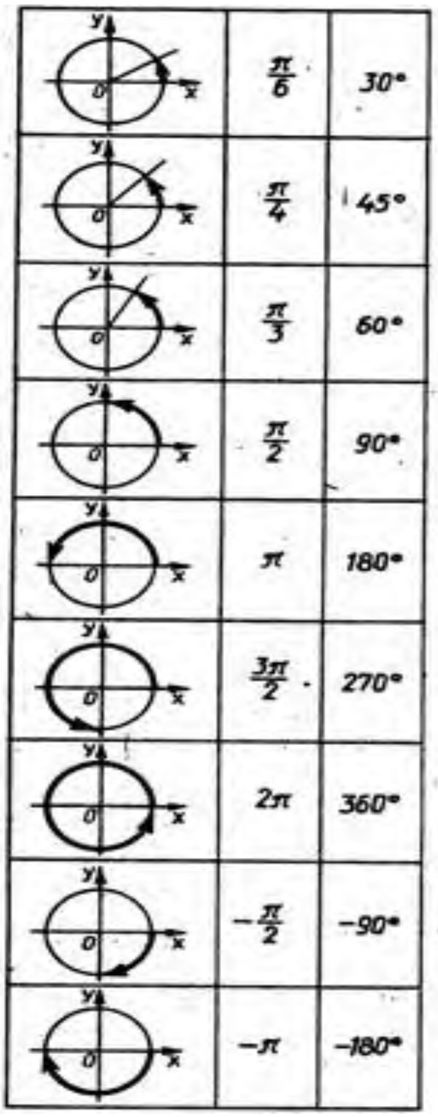


Рисунок 2.4 -Поворот точки

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах, как показано на рисунке 2.5.



$\frac{\pi}{6}$	30°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{2}$	90°
π	180°
$\frac{3\pi}{2}$	270°
2π	360°
$-\frac{\pi}{2}$	-90°
$-\pi$	-180°

Рисунок 2.5–Повороты на различные углы

Отметим, что при повороте точки P(1;0) на 360°, точка возвращается на первоначальное положение. При повороте точки на -360°, она также возвращается в первоначальное положение.

Рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший , и на угол, меньший -2π . Так, при повороте на угол точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$, как показано на рисунке 2.6.

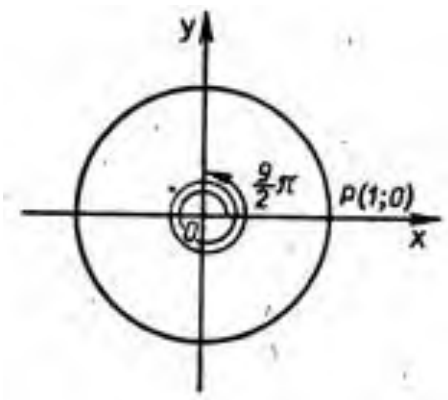


Рисунок 2.6–Поворот на угол

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении, как показано на рисунке 2.7.

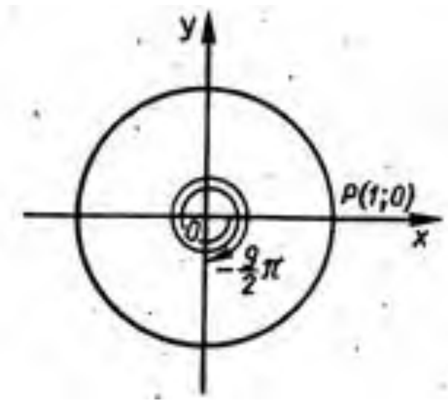


Рисунок 2.7–Поворот на угол $-\frac{9\pi}{2}$

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1;0) на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4}$;
2) $-\frac{\pi}{3}$;
3) $\frac{-3\pi}{4}$;

4) ;

5) $\frac{-5\pi}{4}$;

6) -225°.

Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0)на угол:

1) ;

2) $\frac{-3\pi}{2}$;

3)

4) 540° ;

5) $\frac{-7\pi}{2}$;

6) $\frac{-15\pi}{2}$;

7) 810° .

3 Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается sinα).

Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается cosα).

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается tgα).

$$\mathbf{tg\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (3.1)$$

Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу (обозначается ctgα).

Приведем таблицу часто встречающихся значенийсинуса, косинуса, тангенса, котангенса.

Таблица 3.1

Угол в градусах	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Угол в радианах	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	-1	**0**
$\cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	**0**	-1	**0**	**1**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**	**0**
$ctg\alpha$	**не сущ.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**

Вычислить $\dfrac{\frac{4\sin\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\pi}{6}-tg\dfrac{\pi}{4}.$

Используя таблицу 3.1,получаем:

$$\frac{\frac{4\sin\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\pi}{6}-tg\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2,5$$.

Значениясинуса, косинуса, тангенса, котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырехзначным математическим таблицам В. М.Брадиса.

Найти значение выражения:

1) $\dfrac{\frac{3\sin\pi}{6}+2\cos\pi}{6}-tg\dfrac{\pi}{3};$

2) $\dfrac{\frac{5\sin\pi}{4}+3\,tg\frac{\pi}{4}-5\cos\pi}{4}-10ctg\dfrac{\pi}{4};$

3)

4) $\dfrac{\frac{\sin\pi}{3}\cdot\cos\pi}{6}-tg\dfrac{\pi}{4};$

5) $$\frac{\frac{\frac{\sin\pi}{4}\cdot\cos\pi}{4}-\frac{\sin\pi}{3}\cos\pi}{6};$$
6)
7) $\left(tg\frac{\pi}{4}-ctg\frac{\pi}{3}\right)\left(ctg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{6}\right);$
8)

4 Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти, ординаты и абсциссы положительны. Поэтому sina>0 и cosa>0, если a лежит в первой четверти, смотри рисунок 4. 1.

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно,sina>0, cosa<0, если a лежит во второй четверти, смотри рисунок 4. 1.Аналогично в третьей четверти sina<0, cosa<0, а в четвертой четверти sina<0, cosa>0,смотри рисунок 4. 1. При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

По определению $\mathbf{tg\alpha} = \frac{\sin\boldsymbol{\alpha}}{\cos\boldsymbol{\alpha}}$. Поэтому $\mathbf{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\mathbf{tg\alpha} < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса и котангенса изображены на рисунке 4.1.

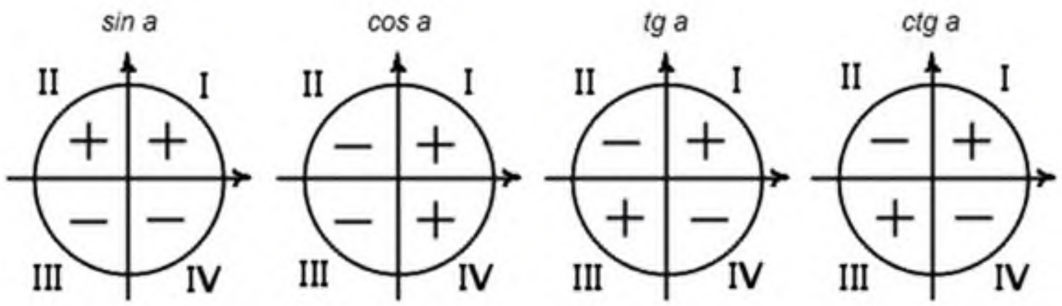


Рисунок 4. 1 –Знаки тригонометрических функций

Выяснить знаки синуса и косинуса угла

Углу соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\frac{\frac{\sin 3\pi}{4} > 0, \cos 3\pi}{4} < 0.$

Выяснить знаки синуса и косинуса угла $745°$

Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки(1;0) на угол $745°$ соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $sin745° > 0, cos745° > 0.$

Определить знак числа $\sin\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$;

2) $\alpha = -\frac{3з\pi}{7}$;

3) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$;
4) $\alpha = -0{,}1\pi$;
5) $\alpha = 5{,}1$;
6) $\alpha = -470°$.

Определить знак числа $\cos\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$;
2) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;
3) $\alpha = \frac{-2\pi}{5}$;
4) $\alpha = 4{,}6$;
5) $\alpha = -5{,}3$;
6) $\alpha = -150°$.

Определить знак числа $\mathrm{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;
2) $\alpha = \frac{12\pi}{5}$;
3) $\alpha = \frac{-5\pi}{4}$;
4) $\alpha = 3{,}7$;
5) $\alpha = -1{,}3$;
6) $\alpha = 283°$.

5 Зависимость между sin,cos,tg и ctg

Пусть точка M(x;y) единичной окружности получена поворотом точки(1; 0) на угол α,смотри рисунок5.1. Тогда по определению синуса и косинуса x=cosα, y=sinα. Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты (x;y) удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$.

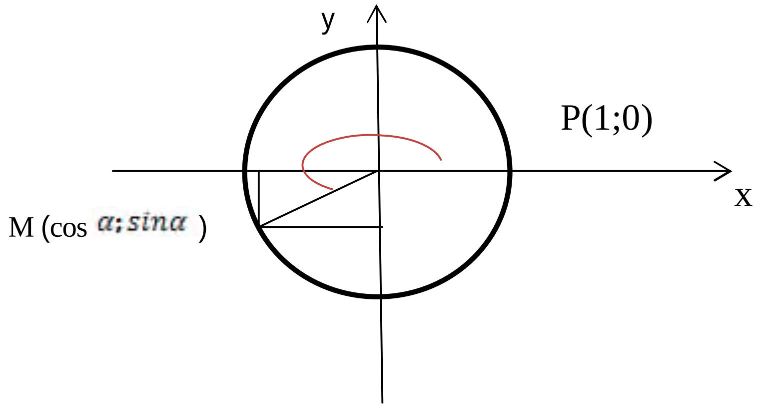


Рисунок 5.1 – Точка M

Следовательно,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (5.1)$$

Равенство (5.1) называетсяосновным тригонометрическим тождеством.

Из равенства (5.1) можно выразить

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (5.2)$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad (5.3)$$

В формулах 5.2и 5.3 знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Пример 1. Вычислить sinα, если cosα=$-\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Воспользуемся формулой (5.2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то sinα<0, то есть в формуле (5.2) перед корнем нужно поставить знак “-”:

sinα= - $\sqrt{1 - cos^2\alpha}$=$\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Пример 2. Вычислить cosα, если sinα=.

Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то cosα>0, поэтому в формуле(5.3) перед корнем нужно ставить знак “+”:

Cosα=$\sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Выясним зависимость между тангенсом и котангенсом

tgα·ctgα=1 (5.4)

tgα= (5.5)

ctgα= (5.6)

Пример 3.Вычислить ctgα, если tgα=13.

По формуле (5.6) находим ctgα=.

Пример 4.Вычислить tgα, еслиsinα=$0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (5.3) находим cosα.Так как$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, тоcosα<0. Поэтомуcosα=$-\sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6$.

Следовательно, tgα=$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$.

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем зависимость между тангенсом и косинусом.

Разделим обе части равенства$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha\neq0$. Получим равенство ,откуда

(5.7)

Пример 5. Вычислить tgα, еслиcosα=$-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Из формулы (5.7) получаем

$$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $tg\alpha=-\frac{4}{3}$.

Пример 6. Вычислить cosα, если tgα=3 и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Из формулы (5.7) получаем

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, и поэтому$\cos\alpha=-\sqrt{0{,}1}$.

Упражнения

1 Вычислить:

1) sinα,tgα, ctgα, если cosα=$-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) cosα,tgα, ctgα, если sinα=$-\frac{2}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2 Вычислить значение каждой из тригонометрическихфункций, если:

1) cosα=;

2) s

inα=$0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) t

gα=$\frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) c

tgα= -3 и ;

5) c

osα=0,8 и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

6) s

inα=$-\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) t

gα= -2,4 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

8) c

tgα=.

6 Тригонометрические тождества

Способы доказательства тождеств: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Пример 1.Доказать тождество

$cos^2\alpha = (1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha)$.

$(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha) = 1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha$.

Пример 2.Доказать тождество $\frac{cosx}{1 - sinx} = \frac{1 + sinx}{cosx}$.

Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{cosx}{1 - sinx} - \frac{1 + sinx}{cosx} = \frac{cos^2x - (1 - sin^2x)}{cosx(1 - sinx)} = \frac{cos^2x - cos^2x}{cosx(1 - sinx)} = 0.$$

Пример 3.Доказать тождество $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=cos^4x-sin^4x.$

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{1-\frac{sin^2x}{cos^2x}}{1+\frac{sin^2x}{cos^2x}}=\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x+sin^2x}=cos^2x-sin^2x,$$

$$cos^4x-sin^4x=(cos^2x-sin^2x)(cos^2x+sin^2x)=cos^2x-sin^2x.$$

Тождество доказано так как его левая и правая части равны $cos^2x-sin^2x.$

Упражнения

Доказать тождество:

1) (1-cosα)(1+cosα)=sin^{2}α;

2) $\frac{sin^2\alpha}{1-sin}$

3) ;

4) $(1-sin$ $1+tg^2x$

( )=1

Упростить выражение:

1) cosα· tgα-2sinα;

2) $\frac{sin^2}{1+cos}$;

3) .

Упростить выражениеи найти его значение:

1) $\frac{\sin^2\alpha -}{1 - \cos}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2 x +$ при $x=\frac{\pi}{6}$.

7 Синус, косинус и тангенс углов α и –α

$Sin(-\alpha)= - \sin\alpha$ (7.1)

Cos(-α)=cosα(7.2)

Используя определение тангенса получаем

$$tg(-\alpha)=\frac{\mathbf{Sin(-\alpha)}}{\mathbf{Cos(-\alpha)}}=\frac{-\sin\boldsymbol{\alpha}}{\cos\boldsymbol{\alpha}} = -\ tg\alpha \qquad (7.3)$$

Формулы (7.1)-(7.3) позволяютсводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sin\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

Вычислить:

1) $cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)sin\left(\right.$

2)

3) ;

4) $\frac{2 - sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right.}{2cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

.

Упростить выражение:

1) tg(-α)$\cos\alpha + \sin\alpha$;

2) $\cos\alpha -$

3) $\frac{\cos(-}{cos}$

8 Формулысложения

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \qquad (8.1)$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y \qquad (8.2)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y \qquad (8.3)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y \qquad (8.4)$$

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} \qquad (8.5)$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy} \qquad (8.6)$$

Пример 1 Вычислить

По формуле (8.3) находим

Пример 2 Вычислить

По формуле (8.4) находим

Пример 3 Вычислить

По формуле (8.1) находим

Пример 4 Вычислить $\dfrac{\dfrac{\frac{\sin 8\pi}{7}\cos\pi}{7} - \dfrac{\sin\pi}{7}\cos 8\pi}{7}$.

$$\dfrac{\dfrac{\frac{\sin 8\pi}{7}\cos\pi}{7} - \dfrac{\sin\pi}{7}\cos 8\pi}{7} = sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = sin\pi = 0.$$

Упражнения

С помощью формул сложения вычислить:

1) ;
2) ;
3) ;
4) .

Вычислить, не пользуясь таблицами:

a) $\sin 73^\circ \cdot \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \cdot \sin 17^\circ$;

b) $\sin 73^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \cdot \sin 13^\circ$;

c) $\text{sincos}\,\frac{\pi}{12} + \text{sincos}\,\frac{\pi}{12}$

9 Синус, косинус и тангенс двойного угла

$sin2\alpha = 2\sin\alpha cos\alpha$ (9.1)

Пример 1 Вычислить $sin2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

По формуле (9.1) находим $sin2\alpha = 2\sin\alpha cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot cos\alpha = -1{,}2cos\alpha.$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $cos\alpha < 0$, и поэтому $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2 x} = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -0{,}8.$ Следовательно, $sin2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96.$

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ (9.2)

Пример 2 Вычислить $cos2\alpha$, если $cos\alpha = 0{,}3.$

Используя формулу (9.2) и основное тригонометрическое тождество, получаем $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha) = 2cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82.$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad (9.3)$$

Пример 3 Вычислить $tg2\alpha$, если $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

По формуле (9.3)

$$tg2\alpha = \frac{2\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

находим .

Упражнения

Вычислить:

a)

b)

c) $(\cos 75° - \sin$

d) $cos^2 75° - sin$

e)

Вычислить $sin2\alpha$, если:

a) $sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Вычислить $cos2\alpha$, если:

a) $sin\alpha = -\frac{3}{5}$;

b) $cos\alpha = \frac{4}{5}$

.

Упростить выражение:

a) $sin2\alpha + (sin\alpha$

b) $\frac{sin2\alpha}{(sin\alpha + cos}$

c)

Доказать тождество:

a) $sin2\alpha = (sin\alpha$

b) $1 - sin2\alpha = ($

c) $cos2\alpha = cos^4$

d) $2cos^2\alpha - cos$

10 Синус, косинус, тангенс половинного угла.

$$cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + cosx}{2} \quad (10.1)$$

$$sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - cosx}{2} \quad (10.2)$$

Формулы (10.1) и (10.2) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Пример 2 Вычислить $\frac{\cos x}{2}$, если $cosx = -0,02$ и $0 < x < \pi$.

По формуле (10.1) находим $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + cosx}{2} = \frac{1 - 0,02}{2} = 0,49.$

Так как $0 < x < \pi$, то $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\frac{\cos x}{2} > 0.$ Следовательно $\frac{\cos x}{2} = \sqrt{0,49} = 0,7.$

Разделив равенство (10.2) на равенство (10.1), получим формулу тангенса половинного угла

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1 - cosx}{1 + cosx} \quad (10.3)$$

Пример 3 Вычислить $tg\frac{x}{2}$, если $cosx = 0,8$ и $\pi < x < 2\pi$.

По формуле (10.3) имеем $tg^2\frac{x}{2} = \frac{1 - cosx}{1 + cosx} = \frac{1 - 0,8}{1 + 0,8} = \frac{0,2}{1,8} = \frac{1}{9}.$

По условию $\pi < x < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$ и $tg\frac{x}{2} < 0.$

Следовательно, $tg\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}.$

Упражнения

Пусть $cosx = 0{,}6$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\frac{\cos x}{2}$;

2) $\frac{\sin x}{2}$;

3) $tg\frac{x}{2}$;

4) $ctg\frac{x}{2}$.

Пусть $sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить:

1) $\frac{\cos x}{2}$;

2) $\frac{\sin x}{2}$;

3) $tg\frac{x}{2}$;

4) $ctg\frac{x}{2}$.

Вычислить:

a)

b) .

Упростить выражение:

a) $\frac{1 - \cos x}{sinx}$;

b) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$

;

c) $\frac{1-\cos 2x+}{1+\cos 2x+}$

;

d) $1+\cos 4x$

.

11 Формулы приведения

Формулы приведениядля синуса

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \tag{11.1}$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x \tag{11.2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x \tag{11.3}$$

$$sin(2\pi - x) = -sinx \quad (11.4)$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx \quad (11.5)$$

$$sin(\pi + x) = -sinx \quad (11.6)$$

$$sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -cosx \quad (11.7)$$

$$sin(2\pi k + x) = sinx, k \in Z \quad (11.8)$$

Формулы приведениядля косинуса

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx \quad (11.9)$$

$$cos(\pi - x) = -cosx \quad (11.10)$$

$$c\ os\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sinx \quad (11.11)$$

$$cos(2\pi - x) = cosx \quad (11.12)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sinx \quad (11.13)$$

$$cos(\pi + x) = -cosx \quad (11.14)$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sinx \quad (11.15)$$

$$cos(2\pi k + x) = cosx, k \in Z \quad (11.16)$$

Формулы приведениядля тангенса

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctgx \quad (11.17)$$

$$tg(\pi - x) = -tgx \quad (11.18)$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = ctgx \quad (11.19)$$

$$tg(2\pi - x) = -tgx \quad (11.20)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -ctgx \quad (11.21)$$

$$tg(\pi k + x) = tgx, k \in Z \quad (11.22)$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -ctgx \quad (11.23)$$

$tg(2\pi + x) = tgx$ (11.24)

Формулы приведениядля котангенса

(11.25)

(11.26)

(11.27)

(11.28)

(11.29)

(11.30)

(11.31)

(11.32)

Пример 1 Вычислить sin 930°.

Используя формулу (11.8), получаем $\sin 930^{\circ} = \sin(3 \cdot 360^{\circ} - 150^{\circ}) = \sin(-150^{\circ})$.

По формуле $\sin(-x) = -sinx$ получим $\sin(-150^{\circ}) = -sin150^{\circ}$. По формуле (11.2) находим $-sin150^{\circ} = -\sin(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -sin30^{\circ} = -\frac{1}{2}$.

Пример 1 Вычислить $\frac{\cos 15\pi}{4}$.

$$\frac{\cos 15\pi}{4} = cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2 Вычислить $\cos 150°$.

Распишем $150° = 90° + 60°$. Используем формулу(11.12)

$$\cos 150° = \cos(90° + 60°) = -sin60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Или можно представить $150° = 180° - 30°$ и использовать формулу (11.10)

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя формулы приведения, вычислить:

a) ;

b) ;

c) ;

d) $ctg\ 135°$;

e) $ctg240°$;

f) $\cos 120°$;

g) $sin315°$;

h) $tg\frac{5\pi}{4}$;

i) $\frac{\sin 7\pi}{6}$;

j) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

k) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$;

l) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right);$

m) $ctg\left(-\frac{7\pi}{4}\right).$

Упростить выражение:

1) $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2} - x \right.}{}$;

2) $\frac{\sin(\pi - x) + \ldots}{}$;

3) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \right.}{ctg(2\pi - }$.

Используя формулы приведения, вычислить:

a) ;

b) $\sin 1140°;$

c) $tg\ 405°;$

d) $\frac{\sin 47\pi}{6}$;

e) $tg\frac{25\pi}{4}$;

f) $\frac{\cos 21\pi}{4}$.

Найти значение выражения:

1) $\cos 630° - si$

2) $tg1800° - si$

3) $3 \cdot cos3660°$

.

12 Сумма и раность синусов. Сумма и раность косинусов

Сумма и разность синусов

$$\frac{sin\alpha + sin\beta = \frac{2\sin(\alpha+\beta)}{2}\cos(\alpha-\beta)}{2} \quad (12.1)$$

$$\frac{sin\alpha - sin\beta = \frac{2\sin(\alpha-\beta)}{2}\cos(\alpha+\beta)}{2} \quad (12.2)$$

Сумма и разность косинусов

$$\frac{cos\alpha + cos\beta = \frac{2\cos(\alpha+\beta)}{2}\cos(\alpha-\beta)}{2} \quad (12.3)$$

$$\frac{cos\alpha - cos\beta = -\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{2}\sin(\alpha-\beta)}{2} \quad (12.4)$$

Пример 1 Вычислить $sin75^\circ + sin15^\circ$.

Для вычисления применим формулу (12.1).

$$\frac{sin75^\circ + sin15^\circ = \frac{2\sin(75^\circ+15^\circ)}{2}\cos(75^\circ-15^\circ)}{2} = 2sin45^\circ cos30^\circ = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

.

Пример 2 Преобразовать в произведение .

В данном примере необходимо избавиться от числа 2, стоящего перед синусом, вынеся его за скобку, далее в таблице значений необходимо найти синус какого угла равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Записать в скобке вместо $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ выражение }\sin\pi}{3}$. Применить формулу (12.1).

Упростить выражение:

1) $sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+s$

2) $cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-c$

3) $sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-$

Вычислить:

1)
2)

3) $\frac{\cos 11\pi}{12} + \frac{\mathrm{co}}{}$

4) $\frac{\cos 11\pi}{12} - \frac{\mathrm{co}}{1}$

5) $\frac{\sin 7\pi}{12} - \frac{\sin}{12}$

6)

Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2sinx;$

2) $1 - 2sinx;$

3) $1 + 2cosx;$

4) $1 + sinx.$

Доказать тождество:

1) $\frac{sinx + sin3x}{cosx + cos3x}$

2) $\frac{sin2x + sin4}{cos2x - cos4}$

Заключение

Поскольку математика — это наука, которая изучает пространственные формы и количественные отношения реального мира, то изучая математику, человек познает окружающий мир в двух аспектах, а именно то, что касается пространственных форм, является тем, что касается количественных отношений.

Известно, что человек познает окружающий мир по закону: от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания действительности.

Тригонометрия — один из важнейших разделов математики, а поэтому усвоение материала по данному разделу является главной задачей учителя. Изучение тригонометрии невозможно без использования рисунков, а значит и наглядности.

Наиболее употребительным наглядным пособием в данной теме есть макет единичного круга, поскольку с помощью него вводятся определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла; решаются тригонометрические уравнения и неравенства; исследуются тригонометрические функции.

Можно сделать вывод, что умелое использование наглядных пособий на различных этапах урока обеспечит интерес учащихся к обучению математике, а, следовательно, к лучшему его пониманию и запоминанию.

Список использованных источников

1 Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2006. - 384 с.: ил.

2 Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. В 2 ч Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений(базовый уровень)/ А..Г Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399с.: ил.

3 Дадаян А. А. Математика: Учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2005. – 552 с.

4 Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа 10 кл. Базовый уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Башмаков М. И. – М.: Дрофа, 2008. - 286, [2] с.: ил.