МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

для специальности 18.02.12 «Технология аналитического контроля химических соединений»второго курса очного обучения

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Братск 2019

Составила (разработала)*Габдрахманова А.В.*, преподаватель кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

«___» ________________20___г.   ________________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционно-издательским советом

____

(Подпись председателяРС)

«____» ________________20__г.   № ________________________

Содержание

Введение

Данное методическое пособие содержит дидактический материал для закрепления и проверки знаний, основные формулы и краткие теоретические сведения следующих разделов дисциплины «Математика»:элементы линейной алгебры, основы математического анализа, основы дифференциального и интегрального исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, основы теории комплексных чисел. Материал предназначен для студентов второго курса специальности 18.02.01 «Аналитический контроль качества химических соединений» очного факультета.

В пособии рассматриваются краткие теоретические сведения и основные формулы. Особое внимание уделяется практическим задачам, которые представлены в нескольких вариантах.

1 Практическая работа № 1.Нахождение обратной матрицы

1.1Методические указания к практической работе № 1

Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m одинаковой длины строк или n одинаковой длины столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

где a_{ij}- элемент матрицы, который находится в i-ой строке и j-м столбце.

Основные виды матрицы:

¾ квадратная (это матрица с равным числом столбцов и строк);

¾ транспонированная (можно получить, поменяв строки и столбцы матрицы местами.Матрица А размера $m \times n$ при этом преобразовании станет матрицей A^T размерностью $n \times m$);

¾ единичная (квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю)

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Для матрицы определены следующие алгебраические операции:

¾ сложение матриц, имеющих один и тот же размер;

¾ умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую строк);

¾ в том числе умножение на матрицу вектора (по обычному правилу матричного умножения; вектор является в этом смысле частным случаем матрицы).

Рассмотрим операции над матрицами более подробно.

1. Сложение матриц А + В есть операция нахождения матрицы С, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц А и В, то есть каждый элемент матрицы С равен:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (3)$$

2.Умножение матрицы A на число λ (обозначение:λA) заключается в построении матрицы B, элементы которой получены путём умножения каждого элемента матрицы A на это число, то есть каждый элемент матрицы B равен

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad (4)$$

3.Умножение матриц (обозначение:AB, реже со знаком умножения $A \times B$) — есть операция вычисления матрицы C, элементы которой равны сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго (умножение строки на столбец)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad (5)$$

Количество столбцов в матрице A должно совпадать с количеством строк в матрице B. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, матрица B — $n \times k$, то размерность их произведения AB = C есть $m \times k$.

Определитель матрицы A обозначается как: det(A), |A| или ΔA.

Определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (6)$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}), \qquad (7)$$

Определение Минором, соответствующим данному элементу a_{ij} определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, т.е. i-ой строки и j-го столбца. Миноры соответствующие данному элементу a_{ij} будем обозначать M_{ij}.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}. Из определения получаем, что связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (8)$$

Например, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$.

Определение. Если А – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{9}$$

(Это определение вводится по аналогии с умножением чисел). Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц.

Теорема. Для того чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.

Итак, чтобы найти обратную матрицу нужно:

1. Найти определитель матрицы А.

2. Найти матрицу, транспонированную полученной матрице.

3. Найти алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A^T и составить матрицу, элементами которой являются числа A_{ij}.

4. Умножить матрицу, полученную в пункте 3 на $\frac{1}{\Delta A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

Пример 1: Найти А+2В, если А $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Решение: $\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 1 & 0 + 2 \cdot (-2) & -1 + 2 \cdot 3 \\ 1 + 2 \cdot 0 & -3 + 2 \cdot 4 & 4 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Пример 2: Найти А · В, если А $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Решение: · В $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 19 & -16 \end{pmatrix}$

Пример 3: Решить матричное уравнение: $2DA - 3A = 2X$, В $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

А $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Решение: $D \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & -12 & 13 \\ 14 & -24 & 38 \end{pmatrix}$, $2DA - 3A = \begin{pmatrix} 23 & -24 & 20 \\ 19 & -36 & 61 \end{pmatrix}$, $X = \frac{1}{2} \cdot (2DA - 3A) = \begin{pmatrix} 11.5 & -12 & 10 \\ 9.5 & -18 & 30.5 \end{pmatrix}$

Пример 4: Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и выполнить проверку

Решение: $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1 + 3 + 1 = 5$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2(2-1) = 1$,

аналогично $A_{12} = 3$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = 3$

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Для проверки используется формула: $A \cdot A^{-1} = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицей и каковы их свойства?

2) Какая матрица называется единичной?

3) Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

1.2 Задания для практической работы № 1

Вариант 1

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

2) Найти обратную A^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 1 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -9 \\ 6 & 11 & 10 \\ 8 & -5 & -21 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 5 \\ -2 & -7 & -4 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 22 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 \\ -20 & 0 & -40 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} -40 & 0 & -20 \\ 1 & 1 & 1 \\ 100 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 37 & 2 & -7 \\ -3 & 4 & 1 \\ 10 & 20 & 0 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

1) Вычислить определитель любым способом $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -11 \\ -9 & 9 & 11 \\ 11 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

2) Найти обратнуюA^{-1} матрицу и выполнить проверку

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Практическая работа № 2. Решение систем линейных уравнений

2.1 Методические указания к практической работе № 2

Дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (11)$$

Правило Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (14)$$

Метод Гаусса. Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы, и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right), \quad (15)$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

¾ перестановка строк или столбцов;

¾ умножение строки на число, отличное от нуля;

¾ прибавление к одной строке другие строки.

Матричный метод.

Рассмотрим матрицу системы и матрицы столбцы неизвестных и свободных членов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$ получаем решение матричного уравнения в виде

$$X = A^{-1}B, \tag{16}$$

Пример 1: Решить систему по правилуКрамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3$$

Ответ: *x=1, y=2, z=3.*

Пример 2: Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2x = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) -I\text{строку}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \text{меняем местами с 1ой строкой}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3I \text{ строк} \\ -5I \text{ строк} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \text{ строку} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$ меняем местами со 2ой строкой

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$ $-3II$ строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases} 1x - 2y = -1 \\ 1y + 2z = 3 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Находим переменные, начиная с последнего уравнения:

$$z = 1, y = 1, x = 1$$

Ответ: $x = 1, y = 1, z = 1$.

Пример 3: Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ y + 2z = 13 \end{cases}$$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = 4, y = 3, z = 5$.

Вопросы для самоконтроля:

1) Опишите правило Крамера.
2) Опишите суть метода Гаусса.
3) Опишите матричный метод.

2.2 Задания для практической работы № 2

Вариант 1

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

Вариант 2

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

Вариант 3

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

Вариант 4

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

Вариант 5

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

Вариант 6

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

Вариант 7

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

Вариант 8

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

Вариант 9

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

Вариант 10

Решите системы линейных алгебраических уравнений

А) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

3 Практическая работа № 3. Вычисление пределов функций

3.1 Методические указания к практической работе № 3

Обозначения последовательностей: $\{n\} = \{1,2,3,4,\dots\}$ - натуральные числа; $\{2n\} = \{2,4,6,8,\dots\}$ - четные числа, $\{2n-1\} = \{1,3,5,7,\dots\}$ - нечетные числа.

Формулы для вычисления

$$\frac{C}{\infty} = 0, \ \frac{C}{0} = \infty, \tag{17}$$

где $0 - б/м$, $\infty - б/б$, C – постоянная.

Алгоритм раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$:при $x \to \infty$. Пусть m – наивысшая степень числителя, n - наивысшая степень знаменателя. Тогда:

1) $m = n \Rightarrow \frac{a_m}{b_n}$, где a_m и b_n коэффициенты при x^m и x^n

2) $m > n \Rightarrow \infty$

3) $m < n \Rightarrow 0$

Пример 1: Найти первые три члена последовательности $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

Решение: Подставляем вместо n числа 1, 2 и 3: $a_1 = \frac{1}{2\cdot1+1} = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{1}{2\cdot2+1} = \frac{1}{5}$; $a_3 = \frac{1}{2\cdot3+1} = \frac{1}{7}$

Пример 2: Написать общий член последовательности *а)* $\frac{3}{1};\frac{4}{3};\frac{5}{5};\frac{6}{7};\dots$

б) $\frac{1}{1};\frac{4}{1\cdot2};\frac{9}{1\cdot2\cdot3};\frac{16}{1\cdot2\cdot3\cdot4};\frac{25}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5};\dots$

Решение:

а) Заметим, что в числителе натуральные числа, начиная с трех, а в знаменателе только нечетные натуральные числа. Значит, формула общего члена будет $a_n = \frac{n+2}{2n-1}$.

б) Заметим, что в числители квадраты натуральных чисел, а в знаменателе факториал натуральных чисел, т.е. $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$. Значит, формула общего члена будет $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

Пример 3: Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x + 4}{3+x} = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 4}{3+(-1)} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x-9}{2} = \frac{3\cdot3-9}{2} = \frac{0}{2} = 0$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}=\dfrac{5}{4\cdot 2-8}=\dfrac{5}{0}=\infty$

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3}{4x+1}=\dfrac{-3}{4\cdot\infty+1}=\dfrac{-3}{\infty}=0$

Пример 4: Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2}{2x-5}=\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{3x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{3x}=\dfrac{3-2}{3\cdot 3}=\dfrac{1}{9}$,

$x^2-5x+6=0$, $D=1, x_{1,2}=2;3$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1, x_2 - корни уравнения

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}\cdot\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{\left(\sqrt{5-x}\right)^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{5-x-5-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}$

Пример 5: Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-2x}{3-2x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\begin{vmatrix} m=2 \\ n=2 \Rightarrow\ m=n\end{vmatrix}=\dfrac{7}{-2}=-\dfrac{7}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x^4}{5x-3x^3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\begin{vmatrix} m=4 \\ n=3 \Rightarrow\ m>n\end{vmatrix}=\infty$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3-2x^3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\begin{vmatrix} m=2 \\ n=3 \Rightarrow\ m<n\end{vmatrix}=0$

Пример 6: Раскрытие неопределенности $\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})\cdot\dfrac{(x+\sqrt{x^2-4x})}{(x+\sqrt{x^2-4x})}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(\sqrt{x^2-4x})^2}{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(x^2-4x)}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^2+4x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\dfrac{4}{1+\sqrt{1-0}}=2$

Пример 7: Раскрытие неопределенностей с помощью замечательных пределов а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|3x=t;\ x=\frac{t}{3};\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}}=\frac{3}{2}\cdot\underbrace{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}=\left[1^{\infty}\right]=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2x}\cdot 5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2x}\cdot 5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15}{2}}=e^{\frac{15}{2}}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x\right)^{\frac{1}{5x}}=\left[1^{\infty}\right]=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x\right)^{\frac{1}{4x}}\right]^{4x\cdot\frac{1}{5x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}4x\cdot\frac{1}{5x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{5}}=e^{\frac{4}{5}}$

Вопросы для самоконтроля:

1) Что такое числовая последовательность?

2) Что такое предел последовательности?

3) Объясните почему $\frac{C}{\infty}=0$, $\frac{C}{0}=\infty$, где $0-$ б/м, $\infty-$ б/б, $C-$ постоянная.

3.2 Задания для практической работы № 3

Вариант 1

Вычислить пределы

1) а) $\lim_{x\to 2}(2x^2-4x+7)$, б) $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+4)$

2) а) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5}{3x}$ б) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2-x}$

3) а) $\lim_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x^2+6x}$ б) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

4) а) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-4x^7}{5x^6+6x^5}$ б) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3-2x-4}{4x^2+3x-x^3}$ в) $\lim_{x\to\infty}\frac{6+7x}{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

Вариант 2

Вычислить пределы

1) а) $\lim_{x\to -1}(5-3x-x^2)$ б) $\lim_{x\to 2}(x^3+3x-15)$

2) а) $\lim_{x\to 0}\frac{2-x^3}{9x}$ б) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2-4}$

3) а) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ б) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-6x+5}$

4) а) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^4}{9x^8+8x^9}$ б) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x+x^4}{1-7x^3+x-3x^4}$ в) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2x^2}{7x^2+5}$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$

Вариант 3

Вычислить пределы

1) а) $\lim_{x\to 4}(4x-7x^2-11)$, б) $\lim_{x\to -4}(2x^3-7x+14)$

2) а) $\lim_{x\to 0}\frac{13-x^5}{\sqrt{5}\cdot x}$ б) $\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x^2+6}$

3) а) $\lim_{x \to 7} \frac{x^2-7x}{x^2-49}$ б) $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-3x-4}$

4) а) $\lim_{x \to \infty} \frac{8x^3+6x^5}{7x^8-x^5}$ б) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5+5x+x^4}{3-8x^5-x+7x^4}$ в) $\lim_{x \to \infty} \frac{11x-x^2}{30+4x^2}$

5) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x})$

4 Практическая работа № 4. Исследование функций на непрерывность

4.1 Методические указания к практической работе № 4

Алгоритм исследования функции на непрерывность

1) Найти точки разрыва (либо даны, либо находим по области определения функции)

2) Найти левосторонний и правосторонний пределы в точке разрыва
а) если хотя бы один из этих пределов не существует или равен ∞, то точка разрыва 2го рода;
б) если односторонние пределы конечны и равны между собой, то точка разрыва 1го рода – устранимого;
в) если односторонние пределы конечны и не равны между собой, то точка разрыва 1го рода – конечного.

3) Найти асимптоты к графику функции (если это возможно)
а) Вертикальные: x=a, если x=a – точка разрыва 2го рода, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{18}$$

б) Горизонтальные: y=b, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, сколько конечных пределов, столько и асимптот.
в) Наклонные: y=kx+b, где

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] \tag{19}$$

если к=0, то наклонных асимптот нет.

4) Схематично построить график функции

Пример 1: $y = \frac{x}{x-3}$

Решение:

1) D(y): $x - 3 \neq 0, x \neq 3$, следовательно x_0=3 – точка разрыва
2) $f(3-0) = \lim\limits_{x \to 3-0} \frac{x}{x-3} = \frac{3-0}{3-0-3} = -\infty$ левосторонний предел
$f(3+0) = \lim\limits_{x \to 3+0} \frac{x}{x-3} = \frac{3+0}{3+0-3} = +\infty$ правосторонний предел, следовательно x_0=3 – точка разрыва 2го рода
3) асимптоты: а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-3} = \infty$,следовательно x=3 – вертикальная асимптота
б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-3} = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x-3} = 1$,следовательно y=1 – горизонтальная асимптота

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x-3}\right) \div x = 0$ наклонных асимптот нет

4) График изображен на рисунке 1

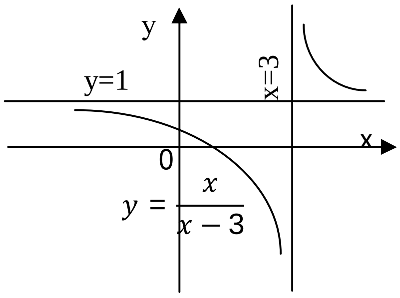

Рисунок 1 – График функции

Пример 2: $y = \begin{cases} x+1, x<1 \\ 2+x, 1 \le x \le 2 \\ 2x^2, x>2 \end{cases}$

Решение: 1) x_0=1 и x_0=2 – точки разрыва

2) $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0}(x+1) = 2$ левосторонний предел

$f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0}(2+x) = 3$ правосторонний предел, $2 \neq 3$

следовательно x_0=1 – точка разрыва 1го рода конечного

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0}(2+x) = 4$ левосторонний предел

$f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0}(2x^2) = 8$ правосторонний предел, $4 \neq 8$

следовательно x_0=2 – точка разрыва 1го рода конечного

3) асимптот нет

4) $y = x + 1$ прямая (0,1), (-1,0)

$y = 2 + x$ прямая (1,3), (2,4)

$y = 2x^2$ парабола ветви вверх (3,8), (4, 32)

График изображен на рисунке 2.

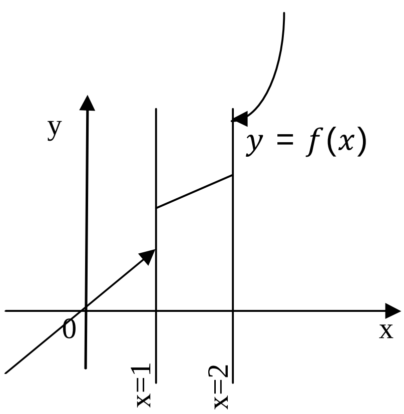

Рисунок 2 – График функции

Вопросы для самоконтроля:
1. При каких условиях функция является непрерывной?
2. Какие точки разрыва вы знаете? Как их определить?
3. Что такое асимптота?
4. Какие виды асимптоты вы знаете? Как их определить?

4.2 Задания для практической работы № 4

Вариант 1. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{x^2}{2x-4}$ Б) $y = \begin{cases} x+4, x < -1 \\ x^2+2, -1 \le x < 1 \\ 2x, x \ge 1 \end{cases}$

Вариант 2. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{4}{5-x}$ Б) $y = \begin{cases} x-2, x < 0 \\ 2, x = 0 \\ x^2-2, x > 0 \end{cases}$

Вариант 3. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{x^2}{x-6}$ Б) $y = \begin{cases} x+2, x \le -1 \\ x^2+1, -1 < x \le 1 \\ 3-x, x > 1 \end{cases}$

Вариант 4. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{3}{1-2x}$ Б) $y = \begin{cases} x-2, x < 0 \\ -2, x = 0 \\ -x-2, x > 0 \end{cases}$

Вариант 5. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{1}{x^2-6x+8}$ Б) $y = \begin{cases} x-2, x < 2 \\ x+2, x \ge 2 \end{cases}$

Вариант 6. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{9}{16-x^2}$ Б) $y = \begin{cases} x-1, x \ge 0 \\ -x-1, x < 0 \end{cases}$

Вариант 7. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$ Б) $y = \begin{cases} 2x-1, x \ge 0 \\ -2x-1, x < 0 \end{cases}$

Вариант 8. Исследовать на непрерывность и построить график:

А) $y = \frac{4}{25-x^2}$ Б) $y = \begin{cases} 3x+1, x \ge 0 \\ -3x+1, x < 0 \end{cases}$

5 Практическая работа № 5. Дифференцирование функций

5.1 Методические указания к практической работе № 5

Определение: Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (20)$$

Дифференцирование – это операция нахождения производной функции. Дифференцирование состоит из двух этапов:

1) применение правил дифференцирования

$$(C \cdot u)' = C \cdot u', \qquad (21)$$

$$(u \pm v \pm w \pm ...)' = u' \pm v' \pm w' \pm ... \text{ – для конечного числа слагаемых} \qquad (22)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \qquad (23)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \qquad (24)$$

$$y = f(U(x)); \quad y' = f'(u) \cdot u'(x) \text{ - для сложной функции,} \qquad (25)$$

2) применение формул дифференцирования

$$(C)' = 0, \qquad (26)$$

$$(x)' = 1, \qquad (27)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \qquad (28)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (29)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad (30)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};, \qquad (31)$$

$$(\lg x)' = \lg e \cdot \frac{1}{x}, \qquad (32)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \qquad (33)$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (34)$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (35)$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (36)$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (37)$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (38)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (39)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (40)$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (41)$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (42)$$

Правило Лопиталя для вычисления пределов.

1.Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (43)$$

2. Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (44)$$

Пример 1: Найти производную функции $y = x^3 + 4\ln x - \frac{\sin x}{5}$.

Решение: По правилу $(u+v+w+...)' = u' + v' + w' + ...$ получим

$y' = \left(x^3\right)' + (4\ln x)' - \left(\frac{\sin x}{5}\right)'$. По правилу $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ получим

$y' = \left(x^3\right)' + 4(\ln x)' - \frac{1}{5}(\sin x)'$. По формулам дифференцирования $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\sin x)' = \cos x$ получим $y' = 3x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{5} \cdot \cos x$

Пример 2: Найти производную функции $y = 3^x \cdot x^2$.

Решение: По правилу $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ получим:

$y' = \left(3^x\right)' \cdot x^2 + 3^x \cdot \left(x^2\right)'$. По формулам дифференцирования $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$;

$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ получим $y' = \dfrac{3^x}{\ln 3} \cdot x^2 + 3^x \cdot 2x$

Пример 3: Найти производную функции $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

Решение: По правилу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ получим

$y' = \dfrac{\left(e^x\right)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}$. По формулам дифференцирования $\left(e^x\right)' = e^x$;

$(\cos x)' = -\sin x$ получим $y' = \dfrac{e^x \cdot \cos x - e^x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

Пример 4: Найти производную функции $y = \left(3 - x^4\right)^{76}$

Решение: Выполним замену $u = 3 - x^4$, тогда $y = u^{76}$. По правилу $y = f(U(x))$; $y' = f'(u) \cdot u'(x)$ получим

$y = \left((u)^{76}\right)' \cdot u' = 76u^{75} \cdot u' = 76\left(3 - x^4\right)^{75} \cdot \left(3 - x^4\right)' = 76\left(3 - x^4\right)^{75} \cdot \left(-4x^3\right) =$

$= -304x^3 \cdot \left(3 - x^4\right)^{75}$

Пример 5: Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(x - sinx)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - cosx)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(sinx)'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{6} = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое производная функции?
2. Какие основные правила дифференцирования вы знаете?
3. Как найти производную сложной функции?

5.2 Задания для практической работы № 5

Вариант 1

Найти производную первого и второго порядка № 1-5

1. $y=\cos\dfrac{x}{4}$
2. $y=\dfrac{4}{9}+e^{(2-3x)}$
3. $y=6\sqrt{7x-4}$
4. $y=\ln(3-8x)$
5. $y=\dfrac{5+4x}{5-4x}$

Найти производную первого порядка № 6-10

6. $y=5x-\sqrt{3x+4}$
7. $y=tg\dfrac{5x}{3}-ctg^{3}x$
8. $y=(2x+4)^{7}\cdot(1-4x)$
9. $y=\dfrac{\ln(3x-2)}{2x-1}$
10. $y=tg\ln\sqrt{x^{3}}$

Вариант 2

Найти производную первого и второго порядка № 1-5

1. $y=\sin 5x$
2. $y=e^{x^{3}}-4$
3. $y=\dfrac{\sqrt{3x+2}}{4}$
4. $y=\ln(5x-8)$
5. $y=\dfrac{7x+3}{7x-3}$

Найти производную первого порядка № 6-10

6. $y=\dfrac{x}{3}+2\sqrt{7x^{3}-4x}$
7. $y=2tg4x-ctg\dfrac{x}{3}$
8. $y=e^{x^{3}}\cdot\ln 2x$
9. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{7x+5}}$
10. $y=e^{\cos\sqrt{(1-4x)}}$

6 Практическая работа №6. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

6.1 Методические указания к практической работе № 6

Алгоритм исследования функции

1) Найти область определения функции D(y)

а) для многочленов: $x \in (-\infty;\ +\infty)$;
б) для дробных функций: знаменатель $\neq 0$;
в) для иррациональных функций: подкоренное выражение ≥ 0;
г) для логарифмических функций: все что есть под знаком логарифма > 0.

2) Исследовать на четность / нечетность

а) $f(-x) = f(x)$ - четная функция, график симметричен относительно оси Oy;
б) $f(-x) = -f(x)$ - нечетная функция, график симметричен относительно начала координат (0; 0);
в) $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ - ни четная, ни нечетная функция, НЕТ симметрии.

3) Найти пересечения с осями координат (если это возможно)

а) График $\cap\ OX\ => y = 0$, тогда найдите x;
б) График $\cap\ OY\ => x = 0$, тогда найдите y.

4) Исследовать на монотонность и экстремум

а) Найти y'
б) $y' = 0$ и найти x (если это возможно);
в) D(y) из пункта (1) разбить значениями x из пункта (4б), если таковые есть;
г) заполнить таблицу 1. Если $y' > 0$, то $y\ \uparrow$, а если $y' < 0$, то $y\ \downarrow$. Определить точки экстремума: максимум или минимум.

Таблица 1- Исследование на монотонность и экстремум

x	Промежутки D(y) из пункта (1) разбить значениями x из пункта (4б), если таковые есть
y'	Значения производной на каждом промежутке
y	«поведение» графика функции

5) Исследовать на выпуклость и перегиб

а) Найти y'';
б) $y'' = 0$ и найти x (если это возможно);
в) D(y) из пункта (1) разбить значениями x из пункта (5б), если таковые есть;
г) заполнить таблицу 2. Если $y'' > 0$, то $y\ \cup$, а если $y'' < 0$, то $y\ \cap$. Определить точки перегиба.

Таблица 2- Исследование на выпуклость и перегиб

x	Промежутки D(y) из пункта (1) разбить значениями x из пункта (5б), если таковые есть
y''	Значения второй производной на каждом промежутке
y	«поведение» графика функции

6) Найти асимптоты, если это возможно.

а) Вертикальные: x=a, если x=a – точка разрыва 2го рода, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \tag{45}$$

б) Горизонтальные: y=b, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b, \tag{46}$$

сколько конечных пределов, столько и асимптот.
в) Наклонные: y=kx+b, где

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{47}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx], \tag{48}$$

если к=0, то наклонных асимптот нет.

7) Схематично построить график функции, используя данные по исследованию функции.

Пример 1: Исследовать функцию с помощью производной и построить график $y = \ln(x+2)$.

Решение: 1) D(y): $x + 2 > 0, x > -2$, т. к. функция логарифмическая, следовательно $x \in (-2; +\infty)$

2) $f(-x) = \ln(-x+2) \neq f(x) \neq -f(x)$ функция ни четная, ни нечетная, симметрии нет

3) а) График $\cap\ OX \Rightarrow y = 0$, тогда $\ln(x+2) = 0$. Т.к. $log_a b = c \leftrightarrow b = a^c$ и $log_e b = \ln b$, то $x + 2 = e^0$

$x + 2 = 1 \leftrightarrow x = -1 \leftrightarrow$ график $\cap\ OX$ в точке (-1; 0)

б) График $\cap\ OY \Rightarrow x = 0$, тогда $y = \ln(0+2) = \ln 2 \approx 0{,}7 \leftrightarrow$ график $\cap\ OY$ в точке (0; 0,7)

4) $y' = \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' = \frac{1}{x+2}; \frac{1}{x+2} = 0; 1 \neq 0$ и $x + 2 \neq 0$ как знаменатель. Значит нет решений. Заносим данные в таблицу 3.

Таблица 3- Исследование на монотонность и экстремум

x	$-2; +\infty$
y'	+
y	$\uparrow$

$$y'(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

5) $y'' = ((x+2)^{-1})' = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2}; -\frac{1}{(x+2)^2} = 0; -1 \neq 0$ и

$(x + 2)^2 \neq 0$ как знаменатель.Значит нет решений. Заносим данные в таблицу 4.

Таблица 4- Исследование на выпуклость и перегиб

x	$-2; +\infty$
y''	-
y	$\cap$

$$y''(0) = -\frac{1}{(0+2)^2} = -\frac{1}{4} < 0$$

6) $x \neq -2$, вертикальные: $\lim\limits_{x \to -2} \ln(x+2) = \ln(-2+2) = \ln 0 = \infty$, значит $x = -2$;

горизонтальные: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x+2) = \infty$, нет; значит наклонных тоже нет.

7) Строим график, (рисунок 3)

Отмечаем все найденные точки и плавной линией соединяем все точки, учитывая возрастание, убывание и выпуклость графика.

Пример 2: $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Решение: 1) D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$, т. к. дан многочлен

2) $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$ функция четная, график симметричен относительно оси Оу

3) а) График $\cap$ OX $=> y = 0$, тогда $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Т.к. $x^2 = t$ то $t^2 - 5t + 4 = 0$, $D = 9$, $t_{1,2} = 4; 1 \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm 1$ и $x^2 = 4 \leftrightarrow x = \pm 2$ график $\cap$ OX в точках (-1; 0), (1; 0), (-2; 0) и (2; 0);

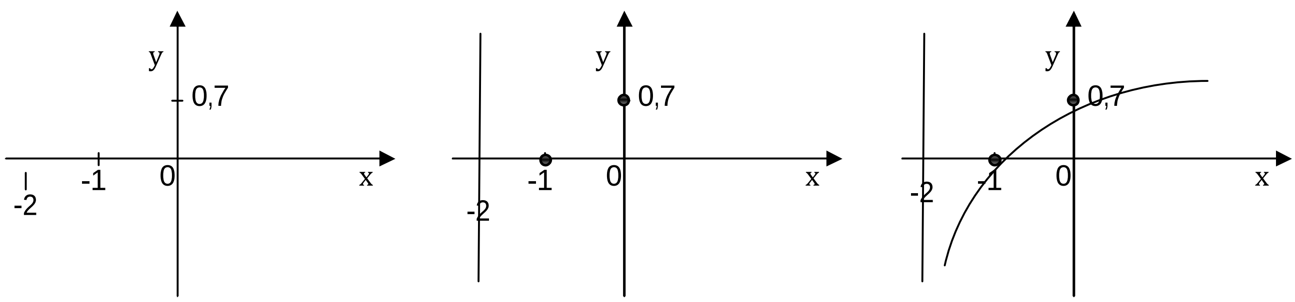

Рисунок 3 – График функции

б) График $\cap$ OY $=> x = 0$, тогда $y = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4 \leftrightarrow$ график $\cap$ OY в точке (0; 4).

4) $y' = 4x^3 - 10x$; $4x^3 - 10x = 0$; $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2,5} \approx \pm 1,6$.

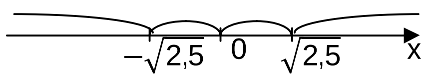

Рисунок 4 – Область определения

Таблица 5- Исследование на монотонность и экстремум

x	$-\infty;\ -\sqrt{2{,}5}$	$-\sqrt{2{,}5}$	$-\sqrt{2{,}5};0$	0	$0;\sqrt{2{,}5}$	$\sqrt{2{,}5}$	$\sqrt{2{,}5};+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↓	-2,25 min	↑	4 max	↓	-2,25 min	↑

5) $y'' = 12x^2 - 10;\ 12x^2 - 10 = 0;\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0{,}9.$

Таблица 6- Исследование на монотонность и экстремум

x	$-\infty;\ -\sqrt{\dfrac{5}{6}}$	$-\sqrt{\dfrac{5}{6}}$	$-\sqrt{\dfrac{5}{6}};\sqrt{\dfrac{5}{6}}$	$\sqrt{\dfrac{5}{6}}$	$\sqrt{\dfrac{5}{6}};+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	∪	0,5 перегиб	∩	0,5 перегиб	∪

6) т.к. D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$, значит, точек разрыва нет, следовательно, и асимптот нет;

7) Строим график

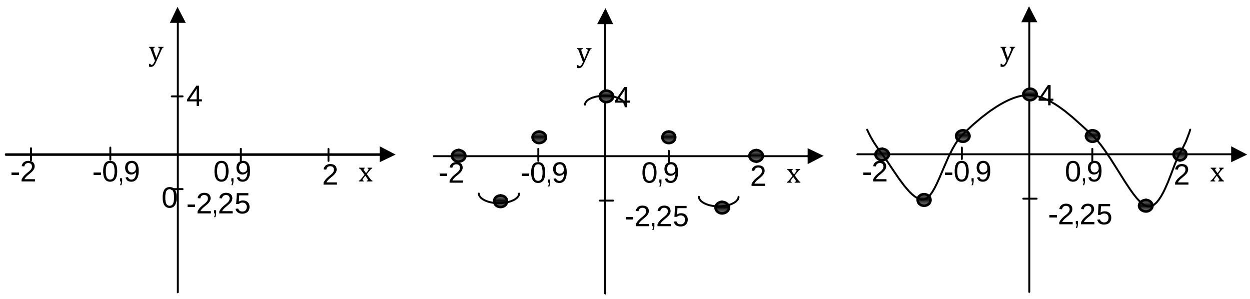

Рисунок 5 – График функции

Отмечаем все найденные точки и плавной линией соединяем все точки, учитывая возрастание, убывание и выпуклость графика.

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите этапы исследования функции?
2. Что и как можно исследовать с помощью производной?
3. Как определить возрастание или убывание функции?
4. Как определить выпуклость графика функции и точки перегиба?

6.2 Задания для практической работы № 6

Вариант 1. Исследовать функции и построить график
а) $y = \frac{1}{x+3}$ б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Вариант 2. Исследовать функции и построить график
а) $y = \sqrt{x - 5}$ б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

Вариант 3. Исследовать функции и построить график
а) $y = \frac{1}{x-5}$ б) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

Вариант 4. Исследовать функции и построить график
а) $y = \ln(x + 5)$ б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Вариант 5. Исследовать функции и построить график
а) $y = \frac{1}{x+5}$ б) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$

Вариант 6. Исследовать функции и построить график
а) $y = \sqrt{6x + 3}$ б) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$

Вариант 7. Исследовать функции и построить график
а) $y = \frac{1}{x-4}$ б) $y = x^3 - 6x^2 + 16$

Вариант 8. Исследовать функции и построить график
а) $y = \ln(x - 3)$ б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

Вариант 9. Исследовать функции и построить график
а) $y = \frac{x}{x-2}$ б) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Вариант 10. Исследовать функции и построить график
а) $y = \sqrt{x + 4}$ б) $y = -x^4 + 8x^2 + 9$

7 Практическая работа №7. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

7.1 Методические указания к практической работе № 7

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; C - произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) Постоянный множитель выносится за знак интеграла

$$\int a \times f(x)dx = a \times \int f(x)dx, \tag{49}$$

2) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \tag{50}$$

Формулы интегрирования элементарных функций:

$$\int dx = x + C, \tag{51}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \tag{52}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \tag{53}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \tag{54}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{55}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \tag{56}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \tag{57}$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C, \tag{58}$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C, \tag{59}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \tag{60}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \qquad (61)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad (62)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \qquad (63)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \qquad (64)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C, \qquad (65)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \qquad (66)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, \qquad (67)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad (68)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \qquad (69)$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (70)$$

Определение: Определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу – осью ОХ, сверху кривой y=f(x), слева и справа – прямымих=a, x=b.

Рассмотрим типовые площади фигур на рисунках 6-8.

В первом случае фигура выглядит как на рисунке 6 (полностью выше оси Ox), тогда расчет площади производим по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \qquad (71)$$

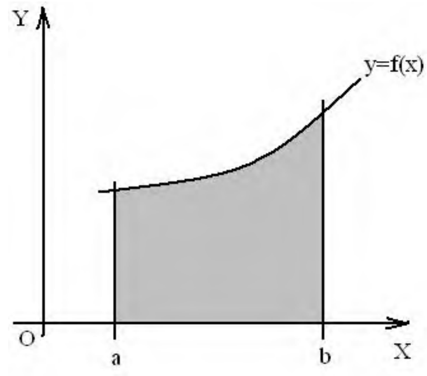

Рисунок 6 – Первый случай

Вовтором случае фигура выглядит как на рисунке 7 (полностью ниже оси Ох), тогда расчет площади производим по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \tag{72}$$

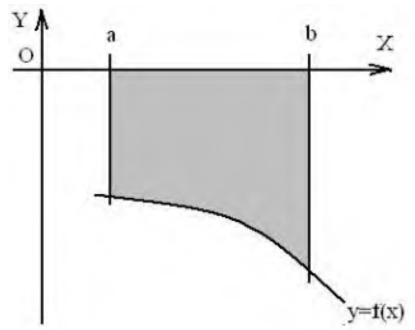

Рисунок 7 – Второй случай

В третьем случае фигура выглядит как на рисунке 8 (между осей), тогда расчет площади производим по формуле:

$$S = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx, \tag{73}$$

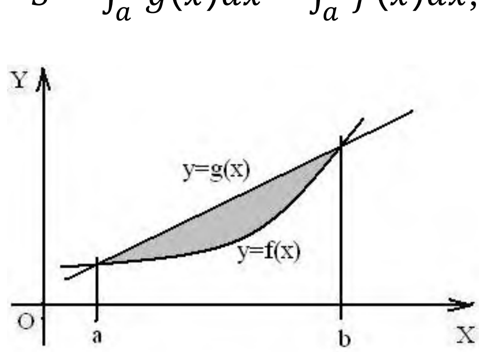

Рисунок 7 – Третий случай

Пример 1: Вычислите интеграл: $\int 4\cdot\sin x\ \ dx$. *Решение:* По правилу $\int a\cdot\sin x\ \ dx = a\cdot\int\sin x\ \ dx$ получим $\int 4\cdot\sin x\ \ dx = 4\cdot\int\sin x\ \ dx$. По формуле $\int\sin x\ \ dx = -\cos x + c$ получим $4\cdot\int\sin x\ \ dx = 4\cdot(-\cos x) + c = -4\cos x + c$.

Пример 2: Вычислите интеграл: $\int\frac{1}{16+x^2}\ \ dx$. *Решение:* По формуле

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\ \ dx = \frac{1}{a}\cdot arctg\,\frac{x}{a} + c$$ получим

$$\int\frac{1}{16+x^2}\ \ dx = \int\frac{1}{4^2+x^2}\ \ dx = \frac{1}{4}\cdot arctg\,\frac{x}{4} + c.$$

Вычисление определенных интегралов непосредственно

1) $\int\limits_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9$

2) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{7x} = \frac{1}{7}\cdot\int\limits_1^4\frac{dx}{x} = \frac{1}{7}\cdot\ln x\Big|_1^4 = \frac{1}{7}\cdot(\ln 4 - \ln 1) = \frac{1}{7}\cdot\ln 4$

Вычисление определенных интегралов методом замены переменной

$$1)\ \int_1^e \frac{9\ln x}{5x}dx = \frac{9}{5}\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx = \left(\begin{array}{c} \ln x = t \\ (\ln x)'dx = dt \\ \frac{1}{x}dx = dt;\ \ dx = dt:\frac{1}{x} = xdt \\ t_{в} = \ln e = 1 \\ t_{н} = \ln 1 = 0 \end{array}\right) =$$

$$= \frac{9}{5}\int_0^1\frac{t}{x}\cdot xdt = \frac{9}{5}\int_0^1 tdt = \frac{9}{5}\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{9}{5}\cdot\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

$$2)\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^{20x}dx = \left(\begin{array}{c} 20x = t \\ (20x)'dx = dt \\ 20dx = dt;\ \ dx = \frac{dt}{20} \\ t_{в} = 20\cdot\frac{1}{2} = 10 \\ t_{н} = 20\cdot\frac{1}{4} = 5 \end{array}\right) = \int_5^{10} e^t\frac{dt}{20} = \frac{1}{20}\int_5^{10}e^t dt = \frac{1}{20}e^t\Big|_5^{10} =$$

$$\frac{1}{20}\cdot(e^{10} - e^5)$$

Пример 1: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: y=2x+4, y=0, x=1, x=-1

*Решение:*y=2x+4 – прямая, для построения графика составим таблицу 7 для двух точек.

Таблица 7- Координаты точек

x	0	-2
y	4	0

y=0 – ось OX, x=1, x= -1 – прямые параллельные OY.

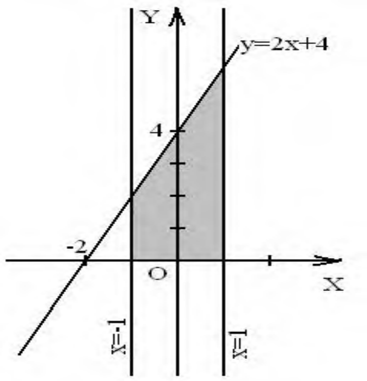

Рисунок 8 – Графики функций

$$S = \int_{-1}^{1} (2x + 4)dx = \left(2\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = (x^2 + 4x)\Big|_{-1}^{1} = 1 + 4 - (1 - 4) = 8$$

Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=2x$

Решение: $y=x^2$ – парабола, ветви вверх,для построения графика составим таблицу 8 для пяти точек.

Таблица 8- Координаты точек

x	-2	-1	0	2	1
y	4	1	0	4	1

y=2x – прямая. Для построения графика составим таблицу 9 для двух точек.

Таблица 9- Координаты точек

x	0	2
y	0	4

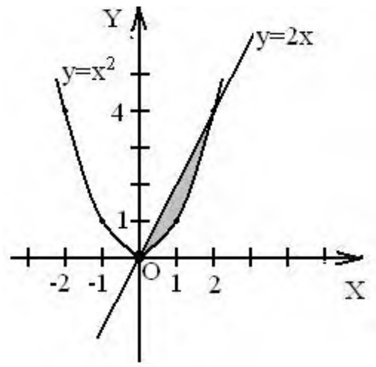

Рисунок 9 – Графики функций

Для составления формулы нахожденияплощади фигуры необходимо найти точки пересечения полученных графиков. Найдем a и b

$x^2=2x$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

x=0, x=2; следовательно a=0, b=2

Тогда, $S = S_б - S_м = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$,

$S_б = \int_0^2 2xdx = 2\frac{x^2}{2}|_0^2 = x^2|_0^2 = 4$,

$$S_м = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое неопределенный интеграл?
2. Напишите формулу для вычисления определенных интегралов.
3. Опишите последовательность действий при решении определенных интегралов методом замены переменной.
4. Опишите последовательность действий при решении определенных интегралов методом замены переменной.

7.2 Задания для практической работы № 7

Вариант 1

Найти площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $2x - 3y + 6 = 0, y = 0, x = 3$

б) $y = x^2, y = 2x + 8$

Вариант 2

Найти площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $y = 3x^2, y = 0, x = 1, x = 2$

б) $y = x^2, y = x + 2$

Вариант 3
Найти площадь фигуры ограниченной линиями:
а) $y = \frac{2}{x}, y = 0, x = -2, x = -4$
б) $y = x^2 + 2, y = 6$

Вариант 4
Найти площадь фигуры ограниченной линиями:
а) $y = 2x, y = 0, x = -3$
б) $y = 0{,}5x^2 - 4x + 10, y = x + 2$

Вариант 5
Найти площадь фигуры ограниченной линиями:
а) $y = 4x^3, y = 0, x = -1, x = 0$
б) $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1$

Вариант 6
Найти площадь фигуры ограниченной линиями:
а) $y = \frac{1}{2}x^3, y = 0, x = 1, x = 0$
б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4, y = -x + 10$

8 Практическая работа № 8. Решение комбинаторных задач

8.1 Методические указания к практической работе № 8

<u>Определение:</u>*Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.*

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{74}$$

<u>Определение:</u>*Размещением из n элементов по к (к≤n) называется любое множество, состоящее из любых к элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{75}$$

<u>Определение:</u>*Сочетанием из n элементов по к называется любое множество, составленное из к элементов, выбранных из данных n элементов.*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{76}$$

Пример 1: Сколькими способами можно расставить 7 бегунов на 7 дорожках?

Решение: $P_7=7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$. Ответ: 5040 способов.

Пример 2: На собрание пришли 3 девочки и 4 мальчика. Сколькими способами можно их рассадить, если девочки хотят сидеть рядом?

Решение: Если рассмотреть девочек как одну, всего перестановок будет P_5. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_3 перестановок девочек. Искомое число перестановок: $P_5\cdot P_3 = 5!\cdot3!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3=720$. Ответ: 720 способов.

*Пример 3:*Учащиеся одного класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предметов.

Решение: Расписание на один день отличаются либо порядком следования предметов, либо самими предметами. Значит, здесь речь идет о размещении из 8 элементов по 4. $A^4_8= 8\cdot7\cdot6\cdot5=1680$. Ответ: 1680 способов.

*Пример 4:*Сколько существует пятизначных телефонных номеров, в каждом из которых все цифры различны и первая цифра различна от нуля?

Решение: Число размещений из десяти элементов по пять – A^5_{10}. Число размещений начинающихся с цифры ноль – A^4_9. Число телефонных номеров равно: $A^5_{10} – A^4_9 =10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 – 9\cdot8\cdot7\cdot6 = 27216$. Ответ: 27216 номеров.

*Пример 5:*Из 12 учеников нужно выбрать 3 ученика на улусный новогодний бал. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним учеником. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 12 элементов по 3. $C_{12}^{3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 9)} = 220$. Ответ: 220 способов

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое комбинаторика?
2. Что такое перестановки?
3. Что такое размещения?
4. Что такое сочетания?

8.2 Задания для практической работы № 8

Вариант 1

1) В математическом бое участвовали команды Братской, Зиминской и Тулунской школ. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?
2) У Спящей Красавицы 7 платьев. Сколькими способами она может их надевать, меняя каждый день, в течение недели?
3) Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест и одного поощрительного приза, если в олимпиаде по математике участвуют 24 ученика?
4) Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 20 учебных предметов, а в расписание могут быть включены 6 предметов?
5) Сколько вариантов распределения двух путевок в президентскую ёлку можно составить для 6 претендентов?
6) Алладин захотел купить дляЖасмин два браслета. Сколькими способами он может их выбрать из 36 браслетов?
7) Решите уравнение: $20A_{n-2}^{3} = A_{n}^{5}$

Вариант 2

1) Старушка заказала у кузнеца 5 колокольчиков для своих пяти коров. Сколькими способами она может надеть колокольчики на своих коровах?
2) Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8, при условии, что ни одно из них не повторяется?
3) Сколькими способами Иван Царевич может выбрать себе жену, ткачиху и повариху из 9 девушек?
4) Сколькими способами Мышка может выбрать трех друзей из ежа, лисы, зайца, волка и медведя, чтобы жить в теремке?
5) Сколькими способами Красная Шапочка может собрать букет для своей бабушки из 5 цветов, если в поле всего 10 разновидностей цветов?

6) У Васи 5 заветных желаний, а волшебница обещала ему исполнить любые три из них. Сколькими способами он может выбрать желания для исполнения?

7) Решите уравнение: $A_{n-2}^{3} = 4A_{n-3}^{2}$

Вариант 3

1) Всего 6 различных красок. Сколькими способами можно раскрасить слово «Эврика», если все буквы должны быть раскрашены разными цветами?

2) В средней группе занимаются 12 учеников. В классе 12 мест. Сколькими способами можно рассадить учеников?

3) Сколькими способами Дюймовочка может выбрать себе мужа из лягушки, жука, крота и принца?

4) Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6.7,8 и 9?

5) Сколькими способами учительница может составить контрольную работу из пяти заданий, если всего 15 заданий?

6) Пятачок решил подарить ослику Иа два шарика. Сколькими способами он может выбрать их из 20 шариков?

7) Решите уравнение: $A_{m+1}^{3} = 5m \cdot (m + 1)$

Вариант 4

1) Сколькими способами мельник может оставить в наследство трем своим сыновьям мельницу, осла и кота?

2) Сколькими способами Мальчик с пальчик может вывести из дома шесть своих братьев?

3) Сколько различных семизначных чисел можно составить из различных цифр при условии, что ни одно из них не повторяется?

4) Сколькими способами можно выбрать пять человек на пять должностей из восьми кандидатов?

5) Сколькими способами Золотая рыбка может исполнить три желания, если у старухи их целых 10?

6) Сколькими способами Маугли может выбрать себе двух попутчиков из волка, медведя, пантеры, дикобраза, мангуста и слона?

7) Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$

Вариант 5

1) Белоснежка сшила 7 рубашек. Сколькими способами она может их подарить семи гномам?

2) Буратино позвал друзей на день рождение. На именины пришли Мальвина, Пьеро и еще пять друзей из кукольного театра. Сколькими способами Буратино может рассадить гостей за столом, если Пьеро хочет сидеть рядом с Мальвиной?

3) Сколькими способами можно выбрать старосту, учебного сектора, цветовода и спортивного сектора, если всего в классе 16 учащихся?

4) Сколькими способами Мышка может выбрать трех друзей из ежа, лисы, зайца, волка и медведя, чтобы жить в теремке?

5) Сколькими способами фея может выбрать трех кучеров для Золушки из восьми мышей?

6) Сколькими способами маркиз Карабас может выбрать себе два королевских костюма из пятнадцати?

7) Решите уравнения: а) $A_7^3 = 42x$ б) $4C_{n+4}^{n-1} = 3A_{n+2}^3$

9 Практическая работа № 9. Вычисление вероятностей простых и сложных событий

9.1 Методические указания к практической работе № 9

Определение:*Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев:*

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{77}$$

Свойства:

1) $0 \le p(A) \le 1$;

2) $p\left(\begin{matrix}\text{невозможное}\\ \text{событие}\end{matrix}\right)=0$;

3) $p\left(\begin{matrix}\text{достоверное}\\ \text{событие}\end{matrix}\right)=1$.

Теоремы сложения вероятностей (если произошло или A или B)

1) A и B несовместны (или только A, или только B)

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \tag{78}$$

2) A и B совместны (или только A, или только B, или только A и B)

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \tag{79}$$

Теоремы умножения вероятностей (если A и B происходят одновременно)

1) A и B независимы

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B), \tag{80}$$

2) A и B зависимы

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_{в}(A), \tag{81}$$

Пример: Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты пиковой масти?

Решение: Пусть A – выпадение карты пиковой масти. Всего событий $n=36$, число благоприятствующих событий (всего пиковых карт) $m=9$. Тогда $P(A)=\frac{9}{36}=0,25$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое вероятность события?

2. Перечислите основные свойства события.
3. Запишите теоремы сложения вероятностей. Когда они применяются?
4. Запишите теоремы умножения вероятностей. Когда они применяются?

9.2 Задания для практической работы № 9

Вариант 1

1. Из 500 зарегистрированных браков 70 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 12 выстрелов, зарегистрировано 5 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 3 черных и 7 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
4. В одной урне находится 3 белых и 5 черных шаров, в другой 4 белых и 7 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 7, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что это книги о приключениях.
7. В приборе имеются три независимо установленных сигнализатора об аварии. Вероятность того, что в случае аварии сработает первый равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии не сработает ни один сигнализатор.

Вариант 2

1. Из 250 зарегистрированных браков 20 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 13 выстрелов, зарегистрировано 6 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 4 черных и 12 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.
4. В одной урне находится 3 белых и 5 черных шаров, в другой 4 белых и 7 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 5, либо 7, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что две книги –фантастика и одна приключения.

7. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из трех зон. Вероятность попадания в первую зону равна 0,2, во вторую – 0,15, в третью – 0,1. Найти вероятность промаха по мишени.

Вариант 3

1. Из 370 зарегистрированных браков 23 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 14 выстрелов, зарегистрировано 5 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 7 черных и 5 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
4. В одной урне находится 7 белых и 4 черных шаров, в другой 5 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 7, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что одна книга – детектив и две приключения.
7. В корзине пять шаров белого цвета и семь красного. Из корзины вынимают поочередно без возврата 2 шара. Найти вероятность того, что первым будет вынут красный шар, а затем белый.

Вариант 4

1. Из 460 зарегистрированных браков 53 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 15 выстрелов, зарегистрировано 6 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 13 черных и 7 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.
4. В одной урне находится 7 белых и 4 черных шаров, в другой 5 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что две книги – детектив и одна приключения.
7. Какова вероятность появления хотя бы одного герба при подбрасывании двух монет?

Вариант 5

1. Из 315 зарегистрированных браков 16 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 16 выстрелов, зарегистрировано 7 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 6 черных и 7 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
4. В одной урне находится 11 белых и 7 черных шаров, в другой 13 белых и 5 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 2, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что все книги - фантастика.
7. В ящике семь белых и девять черных шаров. Наудачу вынимают шар и возвращают. Затем снова вынимают шарик. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Вариант 6

1. Из 300 зарегистрированных браков 35 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.
2. По цели произведено 17 выстрелов, зарегистрировано 8 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?
3. В урне 5 черных и 8 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.
4. В одной урне находится 11 белых и 7 черных шаров, в другой 13 белых и 5 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 7, либо тому и другому одновременно.
6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что одна книга – приключения и две - фантастика.
7. В корзине три шара белого цвета и четыре красного. Из корзины вынимают поочередно без возврата 2 шара. Найти вероятность того, что первым будет вынут белый шар, а затем красный.

Вариант 7

1. Из 700 зарегистрированных браков 120 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.

2. По цели произведено 18 выстрелов, зарегистрировано 10 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?

3. В урне 3 черных и 4 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

4. В одной урне находится 10 белых и 6 черных шаров, в другой 8 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 2, либо тому и другому одновременно.

6. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Пять книг – детективы, три приключения, две фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что все книги детективы.

7. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что вынуты два валета.

Вариант 8

1. Из 910 зарегистрированных браков 270 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.

2. По цели произведено 19 выстрелов, зарегистрировано 9 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?

3. В урне 9 черных и 11 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.

4. В одной урне находится 10 белых и 6 черных шаров, в другой 8 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 4, либо тому и другому одновременно.

6. Библиотечка состоит из 15 различных книг. Семь книг – детективы, три – приключения, пять фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что одна книга – приключения и две - фантастика.

7. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что две карты пиковой масти.

Вариант 9

1. Из 840 зарегистрированных браков 160 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.

2. По цели произведено 20 выстрелов, зарегистрировано 11 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?

3. В урне 10 черных и 15 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

4. В одной урне находится 12 белых и 4 черных шаров, в другой 6 белых и 5 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 8, либо тому и другому одновременно.

6. Библиотечка состоит из 15 различных книг. Семь книг – детективы, три – приключения, пять фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что одна книга – фантастика и две - детектив.

7. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что вынуты валет и дама.

Вариант 10

1. Из 240 зарегистрированных браков 15 распадаются в течение первого года жизни. Найти, чему равна относительная частота расторжения брака в течение первого года.

2. По цели произведено 21 выстрелов, зарегистрировано 12 попаданий. Чему равна относительная частота попадания в цель?

3. В урне 6 черных и 4 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.

4. В одной урне находится 12 белых и 4 черных шаров, в другой 6 белых и 5 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 6, либо 7, либо тому и другому одновременно.

6. Библиотечка состоит из 15 различных книг. Семь книг – детективы, три – приключения, пять фантастика. Наугад выбраны три книги. Найти вероятность того, что одна книга – детектив и две - фантастика.

7. В урне находится 5 белых, 10 черных, 15 синих и 20 красных шаров. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым или синим.

10 Практическая работа № 10. Комплексные числа

10.1 Методические указания к практической работе № 10

Комплексным числом называется выражение вида $a+bi$ (алгебраическая форма), где a и b – действительные числа, i – некоторый символ, при чем $i=\sqrt{-1}$.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{82}$$

$$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, \tag{83}$$

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i, \tag{84}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \tag{85}$$

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ \text{раз}}, \tag{86}$$

Изображение комплексного числа: Число $z=a+bi$ изображается с помощью вектора $\overline{OA}$ с началом в начале координат и с концом в точке $A(a;\ b)$

Модуль комплексного числа:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{87}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{88}$$

Пример 1: Вычислить: $\frac{5}{1+2i}$

Решение: $\frac{5}{1+2i}=\frac{5+0i}{1+2i}=\frac{5\cdot 1+0\cdot 2}{1^2+2^2}+\frac{0\cdot 1-5\cdot 2}{1^2+2^2}i=\frac{5}{5}+\frac{-10}{5}i=1-2i$

Пример 2: Найти z^{-1}, если $z=7-2i$

Решение: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1+0i}{7-2i}=\frac{7}{53}+\frac{2}{53}i$

Пример 3: Записать в тригонометрической форме $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решение: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$; $Cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$;

$Sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее находим по таблице значений тригонометрических функции угол φ. Получаем, что $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Все подставим в формулу: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Вопросы для самоконтроля:
1. Какие числа называются комплексными?
2. Какие формы комплексных чисел мы изучили?
3. Действия над комплексными числами.

10.2 Задания для практической работы № 10

Вариант 1
1. Даны комплексные числа. Найти: а) z_1+z_2, б) z_1-z_2, в) z_1z_2, г) z_1/z_2. Если $z_1=8+3i$, $z_2=8+6i$
2. Перевести в тригонометрическую и показательную формы $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$
3. Решить уравнения а) $3x^2 + 8 = 0$, б) $x^2 - 2x + 2 = 0$

Вариант 2
1. Даны комплексные числа. Найти: а) z_1+z_2, б) z_1-z_2, в) z_1z_2, г) z_1/z_2. Если $z_1=2-5i$, $z_2=6-8i$
2. Перевести в тригонометрическую и показательную формы

$$z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} - i$$

3. Решить уравнения. а) $4x^2 + 5 = 0$, б) $x^2 - 6x + 16 = 0$

Вариант 3
1. Даны комплексные числа. Найти: а) z_1+z_2, б) z_1-z_2, в) z_1z_2, г) z_1/z_2. Если $z_1=3+7i$, $z_2=-8+6i$
2. Перевести в тригонометрическую и показательную формы $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + i$
3. Решить уравнения. а) $2x^2 + 7 = 0$, б) $x^2 + 10x + 28 = 0$

Заключение

В данных методических рекомендациях кратко изложен теоретический материал, вошедший в программу изучения дисциплины «Математика»для студентов второго курса специальности 18.02.01 «Аналитический контроль качества химических соединений»по новым ФГОС.

Это пособие предназначено, в первую очередь, для студентов, которые желаю углубить свои знания, повторить и восстановить их. А так же,дляобучающихся, которые по каким-либо причинам не успели усвоить материал по теме на занятиях в аудитории. Представленный материал дает возможность студенту основательно подготовиться к практической работе, зачету и экзамену.

Список использованных источников

1 Апанасов П. Т., Орлов М. И. Сборник задач по математике: Учеб.пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1987. – 303 с.

2 Богомолов Н. В. Математика: учеб.дляссузов. – М.: Дрофа, 2006. – 395с.

3 Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб.пособие. – М.: Наука., 1990 – 547 с.

4 Валуцэ И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука., 1990 – 576 с.

5 Говоров В. М. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: ООО «Мир и образование», 2003. – 480 с.

6 Дадаян А. А. Математика: Учебник. – М.: Форум: ИНФРА, 2005. – 552 с.

7 Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: Учеб.пособие для студентов высш. техн. Учеб. заведений / под редакцией Б. П. Демидовича. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002 – 495 с.

8 Клюева Л. А., Тальский Д. А. Практикум по математике для заочных техникумов, Учеб.пособие. - М., «Высшая школа», 1970. – 512с.

9 Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.1. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288с.

10 Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288с.

11 Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб.пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др.; Под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – И.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 432 с.

12 Шипачев В. С. Математический анализ. Теория и практика: учеб.пособие для вузов. – М.: М, 2006. – 349с.