МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Для всех специальностей первого курса

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

КОМБИНАТОРИКА

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

Братск 2019

Составила (разработала) Макович Е.В., преподаватель кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

«____» ___________________ 2019г. ______________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

(подпись председателя РС)

«____» ___________________ 2019 г.

Содержание

Введение 4
1 История возникновения комбинаторики 5
2 Сочетания без повторений 7
3Перестановки без повторений 9
4Размещения без повторений 11
5Правило сложения и правило умножения комбинаций 14
6Перестановки с повторениями 19
7 Сочетания с повторениями 20
8 Размещения с повторениями 22
Заключение 24
Список использованных источников 25

Введение

Пособие состоит из 8 разделов, каждый из которых содержит лаконично изложенные теоретические сведения, сопровождаемые разобранными примерами. Для закрепления предлагаются различные по смыслу и сложности задачи. Комбинаторика- составная часть математики для студентов первого курса технического или естественнонаучного направления. Хорошие знания и прочные навыки по решению комбинаторных задач являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в дальнейшем математики, физики, ряда технических дисциплин.

Настоящее пособие имеет целью помочь учащимся в повышении уровня их знаний по решению комбинаторных задач от самых простых до более сложных.

В данном пособии представлены основные элементы комбинаторики, такие как сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений.

Материалы пособия могут быть использованы на занятиях преподавателями и студентами первого курса в качестве обучающего пособия. В зависимости от направления подготовки преподаватель имеет возможность рассматривать более сложные или несложные задачи. Разобранные задачи позволяют студентам изучать разделы самостоятельно.

1 История возникновения комбинаторики

История комбинаторики освещает развитие комбинаторики – раздела конечной математики, который исследует в основном различные способы выборки заданного числа m элементов из заданного конечного множества: размещения, сочетания, перестановки, а также перечисление и смежные проблемы. Начав с анализа головоломок азартных игр, комбинаторика оказалась исключительно полезной для решения практических задач почти во всех разделах математики. Кроме того, комбинаторные методы оказались полезными в статистике, генетике, лингвистике и многих других науках.

Комбинаторные мотивы можно заметить в символике китайской «Книги Перемен» (V век до нашей эры). По мнению её авторов, всё в мире комбинируется из различных сочетаний мужского и женского начал, а также восьми стихий: земля, горы, вода, ветер, гроза, огонь, облака и небо. Историки отмечают также комбинаторные проблемы в руководствах по игре в Го и другие игры. Большой интерес математиков многих стран с древних времён вызывали магические квадраты. Классическая задача комбинаторики: «сколько есть способов извлечь m элементов из N возможных» упоминается ещё в сутрах древней Индии (начиная примерно с IV века до нашей эры). Индийские математики, видимо первыми открыли биномиальные коэффициенты и их связь с биномом Ньютона. Во II веке до н.э. индийцы знали, что сумма всех биномиальных коэффициентов степени n равна. Гексаграмма из«Книги Перемен»

Античные греки также рассматривали отдельные комбинаторные задачи, хотя систематическое изложение ими этих вопросов, если оно и существовало, до нас не дошло. Хрисипп (III век до нашей эры) и Гиппарх (II век до нашей эры) подсчитывали, сколько следствий можно получить из 10 аксиом; методика подсчёта нам неизвестна, но у Хрисиппа – более миллиона, а у Гиппарха – более 100000. Аристотель при изложении своей логики безошибочно перечислил все возможные типы трёхчленных силлогизмов. Аристоксен рассмотрел различные чередования длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Какие-то комбинаторные правила пифагорейцы, вероятно использовали при построении своей теории чисел и нумерологии(совершенные числа, фигурные числа, пифагоровы тройки).

Средневековье. В XII веке индийский математик Бхаскара в своём основном труде «Лилавати» подробно исследовал задачи, связанные с перестановками и сочетаниями, включая перестановки с повторениями. В Западной Европе ряд глубоких открытий в области комбинаторики сделали два еврейских исследователя, Авраам ибн Эзра (XII век) и Леви бен Гершом (он же Герсонид, XIV век). Ибн Эзра обнаружил симметричность биномиальных коэффициентов, а Герсонид дал явные формулы для их применения в задачах вычисления числа размещений и сочетаний. Несколько комбинаторных задач содержит «Книга абака» (Фибоначчи, XIII век). Например, он поставил задачу найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов.

Новое время. Джероламо Кардано написал математическое исследование игры в кости, опубликованное посмертно. Теорией этой игры занимались также Тарталья и Галилей. В историю зарождавшейся теории вероятностей вошла переписка заядлого игрока шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты несколько тонких комбинаторных вопросов. Помимо азартных игр, комбинаторные методы использовались (и продолжают использоваться) в криптографии – как для разработки шифров, так и для их взлома. Блез Паскаль много занимался биномиальными коэффициентами и открыл простой способ их вычисления: «треугольник Паскаля». Хотя этот способ был уже известен на Востоке (примерно с X века). Паскаль, в отличии от предшественников, строго изложил и доказал свойство этого треугольника. Наряду с Лейбницем, он считается основоположником современной комбинаторики. Сам термин «комбинаторика» придумал Лейбниц, который в 1666 году опубликовал книгу «Рассуждение о комбинаторном искусстве». Правда термин «комбинаторика» Лейбниц понимал чрезмерно широко, включая в него всю конечную математику и даже логику. Ученик Лейбница Якоб Бернулли, один из основателей теории вероятностей, изложил в своей книге «Искусство предположений» (1713) множество сведений по комбинаторике.

В этот же период формируется терминология новой науки. Термин «сочетание» впервые встречается у Паскаля (1653, опубликован в 1665 году). Термин «перестановка» употребил в указанной книге Якоб Бернулли. Бернулли использовал и термин «размещение».После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач. Абрахам де Муавр и Джеймс Стирлинг нашли формулы для аппроксимации факториала. Окончательно комбинаторика как самостоятельный раздел математики оформилась в трудах Эйлера. Он детально рассмотрел, например, следующие проблемы: Задача о ходе коня Задача о семи мостах, с которой началась теория графов Построение греко-латинских квадратов Обобщенные перестановки кроме перестановок и сочетаний, Эйлер изучал разбиение, а также сочетания и размещения с условиями.

В начале XX века начала развиваться комбинаторная геометрия: были доказаны теоремы Минковского – Радона, Радона, Хелли, Юнга, Бляшке, а также строго доказана изоплерическая теорема. На стыке топологии, анализа и комбинаторики были доказаны теоремы Борсука – Улама и Люстерника – Шнирельмана. Во второй четверти XX века были поставлены проблема Барсука и проблема Нелсона – Эрдёша – Хадвигера. В 1940-х годах оформилась теория Рамсея. Отцом современной комбинаторики считается Пал Эрдёш, который ввёл в комбинаторику вероятностный анализ. Внимание к конечной математике и, в частности, к комбинаторике значительно повысилось со второй половины XX века, когда появились компьютеры. Сейчас это чрезвычайно содержательная и быстроразвивающаяся область математики.

2 Сочетания без повторений

Сочетаниями из n элементов по m вкаждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Например, из 3 элементов (a,b,c) по 2 можно образовать следующие сочетания: ab, ac, bc.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}, \qquad (1)$$

Представьте, что перед вами на столе яблоко, груша и банан.

Вопрос: сколькими способами можно выбрать а) один фрукт, б) два фрукта, в) три фрукта?

а) Один фрукт можно выбрать, очевидно, тремя способами – взять либо яблоко, либо грушу, либо банан. Подсчёт проводится по формуле (1)

$$C_3^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3$$

Запись C_3^1 в данном случае следует понимать так: «сколькими способами можно выбрать 1 фрукт из трёх?»

б) Перечислим все возможные сочетания двух фруктов:

- яблоко и груша;
- яблоко и банан;
- груша и банан.

Количество комбинаций легко проверить по той же формуле

$$C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$$

Запись C_3^2 понимается аналогично: «сколькими способами можно выбрать 2 фрукта из трёх?».

в) Три фрукта можно выбрать единственным способом

$$C_3^3 = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1$$

Задача.

В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Решение: прежде всего, снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются различными – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы.

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их дальнейшая судьба, просто выбрали 4 штуки и всё. Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!\cdot 4!} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = (*)$$

$$(*) = \frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{11!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$$

способами можно взять 4 детали из ящика.

Ответ**:** 1365 способами

Задача.

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

Решение*:* $C_{36}^3 = \frac{36!}{33!\cdot 3!} = \frac{33!\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{33!\cdot 3!} = \frac{34\cdot 35\cdot 36}{6} = 7140$ способами можно выбрать 3 карты из 36.

Ответ*:* 7140

Задачи для самостоятельного решения.

1. В 9 “б” классе 6 человек (Галя, Света, Катя, Оля, Максим, Витя) учатся на все пятерки. Департамент образования премировал лучших учащихся путевками в Анапу. Но, к сожалению, путевок всего четыре. Сколько возможно вариантов выбора учеников на отдых?

2. Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

3. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

4. Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых желающих дежурить по столовой?

5. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

6. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

7. Из 12 солдат, в число которых входят Иванов и Петров, надо отправить в наряд трех человек. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) Иванов и Петров должны пойти в наряд обязательно;

б) Иванов и Петров должны остаться;

в) Иванов должен пойти в наряд, а Петров – остаться?

3 Перестановки без повторений

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Например, из 3 элементов (a,b,c) можно образовать следующие перестановки: abc, bac, cab, acb, bca, cba.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!, \qquad (2)$$

Задача.

Представьте, что перед вами на столе яблоко, груша и банан.

Вопрос: сколькими способами их можно переставить? Выкладываем фрукты слева направо в следующем порядке:

- яблоко / груша / банан;
- яблоко / банан / груша;
- груша / яблоко / банан;
- груша / банан / яблоко;
- банан / яблоко / груша;
- банан / груша / яблоко.

Итого: 6 комбинаций или 6 перестановок.

3 объекта можно переставить $P_3 = 3! = 6$ способами

Задача.

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

Решение: используем формулу (2) количества перестановок:

$P_5 = 5! = 120$

Ответ: 120 способами

Задача.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того чтобы составить четырёхзначное число нужно задействовать все четыре карточки. Переставляя карточки, мы будем получать различные четырёхзначные числа.

Решение: найдём количество всех возможных перестановок 4 карточек: $P_4 = 4! = 24$

Когда карточка с нулём располагается на 1-м месте, то число становится трёхзначным, поэтому данные комбинации следует исключить. Пусть ноль находится на 1-м месте, тогда оставшиеся 3 цифры в младших разрядах можно переставить $P_3 = 3! = 6$ способами.

Таким образом, из предложенного набора можно составить:
24 – 6 = 18 четырёхзначных чисел
Ответ: 18

Задачи для самостоятельного решения.

1. Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

2. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы.

3. Сколькими способами могут распределится места по окончании соревнований?

4. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4,5, если цифры в числе не повторяются?

5. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

4 Размещения без повторений

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Например, из 3 элементов (a,b,c) по 2 можно образовать следующие размещения: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (3)$$

Представьте, что перед вами на столе яблоко, груша и банан.

Вопрос: сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Сделать это можно $C_3^2 = 3$ способами:

- яблоко и груша;
- яблоко и банан;
- груша и банан.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов:

- яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу;
- либо наоборот – груша достанется Даше, а яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов.

В данном случае работает формула (3) $A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Она отличается от формулы C_3^2 тем, что учитывает не только количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов в каждойвозможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

Задача.

Боря, Дима и Володя сели играть в «двадцать одну». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? (колода содержит 36 карт)

Решение: здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, как они будут распределены между игроками. По формуле размещений

$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$ способами можно раздать 3 карты игрокам.

Есть и другая схема решения:

$C_{36}^3 = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды.

Теперь давайте рассмотрим, какую-нибудь одну *из семи тысяч ста сорока* комбинаций, например: король пик, 9 червей , 7 червей. Выражаясь комбинаторной терминологией, эти 3 карты можно «переставить» между Борей, Димой и Володей $P_3 = 3! = 6$ способами:

- КП, 9Ч, 7Ч;
- КП, 7Ч, 9Ч;
- 9Ч, КП, 7Ч;
- 9Ч, 7Ч, КП;
- 7Ч, КП, 9Ч;
- 7Ч, 9Ч, КП.

И аналогичный факт справедлив длялюбого уникального набора из трёх карт. А таких наборов, не забываем, мы насчитали $C_{36}^3 = 7140$. Найденное количество сочетаний следует умножить на шесть:

$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами можно сдать по одной карте трём игрокам.

Ответ: 42840

Задача.

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Решение: $A_{23}^2 = 22 \cdot 23 = 506$ способами.

Другой вариант решения: C_{23}^2 способами можно выбрать двух человек из группы и $P_2 = 2! = 2$ способами распределить должности в каждой выборке. Таким образом, старосту и его заместителя можно выбрать $C_{23}^2 \cdot P_2 = \frac{23!}{21! \cdot 2!} \cdot 2! = 22 \cdot 23 = 506$ способами.

Ответ: 506

Задачи для самостоятельного решения.

1. На выборах победили 9 человек - Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

2. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

3. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из 8 тканей?

4. Сколько трёхзначных чисел может быть составлено из нечётных цифр так, чтобы цифры в каждом числе не повторялись?

5. Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

6. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

7. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

9. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

10. На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4х100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

11. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 15 участниками конкурса?

5 Правило сложения и правило умножения комбинаций

Правило суммы: если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор “A или B” можно осуществить m + n способами.

Знак «плюс» следует понимать и читать как союз или.

Задача.

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей или двух девушек

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей; $C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей или девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Правило умножения комбинаций.

Правило произведения: если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор “A и B” в указанном порядке можно осуществить m · n способами.

Знак «умножить» следует понимать и читать как союз и.

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу; $C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу и одну девушку можно выбрать: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130$ способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «каждый объект из одного множества может составить пару скаждым объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого: $10 \cdot 13 = 130$ возможных пар.

Задача.

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: ***

Комбинации будем считать по разрядам – слева направо:

В разряд сотен можно записать любую из $C_9^1 = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в разряд десятков («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: $C_{10}^1 = 10$.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в разряд сотен и 10 способами выбрать цифру в разряд десятков и 2 способами в разряд единиц»

Или ещё проще: «каждая из 9 цифр в разряде сотен комбинируется **с** каждой из 10 цифр разряда десятков и **с** каждой из двух цифр в разряде единиц».

Ответ: 180

Задача.

У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?

б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?

в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

Решаем: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о разных объектах.

а) здесь имеют место перестановки:

$P_4 = 4! = 24$ способами можно рассадить котов по углам комнаты.

При перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

$C_4^1 = 4$ способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх);

$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$ способами можно отпустить гулять двух котов;

$C_4^3 = 4$ способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);

$C_4^4 = 1$ способом можно выпустить всех котов.

Полученные значения следует просуммировать: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можно отпустить гулять котов.

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам:

$A_4^2 = 3\cdot 4 = 12$ способами можно взять на руки 2 котов.

Ответ: а) 24, б) 15, в) 12

Пусть у Васи дополнительно живёт 5 кошек. Сколькими способами можно отпустить гулять 2 котов и 1 кошку?

$C_4^2 \cdot C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$

То есть, с каждой парой котов можно выпустить каждую кошку.

Задача.

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами:

1) пассажиры могут выйти на одном и том же этаже (порядок выхода не имеет значения);

2) два человека могут выйти на одном этаже, а третий – на другом;

3) люди могут выйти на разных этажах;

4) пассажиры могут выйти из лифта?

Решение:

1) $C_{11}^1 = 11$ способами можно выбрать этаж для выхода всех пассажиров.

2) $C_{11}^2 = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$ способами можно выбрать 2 этажа для выхода пассажиров (например, 6-й и 11-й этаж). $C_3^2 = 3$ способами можно выбрать двух человек для выхода на одном этаже (третий выйдет на другом этаже).

Например:

6 этаж /11 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Кроме того, любую пару и «одинокого человека» можно поменять этажами:

11 этаж / 6 этаж

Таня + Надя / Люся

Таня + Люся / Надя

Надя + Люся / Таня

Таким образом, для каждой пары этажей (55 уникальных сочетаний) возможно $C_3^2 \cdot P_2 = A_3^2 = 6$ способов выхода пассажиров. По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^2 \cdot A_3^2 = 55 \cdot 6 = 330$ способами 2 пассажира могут выйти на одном этаже, а третий – на другом этаже.

3) $A_{11}^3 = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$ способами пассажиры могут выйти на разных этажах.

Второй вариант решения: $C_{11}^3 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{6} = 165$ способами можно выбрать 3 этажа для выхода и $P_3 = 3! = 6$ способами переставить пассажиров по каждой тройке этажей; следовательно, пассажиры могут выйти на разных этажах $C_{11}^3 \cdot P_3 = 165 \cdot 6 = 990$ способами.

4) Способ первый: суммируем комбинации первых трёх пунктов: $C_{11}^1 + C_{11}^2 \cdot A_3^2 + A_{11}^3 = 11 + 330 + 990 = 1331$ способом пассажиры могут выйти из лифта. Способ второй: в общем случае он более рационален, более того, позволяет обойтись без результатов предыдущих пунктов. Рассуждения таковы: $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 1-й пассажир из лифта и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 2-й пассажир и $C_{11}^1 = 11$ способами может выйти 3-й пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3 = 1331$ способом могут выйти три человека

Ответ: 1) 11; 2) 330; 3) 990; 4) 1331

Задачи для самостоятельного решения.

1. В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?

2. Свете на день рождения подарили 4 плюшевых игрушки, 2 мяча и 5 кукол. Мама положила все игрушки в большую коробку. Сколькими способами Света сможет достать из коробки 1 плюшевую игрушку, 1 мяч и 1 куклу?

3. В 8 “а” классе лучше всех математику знают 5 учеников: Вася, Дима, Олег, Катя и Аня. На олимпиаду по математике нужно отправить пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки. Сколькими способами учительница может эту пару выбрать?

4. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

5. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

6. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

7. В кабинете заведующего ювелирного магазина имеется код, состоящий из двух различных гласных букв русского алфавита, за которой следуют 3 различные цифры. Сколько вариантов придется перебрать мошеннику, чтобы раздобыть драгоценности, которые там хранятся?

8. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

6 Перестановки с повторениями

В перестановках с повторениями, как и в «обычных» перестановках, участвует сразу всё множество объектов, но есть одно, но: в данном множестве один или большее количество элементов (объектов) повторяются.

Задача.

Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

Решение: в том случае, если бы все буквы были различны, то следовало бы применить формулу P_n, однако всего: 11 карточек, среди которых буква:

ü К – повторяется 3 раза;
ü О – повторяется 3 раза;
ü Л – повторяется 2 раза;
ü Ь – повторяется 1 раз;
ü Ч – повторяется 1 раз;
ü И – повторяется 1 раз.

По формуле количества перестановок с повторениями: $P_{11(повт)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{39916800}{6\cdot 6\cdot 2} = 554400$ различных буквосочетаний можно получить.

Ответ: 554400

Задачи для самостоятельного решения.

Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она могла это сделать?

Сколькими способами можно расположить в ряд две зелёные и четыре красные лампочки?

Сколькими способами можно упаковать девять различных книг в трёх бандеролях соответственно по два три, четыре книги в каждой бандероли?

Группу командировочных из восьми человек требуется расселить в три комнаты, из которых две трёхместные и одна двухместная. Сколько вариантов расселения возможно?

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в следующих исходных словах: а) академия, б) электротехника, в) молокопродукт?

Сколькими способами можно разделить 12 предметов между тремя студентами, чтобы каждому досталось ровно по четыре предмета?

7 Сочетания с повторениями

Характерная особенность этого вида комбинаций состоит в том, что выборка проводится из нескольких групп, каждая из которых состоит из одинаковых объектов.

Например,пусть имеется три элемента: a, b и c. Тогда из этих трёх элементов можно составить шесть сочетаний с повторениями по два элемента: ab, ac, bc, aa, bb, cc.

Сочетания с повторениями вычисляются по формуле

$$C^m_{n(повт)} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}, \qquad (4)$$

Задача.

В студенческой столовой продают сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?

Решение: сразу обратите внимание на типичный критерий сочетаний с повторениями – по условию на выбор предложено не множество объектов как таковое, а различные видыобъектов; при этом предполагается, что в продаже есть не менее пяти хот-догов, 5 ватрушек и 5 пончиков. Пирожки в каждой группе, разумеется, отличаются. Однако физические характеристики пирожков по смыслу задачи не существенны, хот-доги, ватрушки, пончики в своих группах считаются одинаковыми.

Что может быть в выборке? Прежде всего, следует отметить, что в выборке обязательно будут одинаковые пирожки. Варианты тут на любой вкус: 5 хот-догов, 5 ватрушек, 5 пончиков, 3 хот-дога + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 + ватрушки + 2 пончика и так далее.

Как и при «обычных» сочетаниях, порядок выбора и размещение пирожков в выборке не имеет значения – просто выбрали 5 штук и всё.

Используем формулу (4)

$C^5_{3(повт)} = C^5_{3+5-1} = C^5_7 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2!} = 21$ способом можно приобрести 5 пирожков.

Ответ: 21

Задача.

В кошельке находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10-рублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

Решение: используем формулу сочетаний с повторениями: $C^3_{4(повт)} = C^3_6 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{720}{6\cdot 6} = 20$ способами можно выбрать 3 монеты из кошелька. Ответ: 20

Задачи для самостоятельного решения.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пироженных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пироженных?

В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

Сколькими способами Буратино, кот Базилио и лиса Алиса могут поделить между собой 5 одинаковых золотых монет?

Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

8 Размещения с повторениями

Из множества, состоящего из n элементов, выбирается m элементов, при этом важен порядок элементов в каждой выборке. Любой объект исходного множества мы можем выбирать сколько угодно раз.

Например,пусть А = {1, 2, 3}. Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества А: 1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 3, 1; 3, 2; 3, 3.

Размещения с повторениями вычисляются по формуле

$$A^{m}_{n(повт)} = n^{m}, \qquad (5)$$

Задача.

Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

Решение: достаточно знаний правил комбинаторики: $C^1_{10} = 10$ способами можно выбрать первую цифру пин-кода и $C^1_{10} = 10$ способами – вторую цифру пин-кода и столькими же способами – третью и столькими же – четвёртую. Таким образом, по правилу умножения комбинаций, четырёхзначный пин-код можно составить: $C^1_{10} \cdot C^1_{10} \cdot C^1_{10} \cdot C^1_{10} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ способами.

А теперь с помощью формулы. По условию нам предложен набор из $n = 10$ цифр, из которого выбираются $m = 4$ цифры и располагаются в определенном порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться. По формуле (5) $A^4_{10(повт)} = 10^4 = 10000$

Ответ: 10000

Задача.

Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами).

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Не так их, кстати, и много. В крупных регионах такого количества не хватает, и поэтому для них существуют по несколько кодов к надписи RUS.

Решение: $A^3_{10(повт)} = 10^3 = 1000$ способами можно составить цифровую комбинацию автомобильного номера, при этом одну из них (000) следует исключить: $A^3_{10(повт)} - 1 = 1000 - 1 = 999$.

$A^3_{12(повт)} = 12^3 = 1728$ способами можно составить буквенную комбинацию автомобильного номера.

По правилу умножения комбинаций, всего можно составить: $(A^3_{10(повт)} - 1) \cdot A^3_{12(повт)} = 999 \cdot 1728 = 1726272$ автомобильных номера (каждая цифровая комбинация сочетается с каждой буквенной комбинацией). Ответ: 1726272

Задачи для самостоятельного решения.

1) Сколько трёхзначных чисел может быть составлено из нечётных цифр?

2) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Сколькими способами девочка Яна может разложить 12 кукол по трём ящикам, если каждый ящик может вместить все куклы?

Сколькими способами Пончик может рассовать 6 конфет по 9 карманам, если каждый карман может вместить все конфеты?

Заключение

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

В пособии кратко изложены основные положения раздела дискретной математики «Комбинаторика». Приведено много задач для самостоятельного решения. Перед каждым набором задач разбираются примеры.

Пособие ориентировано на студентов первых курсов и преподавателей дисциплины «Математика».

Список использованных источников

1 Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208с.

2 Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб.пособие для техникумов. – 3-еизд.,перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 495 с.: ил.

3http:// www.matica.org.ua

4 http:// www.урок.рф

5 http:// www.mathprofi.ru