МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

«Линейное программирование»

по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 09.02.07

Братск, 2021

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«   »   2021 г.   ________(И.Н.Шевчук)

Одобрено и утверждено редакционным советом

_____________________(С.А.Юдина)

«_____»_____________2021 г.   №______

Содержание

Введение

Проблема выполнения различных вычислений была актуальна во все времена. По мере развития общественно-экономических отношений усложнялись поставленные задачи, которые для своего решения требовали разработки новых методов вычислений. На смену простейшим арифметическим и геометрическим вычислениям пришли алгебраические и тригонометрические вычисления.

Организация современного производства требует не только наличия современных станков и оборудования, но и разработки новых технологических процессов и современных методов управления производством. Для решения каждой из поставленных задач разрабатываются математические модели, анализируя которые удается найти наилучшее решение поставленной задачи. Создание математической модели – сложная и кропотливая работа, которая в современных условиях под силу коллективам разработчиков. Для создания математической модели одного и того же объекта различные коллективы могут использовать различный математический аппарат. В коллектив разработчиков математических моделей привлекаются высококвалифицированные специалисты, которые, с одной стороны, хорошо знают физические процессы, протекающие при работе объекта, и, с другой стороны, глубоко и всесторонне владеют соответствующим математическим аппаратом. После создания математической модели специалистами-аналитиками за дело принимаются специалисты-программисты, которые реализуют созданную модель в виде программных кодов. Далее с математической моделью работают специалисты-практики. Целенаправленно воздействуя на модель, они изучают ее поведение и подбирают оптимальный режим работы для реального объекта.

Линейное программирование является частью математического программирования.

Линейное программирование ориентировано на нахождение экстремума (максимума или минимума) в задачах, которые описываются линейными уравнениями. Причем линейными уравнениями описывается как сама целевая функция, так и входные параметры (переменные) условия ограничений на входные параметры. Необходимым условием задач линейного программирования является обязательное наличие ограничений на ресурсы (сырье, материалы, финансы и т.д.). Другим важным критерием условия решения задачи является выбор критерия останова алгоритма, т.е. целевая функция должна быть оптимальна. Оптимальность целевой функции должна быть выражена количественно.

Универсальным методом решения систем линейных уравнений является симплексный метод.

Транспортная задача относится к классу задач линейного программирования. Транспортная задача решает проблему нахождения оптимального (минимального по стоимости) плана распределения и перемещения ресурсов от производителей к потребителям.

Проблема оптимизации стоимости перевозок актуальна и на сегодняшний день, так как позволяет фирмам и предприятиям существенно сократить расходы на транспорт.

Целью настоящего методического пособия является помощь студентам в выполнении практических работ по линейному программированию дисциплин «Математическое моделирование», «Математика» любых специальностей. В реализации симплексного метода показано решение прямой и двойственной задачи, выделение целочисленного решения.

Методическое пособие содержит вопросы для контроля, которые помогут лучше усвоить материал, а также подготовиться студентам к защите практических работ.

1 Экономико-математические методы и модели

В процессе жизнедеятельности человека вырабатываются представления о тех или иных свойствах реальных объектов и их взаимодействиях, которые формируются в виде описания объектов. Это может быть словесное описание, рисунок, чертёж, график, макет и т.д. В общем случае, модель-это отражение реального объекта. Процесс построения моделей называется **моделированием**. Моделирование-это универсальный способ изучения процессов и явлений реального мира. Особое значение моделирование приобретает при изучении объектов, недоступных прямому наблюдению и исследованию. К ним относятся социально-экономические явления и процессы.

Математическая модель - это система математических уравнений, неравенств, формул и различных математических выражений, описывающий реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними. Процесс построения математической модели называют **математическим моделированием**. Построение математической модели экономического объекта позволяет свести экономический анализ производственны процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений. Если изучается экономический объект (предприятие, фирма, отрасль, и т.д.), то строится экономико-математическая модель.

Процесс построения экономико-математической модели включает:

1) создание информационной базы данных объекта;

2) выбор некоторого числа переменных величин для формализации модели экономического объекта;

3) выражение взаимосвязей, характеризующих экономический объект, в виде уравнений и неравенств;

4) выбор критерия эффективности деятельности экономического объекта и выражение его в виде экономического соотношения - целевой функции (если необходимо).

Для принятия эффективных решений в планировании и управлении экономическим объектом необходимо экономическую сущность исследуемого экономического объекта формализовать экономико-математической моделью.

1.1 Содержание и классификация экономико-математических моделей

Содержанием любой экономико-математической модели является выраженная в формально-математических соотношениях экономическая сущность условий задачи и поставленной цели. Описание экономических условий математическими соотношениями - результат того, что модель устанавливает связи и зависимости между экономическими параметрами и величинами.

Экономико-математические модели включают в себя систему ограничений и целевую функцию. **Система ограничений** состоит из отдельных математических уравнений или неравенств. Критерием эффективности функционирования экономического объекта служат экономические показатели (прибыль, рентабельность, себестоимость, валовая продукция и т.д.). Математическим выражением критерия эффективности является **целевая функция**.

Решением экономико-математической модели или **допустимым планом** называется набор значений неизвестных, которые удовлетворяет её системе ограничений. Модель имеет множество решений, среди которых нужно найти, удовлетворяющее системе ограничений и обращающее целевую функцию в экстремум, называется **оптимальным**.

Таким образом, для принятия оптимального решения любой экономической задачи необходимо построить её экономико-экономическую модель, по структуре включающую в себя систему ограничений, целевую функцию, критерий оптимальности и решение.

Выделяют следующие классы экономико-математических моделей.

Оптимизационные имеют целевую функцию, которая измеряет качество принимаемого решения.

В функциональных моделях по одним значениям переменных можно находить значение других переменных.

Кроме того, математические в наиболее общем виде классифицирует по следующим признакам.

1.По характеру взаимомосвязи между переменными

- **линейные** – все функциональные связи в системе ограничений и целевая функция являются линейными функциями;
- **нелинейные** – наличие нелинейности хотя бы в одном из элементов математической модели.

2.По характеру изменения переменных

- **непрерывные-** значения каждой из переменных могут заполнять сплошь некоторую область действительных чисел;
- **дискретные** – все или хотя бы одна переменная могут принимать только целочисленные значения.

3.По учёту фактора времени

- **статические** – моделирование и принятие решений осуществляются в предположении о независимости от времени элементов модели;
- **динамические** – модели, учитывающие фактор времени.

4. По наличию информации о переменных

- **стохастические** – модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют методы теории вероятности и математической статистики;
- **детерминированные** – модель строится в условиях полной определённости.

5. По числу критериев оценки деятельности экономического объекта

- **простые** - однокритериальные задачи;
- **сложные** – многокритериальные задачи.

6. По математическому инструменту, применяемому при моделировании экономического объекта

- наиболее распространёнными и эффективными математическими методами, которые нашли как теоретическое, так и практическое приложение в экономических исследованиях, являются дифференциальное исчисление, математическая статистика, линейная алгебра, математическое программирование, теория графов, теория вероятностей и теория игр.

1.2 Методика построения экономико-математических моделей

Методика построения экономико-математической модели состоит в том, чтобы экономическую сущность задачи представить математически, используя различные символы, переменные и постоянные величины, индексы и другие обозначения.

Построение модели подразделяется на несколько стадий. Сначала определяется тип экономико-математической модели, изучаются возможности её применения в данной задаче, уточняются конкретный перечень переменных и параметров и форма связей. Оправдано стремление построить модель, относящуюся к хорошо изученному классу математических задач: задачи линейного программирования, транспортные задачи и т.д.

В первую очередь необходимо определить систему переменных величин, которые могут для конкретной задачи обозначить искомый объём производства продукции на предприятии, количество перевозимого груза поставщиками конкретным потребителям и т.д. Как правило, для обозначения переменных величин используются буквы: $x, y, z\ldots$, а также их модификации. Например, модификация переменной x: x_i, x_{ij}, x' и т.д. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут обозначать, например, объёмы производства продукции соответственно первого, второго и так далее n – го вида. По каждой переменной для конкретной задачи даётся словесное пояснение.

Критерий оптимальности- экономический показатель, выражающийся при помощи целевой функции через другие показатели. Целевую функцию – цель задачи - чаще всего обозначают буквами f,F,Z. Примерами целевых функций могут служить, например, минимум себестоимости произведённой продукции, максимум прибыли, соответствующий оптимальному плану производства и т.д.

Система ограничений состоит из отдельных математических уравнений или неравенств. Ограничения модели должны отражать все условия, формирующие оптимальный план. Например, ограничение вида

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1$$

означает то, что количество израсходованного ресурса первого вида

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n$$

не должно превышать объём этого ресурса b_1, если a_{1i}-расход ресурса первого вида на единицу продукции соответствующего вида x_i ($i=\overline{1,n}$).

Однако практически учесть все условия задачи для достижения цели невозможно, достаточно учесть основные условия, поэтому полученная модель будет упрощённой по сравнению с реальной, которая отражала бы все условия поставленной задачи.

В общем виде экономико-математическая модель представляет собой:

1)систему ограничений (равенства, неравенства);

2)условия неотрицательности переменных, исходя из экономической или физической сущности переменных;

3)целевую функцию.

Математическая постановка задачи: найти значения переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений

$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad \{\leq,=,\geq\}\quad b_i(i=\overline{1,m})$

и максимизирует или минимизирует целевую функцию

$Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

1.3 Примеры построения математических моделей

Рассмотрим построение математических моделей задач линейного программирования на примерах наиболее распространенных задач.

Задача1. О выборе оптимальных технологий

Продукция в цехе может производиться n различными способами T_j(j=1,…,n). Для производства продукции могут использоваться ресурсы R_i :рабочая сила, сырьё (сталь, древесина, цветные материалы, стекло и др.),электроэнергия и др.

Налагаются ограничения по объёмам b_i ресурсов и по выпуску продукции в стоимостном выражении А.

Введём обозначения:

x_j- время использования технологического способа T_j для производства продукции;

b_i - объём ресурса R_i;

a_{ij} - расход ресурса R_i за единицу времени по технологическому способу T_j;

А - годовое плановое задание по выработке продукции (в стоимостном выражении).

c_j – производительность технологии T_j (в денежных единицах за единицу времени работы по данной технологии).

λ_j – затраты на изготовление продукции в ед. времени по способу T_j.

Ограничения по объёмам ресурсов b_i вида $\leq$; по плановому выпуску А вида $\geq$;

Необходимо найти оптимальный план $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ применения каждого технологического способа по критериям:

а) целевая функция f_1 показывает наибольший валовой объём продукции по всем технологиям в денежных единицах;

б) целевая функция f_2 показывает наименьшие общие затраты на выполнение планового задания;

в) целевая функция f_3 показывает наибольшую конечную прибыль от выпуска продукции.

Таблица1.1 – Информационная база задачи 1

Ресурсы	Технологические способы T_1 T_2 … T_n	Объём ресурсов
Рабочая сила(чел/ч) Сырьё(Т) Электроэнергия(квт/ч) ……………………..	a_{11} a_{12} … a_{1n} a_{21} a_{22} … a_{2n} a_{31} a_{32} … a_{3n} …………………….. a_{m1} a_{m2} … a_{mn}	b_1 b_2 b_3 ... b_m
Затраты (прибыль, цена и т.п.)	λ_1 λ_2 λ_n	

Решение.

Построим математические модели по указанным критериям.

Обозначим x_1-количество времени рабочего предприятия по T_1 способу, x_2-по T_2 способу, x_3- по T_3 способу.

Составим ограничения на введённые переменные:

а) по заданным ресурсам

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}\,x_n\leq b_1, \\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2n}\,x_n\leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\ldots+a_{mn}\,x_n\leq b_m, \\ x_i\geq 0; \end{cases}$$

б) по плановому заданию

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\geq A.$

Запишем целевую функцию по каждому критерию:

а) наибольший валовой объём

$f_1= c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ =>max;

б)наименьшие общие затраты

$f_2= \lambda_1\,x_1+\lambda_2\,x_2+\ldots+\lambda_n\,x_n$ =>min;

в)наибольшая конечная прибыль

$f_3 = f_1 - f_2$,

$f_3 = (c_1 - \lambda_1)\, x_1 + (c_2 - \lambda_2)\, x_2 + \ldots \Rightarrow max.$

Задача 2. Оптимальный раскрой материалов

В цехе предприятия имеется неограниченное количество длинномерного материала (доски, стальные трубы, прутки и др.),который раскраивается на заготовки различной длины.

Обозначим:

L - длина одной единицы исходного материала, который нужно раскроить на заготовки видов $l_1, l_2, \ldots, l_m$;

$в_i$ - плановое количество заготовок длинны l_i;

$a_{i\,j}$ - количество заготовок длинны l_i по j – способу;

c_j – количество отходов при раскрое j-м способом.

L, l_1 ,l_2, …,l_m, b_i – задаются в условии задачи, a_{ij} и c_j –определяются самостоятельно.

Нужно определить, какое количество длинномерного материала следует раскроить каждым способом, чтобы получить заготовок каждой длинны не меньше планового количества и при этом свести к минимуму отходы при раскрое.

Решение.

1) Составим информационную базу задачи. Пусть L=950, l_1=150, l_2=180,l_3=170. При составлении плана раскроя в первую строку запишем максимальное количество заготовок длины l_1=150 и подсчитаем количество заготовок других длин. Затем количество заготовок длины l_1=150 уменьшим на одну и подсчитаем количество заготовок других длин (вторая строка). Затем количество заготовок длины l_1=150 уменьшим еще на одну и подсчитаем количество заготовок других длин (третья строка). Процесс

продолжаем до тех пор, пока все возможные варианты раскроя не будут исчерпаны.

Таблица 1.2 - Таблица возможных способов раскроя

Номер способа раскроя	Количество заготовок длины			Остаток при раскрое c_j
	l_1=150	l_2=180	l_3=170	
1	6	0	0	50
2	5	1	0	20
3	5	0	1	30
4	4	1	1	0
5	3	2	0	140
6	3	1	1	50
7	2	3	0	110
8	2	2	1	20
9	2	1	2	130
10	2	0	3	140
11	1	4	0	80
12	1	3	1	90
13	1	2	2	100
14	1	1	3	110
15	1	0	4	120
16	0	5	0	50
17	0	4	1	60
18	0	3	2	70
19	0	2	3	80
20	0	1	4	90
21	0	0	5	100
Плановое количество заготовок b_i	b_1=200	b_2=300	b_3=250	

2) Обозначим x_j - количество заготовок по j – тому способу раскроя.

3) Запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 200, \\ x_2 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 5x_{16} + 4x_{17} + 3x_{18} + 2x_{19} + x_{20} \geq 300, \\ 3x_3 + x_4 + x_6 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10} + x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + 4x_{20} + 5x_{21} \geq 250. \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ - условие неотрицательности переменных.

4) Целевая функция примет вид

$Z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 0x_4 + 140x_5 + 50x_6 + 110x_7 + 20x_8 + 130x_9 + 140x_{10} + 80x_{11} + 90x_{12} + 100x_{13} + 110x_{14} + 120x_{15} + 110x_{14} + 120x_{15} + 50x_{16} + 60x_{17} + 70x_{18} + 80x_{19} + 90x_{20} + 100x_{21} \to \min$, т.к. суммарные отходы должны быть наименьшими.

Задача3. Составление рациона (диеты)

Пусть для некоторых нужд, например, кормления, требуется составить 2 вида корма, стоимость единицы каждого из которых C_1 и C_2. В каждом виде корма должны присутствовать питательные вещества M_1, M_2, M_3, для которых известно, что в норме их должно быть не менее b_1, b_2, b_3 единиц соответственно. Известны технологические коэффициенты a_{ij}- количество i-го питательного вещества в j-м виде корма. Требуется составить такой рацион питания, при котором стоимость корма была наименьшей, а количество питательных веществ не было бы меньше нормы.

Решение.

1) Составим информационную базу задачи (таблица 1.3).

Таблица 1.3 – Информационная база задачи 3

Вид питательного вещества	Вид корма		Количество питательных веществ
	1	2	
M_1	a_{11}	a_{12}	b_1
M_2	a_{21}	a_{22}	b_2
M_3	a_{31}	a_{32}	b_3
Цена	C_1	C_2	

2) Введем переменные.

Пусть x_1 количество единиц корма 1 - го вида, x_2- количество единиц корма 2- ого вида.

3) Запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \geq b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \geq b_3, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Знаки неравенств $\geq$ т.к. питательных веществ не должно быть меньше нормы.

4) Целевая функция примет вид:

$F = c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow \min$, т.к. суммарная стоимость кормов должна быть наименьшей.

Задачу составления рациона можно обобщить, если предусмотреть в рационе m видов питательных веществ в количестве не менее b_i $(i=1,2,\ldots\ m)$ единиц и использовать n видов кормов.

2. Графический метод решения задачи линейного программирования

2.1 Область применения

Графический метод решения основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные.

Найти максимальное (минимальное) значение функции

$Z = c_1x_1+c_2x_2$

при

$a_{11} x_1+ a_{12} x_2 \le b_1,$

$a_{21} x_1+ a_{22} x_2 \le b_2,$

…………………………..

$a_{m1} x_1+ a_{m2} x_2 \le b_m,$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

Решение.

1.Построение области допустимых решений:

а) в каждом неравенстве надо выразить x_2 через x_1;

б) построить в прямоугольной системе координат прямые, заменив знаки неравенств на знаки равенств;

в) если знак неравенства $\le$, то заштриховать полуплоскость ниже прямой;

г) если знак неравенства $\geq$, то заштриховать полуплоскость выше прямой;

д) выделить точки плоскости, удовлетворяющие каждому неравенству системы.

2. Построение вектора – градиента, показывающего направление наискорейшего возрастания целевой функции. Его координаты – это коэффициенты при переменных целевой функции. Обозначим этот вектор $\vec{N}$= (c_1; c_2), его начало находится в точке О (0;0). Далее строим линию уровня $z=c_1x_1+c_2x_2=const$, перпендикулярную вектору $\vec{N}$. Линию уровня передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{N}$ и находим точку «входа» (А) в многоугольник или точку «выхода» (С) из него (рисунок 1).

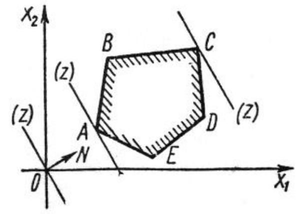

Рисунок 1- Ограниченная область допустимых решений

3. Нахождение наибольшего или наименьшего значений целевой функции. Для этого находим координаты точки «входа» или точки «выхода», составив системы уравнений прямых, пересечением которых являются точки «входа» или «выхода». Решив системы, получаем значения переменных x_1 и x_2, которые подставляем в целевую функцию. В точке «входа» целевая функция имеет минимум, в точке «выхода» целевая функция имеет максимум.

Случай 1. Прямая $c_1x_1+c_2x_2$ = const, передвигаясь в направлении вектора $\vec{N}$ или противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае целевая функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рисунок 2).

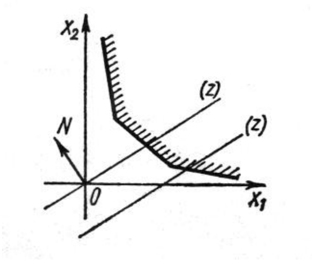

Рисунок 2 – Неограниченная область допустимых решений

Случай 2. Прямая $c_1x_1+c_2x_2$ = const, передвигаясь, все же становится опорной относительно многоугольника решений (Рисунок 3). Тогда в зависимости от вида области целевая функция может быть ограниченной снизу и неограниченной сверху (рисунок 3б), ограниченной сверху и неограниченной снизу (рисунок 3а) либо ограниченной сверху и снизу (рисунок 3в).

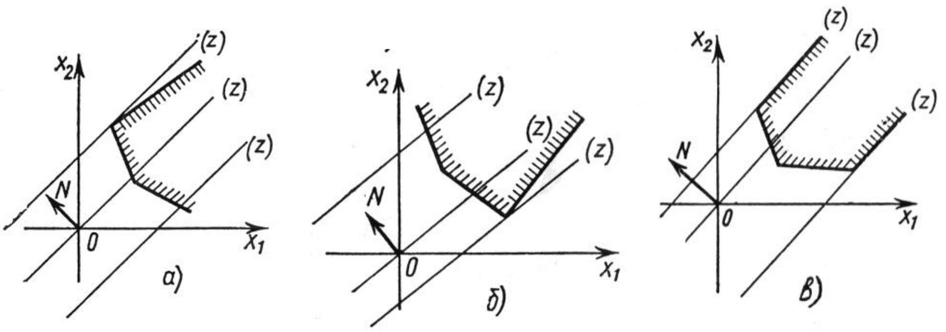

Рисунок 3 – Виды неограниченных областей допустимых решений

2.2 Примеры задач, решаемых графическим методом

Задача 4. Задача использования сырья.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья: S_1 , S_2 и S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 - Информационная база

Вид сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции		Запас сырья
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	8	5	40
S_3	5	6	30
Прибыль от единицы продукции	50	40	

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Решение.

1) Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 - количество единиц продукции P_2 . Тогда, учитывая количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. При этом $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Целевая функция Z = 50x1+40x2 (руб.) показывает суммарную прибыль.

2) Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые

L_1: $2x_1 + 5x_2 = 20$ или $x_2 = -2/5x_1 + 4$,

L_2: $8x_1 + 5x_2 = 40$ или $x_2 = -8/5x_1 + 8$,

L_3: $5x_1 + 6x_2 = 30$ или $x_2 = -5/6x_1 + 5$,

$x_1 = 0$,

$x_2 = 0$.

Заштриховываем полуплоскости, располагающиеся ниже прямых L_1, L_2 , L_3 ; выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2. Получаем многоугольник OABCD (рисунок 4).

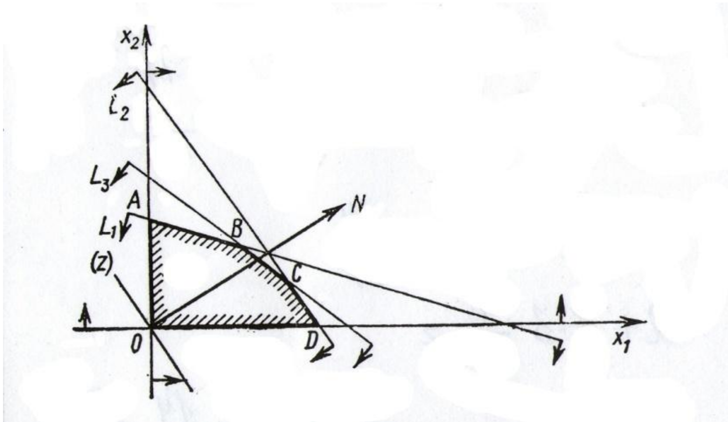

Рисунок 4 – Область допустимых решений задачи 4

3) Для построения прямой $50x_1+40x_2 = 0$ строим радиус – вектор N=(50;40) = 10(5;4) и через точку O проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую Z = 0 перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рисунка (4) следует, что опорной по отношению к многоугольнику решений эта прямая становится в точке C, где функция Z принимает максимальное значение.

4) Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

$x_1 = 90/23$, $x_2 = 40/23$. Подставляя значения $x_1 = 90/23$, $x_2 = 40/23$ в целевую функцию, получаем $Z = 50*90/23+40*40/23 \approx 260{,}3$.

5) Вывод: для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 260,3 руб. необходимо запланировать производство 90/23 единиц продукции P_1 и 40/23 единиц продукции P_2.

Задача 5. Задача составления рациона.

Найти минимальное значение линейной функции $Z = 4x_1+6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Решение.

1) Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые

L_1: $3x_1 + x_2 = 9$ или $x_2 = -3x_1 + 9$,

L_2: $x_1 + 2x_2 = 8$ или $x_2 = -1/2x_1 + 8$,

L_3: $x_1 + 6x_2 = 12$ или $x_2 = -1/6x_1 + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Заштриховываем полуплоскости, располагающиеся выше прямых L_1, L_2, L_3; выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2. Получаем неограниченную область ABCD (рисунок 5).

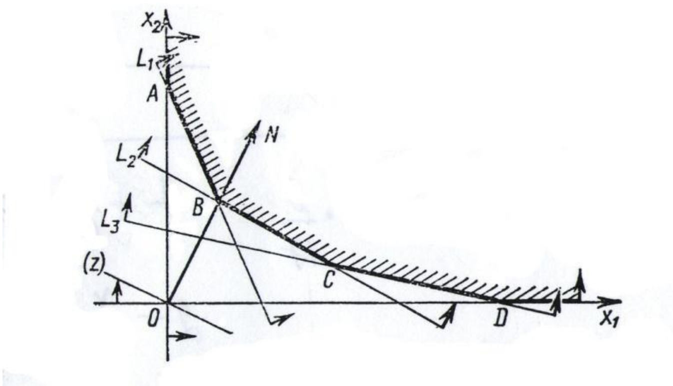

Рисунок 5 - Область допустимых решений задачи 5

2) Для построения прямой $4x_1 + 6x_2 = 0$ строим радиус – вектор N= (4;6) и через точку O проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую Z = 0 перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рисунка (5) следует, что опорной по отношению к многоугольнику решений эта прямая становится в точке B, где функция Z принимает минимальное значение.

3) Точка B лежит на пересечении прямых L_1 и L_2. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Подставляя значения x_1 и x_2 в целевую функцию, получаем $Z_{min} = 4*2+6*3 = 26$.

3 Симплексный метод

3.1 Основные теоретические сведения

3.1.1 Основные понятия

В общем случае задача линейного программирования формируется следующим образом: найти совокупность значений n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le a_{k0} \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le a_{k+1,0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_{m0} \end{cases} \tag{3.1}$$

и условиям не отрицательности:

$$x_1 \le 0, x_2 \le 0, \ldots, x_n \le 0 \tag{3.2}$$

для которых целевая функция:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.3}$$

принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Если система ограничений состоит только из неравенств, то говорят, что задача линейного программирования задана в стандартной форме. Если система ограничений задачи состоит только из уравнений, причем требуется максимизировать функцию f, то задача линейного программирования задана в канонической форме. Если есть в системе ограничений неравенства и равенства, то задача задана в общей форме. Общая или стандартная формы задачи линейного программирования могут быть приведены к канонической форме сведением системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le a_{k0} \end{cases}$$

к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = a_{k0} \end{cases}$$

введением k дополнительных переменных в неравенства, причем $x_{n+i} \geq 0$, где i= 1, 2, …, k означает номер неравенства, в которое вводится x_{n+i}.

Решение X =(x_1, x_2, …, x_n) системы ограничений (3.1), удовлетворяющее условиям не отрицательности (3.2), называется допустимым решением (планом) задачи линейного программирования.

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется допустимое решение X, для которого целевая функция (3.3) достигает экстремума.

Совокупность всевозможных допустимых решений задачи линейного программирования называется областью допустимых решений.

3.1.2 Составление математической модели задачи. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Примером задачи линейного программирования служит задача об использовании сырья.

Для производства n различных видов продукции предприятие использует m видов сырья, запасы которых составляют b (j=1, …, m). Количество единиц i-го вида сырья, затрачиваемого для производства единицы j-го вида продукции, равно a_{ij} (i=1, …, m; j=1, …, n). Прибыль, получаемая предприятием при реализации продукции j-го вида, равна c_j(j=1,…, n).

Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от ее реализации была бы наибольшей.

Для составления математической модели задачи обозначим через x, количество единицы продукции j-го вида (j=1, …, n). Количество сырья i–го вида, расходуемое на изготовление всех видов продукции, составляет

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$ и не может превысить имеющихся запасов b. Значит, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

Переменные x_j должны быть неотрицательными: $x_j \geq 0$ ($j=1, \ldots, n$).

Прибыль от реализации всей продукции $f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ должна быть максимальной.

Таким образом, требуется найти неотрицательные значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе ограничений и доставляющие функции f наибольшее значение.

Одним из наиболее эффективных и универсальных методов решения задач линейного программирования является симплексный метод. Он позволяет, исходя из известного опорного решения задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальное решение. Каждый шаг (итерация) симплексного метода состоит в нахождении нового опорного решения, которому соответствует большее значение целевой функции, чем ее значение для предыдущего решения.

Процесс перехода от одного опорного решения к другому продолжается до тех пор, пока не будет установлено, что задача не имеет оптимального решения.

3.1.3 Нахождение исходного опорного решения задачи линейного программирования

Пусть дана каноническая задача линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_n x_n = a_{n0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_m x_n = a_{m0} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.5}$$

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{3.6}$$

Будем считать, что все свободные члены a_{i0}, системы уравнений неотрицательны: $a_{i0}>0$. Если это не так, то уравнения с отрицательными a_{i0} нужно домножить на (-1).

Замечание 3.1.1: если в задаче требуется минимизировать функцию f то, заменив ее на противоположную $f_1=-f=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n$ придем к эквивалентной задаче максимизации функции f_1.

Чтобы найти исходное опорное решение задачи, нужно методом Жордана-Гаусса привести систему уравнений (3.4) к единичному базису, сохранив неотрицательность свободных членов. Для этого выбираем разрешающий столбец, в котором есть хотя бы один положительный элемент, затем составляем отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$ (симплексные отношения) и выбираем из них наименьшее:

$$\frac{a_{q0}}{a_{qp}} = \min_{a_{ip}>0}\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$$

Та строка (пусть q -я), для которой симплексное отношение оказывается наименьшим, выбирается в качестве разрешающей. Элемент a_{qp} стоящий на пересечении q-й строки и p -го столбца, выбирается за разрешающий. Выбор разрешающего элемента по указанному правилу проводится в каждой итерации метода Жордана-Гаусса.

После i итерации метода Жордана-Гаусса получается система линейных уравнений:

$$\begin{array}{l} x_1 + b_{1,i+1}x_{i+1} + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1i} \\ x_2 + b_{2,i+1}x_{i+1} + \ldots + b_{2n}x_n = b_{2i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i + b_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + b_{in}x_n = b_{i0} \end{array} \qquad (3.7)$$

где, для определенности, базисные переменные обозначены $x_1, x_2, \ldots, x_i$

Исходное опорное решение:

$$x = (b_{10}; b_{20}; \ldots; b_{ip}; 0, \ldots, 0) \qquad (3.8)$$

3.1.4 Симплексная таблица, проверка решения на оптимальность, проверка разрешимости задачи

Выразим функцию f через свободные переменные. Для этого найдем выражение для базисных переменных x_1, …, x_i через свободные с помощью системы уравнений (3.7) и подставим их в (3.6). После приведения подобных членов получим:

$$f + \Delta_{0,i+1}x_{i+1} + K + \Delta_{0n}x_n = a_{00} \qquad (3.9)$$

Равенство (3.9) называется приведенным выражением для функции f, а коэффициенты Δ_{0k} (k=i+1, …, n) - оценками соответствующих свободных переменных. Равенство (2.9) позволяет определить значение функции f, соответствующее опорному решению x (3.8): f(x) = a_{00}

Решение задачи оформляется в виде симплексных таблиц, каждая из которых отличается от таблицы Гаусса добавлением строки оценок Δ_{0k} и столбца симплексных отношений $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$ (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Симплексная таблица

Базис	x_1	…	x_i	x_{i+1}	…	x_p	…	x_n	a_{i0}	a_{i0}/a_{ip}
x_1	1	…	0	a_1	…	a_{1p}	…	a_{1n}	a_{10}	$\frac{a_{10}}{a_{1p}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_q	0	…	0	a_q	…	a_{qp}	…	a_{qn}	a_{q0}	$\frac{a_{q0}}{a_{qp}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	…	1	a_i	…	a_{ip}	…	a_{in}	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
f	0	…	0	Δ	…	Δ_{0p}	…	Δ_{0n}	a_{00}	

Если в симплексной таблице все оценки Δ_{0k} свободных переменных неотрицательны:

$$\Delta_{0k} \geq 0 \qquad (3.10)$$

то полученное опорное решение оптимально. Если найдется хотя бы одна отрицательная оценка, в столбце над которой нет положительных элементов, то функция f неограниченно возрастает в области допустимых решений и оптимальное решение не существует.

3.1.5 Улучшение опорного решения

Пусть в таблице 3.1 в последней строке имеется хотя бы одна отрицательная оценка $\Delta_{0k}<0$ и в каждом столбце с такой оценкой есть хотя бы один положительный элемент. В этом случае опорное решение можно улучшить.

Для этого в столбце с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой Δ_{0p} выбирается разрешающий элемент a_{qp} по наименьшему симплексному отношению и выполняется одна итерация методом Жордана-Гаусса.

3.1.6 Алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом

1. Задача приводится к канонической форме.

2. Заполняется симплексная таблица, находятся исходное опорное решение X, оценки Δ_{0k}, и f(x).

3. Решение X проверяется на оптимальность. Если все оценки свободных переменных $\Delta_{0k}\geq0$, то задача решена $X_{опт}=X$, $f_{max}=f(x)$.

4. Если хотя бы одна оценка $\Delta_{0k}<0$, то проверяется, будет ли функция f неограниченной в области допустимых решений. Если f неограниченна, задача не имеет оптимального решения.

5. Найденное опорное решение X улучшается и переходит к пункту3.

Через конечное число итерации процесс закончится либо на пункте 3 (найдено оптимальное решение), либо на пункте 4 (установлено, что оптимальное решение не существует).

3.2 Реализация симплексного метода на примере типовой задачи.

Для производства трех видов продукции A, B и C можно использовать только материал трех видов, запасы которого составляют соответственно 10, 11, 14 кг. На изготовление единицы изделия вида A расходуется 3 кг материала первого вида, 1 кг материала второго вида и 3 кг материала третьего вида. На изготовление единицы изделия вида B расходуется 0 кг, 4 кг, 3 кг материалов первого, второго и третьего видов. На изготовление единицы изделия вида C расходуется 2кг, 0 кг, 1 кг материалов первого, второго и третьего видов. От реализации единицы готовой продукции виды A предприятие получает прибыль 4 рубля, от продукции вида B – 5 рублей, от продукции вида C – 2 рубля. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции.

Решение:

1. Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 количество единиц продукции вида A, x_2 – количество единиц продукции вида B, x_3 – количество единиц продукции вида C. Количество материала первого вида, расходуемое на изготовление x_1 единиц продукции вида A, x_2 единиц продукции вида B и x_3 единиц продукции вида C, составляет $3x_1+0x_2+2x_3$ и не может превысить имеющихся запасов 10. Рассуждая аналогично для материалов второго и третьего видов, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \end{cases} \qquad (3.11)$$

Очевидно, что переменные x_1, x_2 и x_3 должны быть неотрицательными:

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Прибыль от реализации x_1 единиц продукции вида A, x_2 единиц продукции вида B и x_3 единиц продукции вида C равна $4x_1+5x_2+2x_3$ и должна быть максимальной. Требуется найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие системе ограничений (3.11) и доставляющие функции $F = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max$.

2. Для решения задачи симплексным методом приведем ее к канонической форме путем введения в систему ограничений дополнительных (балансовых) переменных $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + 1x_3 + x_6 = 14 \end{cases} \tag{3.12}$$

Заполним симплексную таблицу – таблица 3.2. Для этого запишем функцию $F = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$ в виде $F - 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0$ и добавим это равенство к системе (3.12). Система (3.12) приведена к единичному базису x_4, x_5, x_6, причем свободные члены уравнений неотрицательны.

Таблица 3.2 – Исходное опорное решение X_0

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_4	3	0	2	1	0	0	10	–	X_0=(0;0;0;10;11;14) F_{max}=0
x_5	1	4	0	0	1	0	11	$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$	
x_6	3	3	1	0	0	1	14	$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$	
F	-4	-5	-2	0	0	0	0		

Исходное опорное решение X_0 найдено, причем F_{max}=0.

Так как существуют отрицательные оценки (Δ_{01}=-4, Δ_{02}=-5, Δ_{03}=-2), то решение X_0 не является оптимальным. В столбцах над этими оценками имеются положительные элементы, поэтому решение X_0 можно улучшить.

3. Находим новое опорное решение. Выбираем среди оценок наибольшую по абсолютной величине – Δ_{02}=-5, столбец x_2 – разрешающий. Вычисляем симплексные отношения $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$:

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{10}{0} - \text{не существует}; \frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}; \frac{a_{30}}{a_{31}} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Наименьшее отношение $\frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ получается для второй строки. Вторая строка разрешающая. Следовательно, разрешающий элемент $a_{21}=4$. Из базиса выводим x_5 и вводим x_2.

Заполняем новую симплексную таблицу, соответствующую новому опорному решению. В разрешающей строке все элементы делим на разрешающий элемент $a_{21}=4$. Единичная матрица образуется столбцами x_2, x_4 и x_6. Остальные элементы пересчитываем по методу Жордана-Гаусса:

$$\boxed{\text{новый элемент}} = \boxed{\text{старый элемент}} - \frac{\boxed{\text{элемент разрешающей строки}} \times \boxed{\text{элемент разрешающего столбца}}}{\boxed{\text{разрешающий элемент}}}$$

Получаем таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Новое опорное решение X_1

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_4	3	0	2	1	0	0	10	$\frac{10}{3}$	$X_1=(0; \frac{11}{4}; 0; 10; 0; \frac{23}{4})$ $F_{max} = \frac{55}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	11	
x_6	$\frac{9}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{23}{4}$	$\frac{23}{9}$	
F	$-\frac{11}{4}$	0	-2	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{55}{4}$		

Так как среди оценок есть отрицательные, то новое опорное решение X_1 не оптимально. В столбце над этими оценками есть положительные элементы, поэтому решение X_1 можно улучшить.

Столбец x_1 разрешающий, т.к. у него оценка $\Delta_{01} = \left|-\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$ больше, чем оценка $\Delta_{03} = |-2| = 2$. Вычисляем симплексные отношения:

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{10}{3}; \frac{a_{20}}{a_{12}} = \frac{11/4}{1/4} = 11; \frac{a_{30}}{a_{13}} = \frac{23/4}{9/4} = \frac{23}{9}.$$

Наименьшее отношение в третьей строке, следовательно, x_6 разрешающая строка, элемент $a_{13} = \frac{9}{4}$ – разрешающий элемент. Из базиса выводим x_6 и вводим x_1. Делаем новые расчеты по вышеуказанному алгоритму.

Заполняем симплексную таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – Новое опорное решение X_2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_4	0	0	$\frac{2}{3}$	1	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{2}$	$X_2=(\frac{23}{9}; \frac{19}{9}; 0; \frac{7}{3}; 0; 0)$ $F_{max} = \frac{187}{9}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{19}{9}$	–	
x_1	1	0	$\frac{4}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{23}{4}$	
F	0	0	$-\frac{7}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{187}{9}$		

Так как среди оценок есть отрицательная $\Delta_{03} = -\frac{7}{9}$, то новое опорное решение X_2 не оптимально.

В столбце над этой оценкой есть положительные элементы, поэтому решение X_2 можно улучшить.

Столбец x_2 разрешающий. Вычисляем симплексные отношения:

$\frac{a_{20}}{a_{23}}$ – не существует, т.к. элемент $a_{12} = -\frac{1}{9} < 0$;

$$\frac{a_{10}}{a_{13}} = \frac{7/3}{2/3} = \frac{7}{2}; \frac{a_{30}}{a_{33}} = \frac{23/9}{4/9} = \frac{23}{4}.$$

Наименьшее отношение в первой строке, следовательно, x_1 разрешающая строка, элемент $a_{13}={}^2/_3$ – разрешающий элемент. Из базиса выводим x_4 и вводим x_3. Делаем новые расчеты.

Заполняем следующую симплексную таблицу – таблица 3.5.

Таблица 3.5 – новое опорное решение X_3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{7}{2}$		$X_3=(1;\frac{5}{2};\frac{7}{2};0;0;0)$ $\mathbf{F_{max}}=\frac{47}{2}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$		
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	1		
F	0	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{47}{2}$		

В строке оценок F есть отрицательная оценка $\Delta_{06}=-\frac{1}{3}$.

Находим новое решение по вышеуказанному алгоритму – таблица 3.6.

Таблица 3.6 – Новое опорное решение X_4

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	5		$X_4=(0;\frac{11}{4};5;0;0;\frac{3}{4})$ $\mathbf{F_{max}}=\frac{95}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$		
x_6	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$		
F	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{95}{4}$		

В строке оценок F нет отрицательных оценок. Значит, решение X_4 является оптимальным. $X_4=(0;\frac{11}{4};5;0;0;\frac{3}{4})$.

3.3 Экономическое истолкование оптимального решения симплексного метода

Выясним экономический смысл дополнительных (балансовых) переменных x_4, x_5 и x_6.

Из системы (3.12) следует, что:

$x_4=10-(3x_1+2x_3)$; $x_5=11-(x_1+4x_2)$; $x_6=14-(3x_1+3x_2+x_3)$,

то x_4, x_5 и x_6 означают количество неиспользованного материала соответственно первого, второго и третьего видов.

$$\tilde{o}_4 = 10 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 5) = 0;$$

$$\tilde{o}_5 = 11 - \left(0 + 4 \cdot \frac{11}{4}\right) = 0;$$

$$\tilde{o}_6 = 14 - \left(3 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{11}{4} + 5\right) = 14 - \frac{53}{4} = \frac{3}{4}.$$

С учетом этого найденное решение имеет следующий смысл. Для того, чтобы получить максимальную прибыль в размере $\frac{95}{4}$ рублей ($F_{max} = \frac{95}{4}$) от реализации продукции, необходимо из имеющегося количества материалов изготовить 0 изделий вида А ($x_1=0$), $\frac{11}{4}$ изделий вида В и 5 изделий вида С. При этом материалы первого и второго вида будут израсходованы полностью ($x_4=0$, $x_5=0$), а материал третьего вида останется в количестве 23,75 ($\frac{95}{4}$) единиц.

4 Двойственность в линейном программировании

4.1 Основные теоретические сведения

4.1.1 Взаимно двойственные задачи

Двойственные задачи – одно из основных понятий в линейном программировании. Взаимно двойственные задачи (задача I и задача II) составляют по следующему правилу:

задача I	задача II
$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$	$T = a_{10}y_1 + a_{20}y_2 + \ldots + a_{m0}y_m \to \min$
при условии	при условии
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_{10}$	$y_1 \ge 0$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$y_2 \ge 0$
$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le a_{k0}$	$\ldots\ldots\ldots$
$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le a_{k+1,0}$	$y_k \ge 0$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_{m0}$	$y_{k+1} \gtrless 0$
$x_1 \ge 0$	$\ldots\ldots\ldots$
$x_2 \ge 0$	$y_m \gtrless 0$
$\ldots\ldots\ldots$	$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1$
$x_k \ge 0$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots$	$a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \ldots + a_{kn}y_m \ge c_{k0}$
$x_{k+1} \gtrless 0$	$a_{k+1,1}y_1 + a_{k+1,2}y_2 + \ldots + a_{k+1,n}y_m = c_{k+1,0}$
$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_n \gtrless 0$	$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n$

В соответствии с таблицей получаем следующую схему построения взаимно двойственных задач:

1. Если в задаче I ищется максимум линейной функции, то в задаче II – минимум.

2. Коэффициенты C_j при переменных в целевой функции задачи I являются свободными членами системы ограничений задачи II, и наоборот.

3. При нахождении максимума линейной функции неравенства в системе ограничений имеют вид ≤ (задача I), а при нахождении минимума линейной функции неравенства в системе ограничений имеют вид ≥ (задача II).

4. Матрицы коэффициентов системы ограничений взаимно двойственных задач I и II транспонированы.

5. Число ограничений задачи I равно числу переменных в задаче II, и наоборот.

6. Каждому неравенству задачи I соответствует неотрицательная переменная в задаче II, а каждому уравнению – переменная без ограничения на знак, и наоборот.

Если в задачах I и II система ограничений состоит только из неравенств и все переменные неотрицательны, то задачи называются симметричными двойственными, в противном случае – несимметричными двойственными задачами.

4.1.2 Основные теоремы двойственности.

В теории двойственности имеют место следующие утверждения:

а) Основная теорема двойственности:

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают $f_{max}=T_{min}$.

Если целевая функция одной из двойственных задач неограниченна $\left(f_{max} \to +\infty \text{ или } T_{min} \to -\infty\right)$, то другая задача не имеет оптимального решения из-за противоречивости условий.

б) Вторая теорема двойственности:

Если k–я компонента оптимального решения задачи линейного программирования положительна, то при подстановке в систему ограничений двойственной задачи компонент ее оптимального решения k–е ограничение обращается в строгое равенство:

$$x_k > 0 \Rightarrow a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \ldots + a_{mk}y_m = c_k \quad \text{или}$$
$$y_k > 0 \Rightarrow a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = a_{k0}$$

Если при подстановке компонент оптимального решения в систему ограничений задачи линейного программирования k–е ограничение обращается в строгое неравенство, то k–я компонента оптимального решения двойственной задачи равна нулю.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n < a_{k0} \Rightarrow y_k = 0 \quad \text{или}$$
$$a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \ldots + a_{mk}y_m > c_k \Rightarrow x_k = 0$$

в) О компонентах оптимальных решений симметричных двойственных задач:

Компоненты оптимального невырожденного решения (все базисные переменные которого строго больше нуля) стандартной задачи линейного программирования равны абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи при достижении его экстремума.

4.1.3 Решение несимметричных двойственных задач

Пусть дана каноническая задача (Задача I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

Требуется найти оптимальные решения задачи I и двойственной к ней задачи.

Для решения пары несимметричных двойственных задач нужно:

– Составить двойственную задачу к данной (задача II)

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$y_1 \gtrless 0,\ y_2 \gtrless 0,\ y_3 \gtrless 0$

$T = a_{10}y_1 + a_{20}y_2 + \ldots + a_{m0}y_m \to \min.$

– Решить каноническую задачу I симплексным методом.

– Найти компоненты yi оптимального решения Y задачи II: положительным компонентам xn>0 в оптимальном решении X соответствуют в системе ограничений задачи II равенства $a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \ldots + a_{mk}y_m = c_k$. Решая полученную систему уравнений, находят компоненты yi.

– Вычислить T_{min}=T(y). Выполнение равенства $T_{min}=f_{max}$ является подтверждением оптимальности решений X и Y.

4.1.4 Решение симметричных двойственных задач.

Пусть дана стандартная задача линейного программирования:

Задача I

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$

$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$

Требуется найти оптимальные решения стандартной задачи минимизации и двойственной к ней стандартной задачи максимизации.

Составим двойственную задачу к данной:

Задача II

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_m \geq 0,$

$$T = a_{10}y_1 + a_{20}y_2 + \ldots + a_{m0}y_m \to \max$$

Для приведения стандартной задачи I к канонической форме записи нужно привести систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений введением m дополнительных неотрицательных переменных x_{n+1}, …, x_{n+i}, …, x_{n+m}, где i=1, 2, …, m означает номер неравенства системы ограничений задачи I, в которое вводится x_{n+i}.

Аналогично в задаче II вводятся в систему неравенств n дополнительных неотрицательных переменных y_{m+1}, …, y_{m+j}, …, y_{m+n}, где j=1, 2, …, n означает номер неравенства системы ограничений задачи II, в которое вводится переменная y_{m+j}.

Между переменными в паре симметричных двойственных задач устанавливается соответствие:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_1 & \ldots & x_j & \ldots & x_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_{m+1} & \ldots & y_{m+j} & \ldots & y_{m+n} \end{matrix}}^{\text{первоначальные}}}_{\text{дополнительные}} \qquad \begin{matrix} (\text{задача I}) \\ \\ \\ (\text{задача II}) \end{matrix} \qquad \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_{n+1} & \ldots & x_{n+i} & \ldots & x_{n+m} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1 & \ldots & y_i & \ldots & y_m \end{matrix}}^{\text{дополнительные}}}_{\text{первоначальные}}$$

Введенное соответствие между парами двойственных переменных позволяет находить оптимальные решения задач I и II одновременно.

Далее решение пары симметричных двойственных задач проводится по следующей схеме:

– находим оптимальное решение Y задачи II максимизации функции симплексным методом;

– находим компоненты оптимального решения X задачи I. Для этого из последней симплексной таблицы задачи II записываем выражение для целевой функции:

$$T = a_{01}y_1 + a_{02}y_2 + \ldots + a_{0,\, m+n}y_{m+n} + a_{00}$$

и приравниваем компоненты x_k оптимального решения X задачи I абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих двойственных переменных задачи II: $x_k = |a_{0k}|$.

– вычисляем f_{min}. Выполнение равенства $f_{min}=T_{max}$ подтверждает оптимальность решений X и Y.

4.2 Решение двойственной задачи

Формулировка двойственной задачи.

Предположим, что предприятие решило не выпускать изделия А, В и С, а продавать имеющиеся материалы. Очевидно, что прибыль от продажи материалов не должна быть меньше максимальной прибыли от реализации всей продукции $F_{max} = \frac{95}{4}$.

По каким ценам предприятию надо продавать материалы (сырье)?

Решение:

1. Построим математическую модель двойственной задачи. Рассматриваем решение **несимметричной** двойственной задачи.

В исходной задаче три ограничения, значит, в двойственной задаче будет три переменных y_1, y_2, y_3. В исходной задаче три переменные, значит в двойственной – три ограничения.

Матрица А коэффициентов системы ограничений исходной задачи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

транспонируется (строки заменяются столбцами):

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Система ограничений двойственной задачи в соответствии с матрицей $A^т$ имеет вид:

$$\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 0y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq 2 \\ 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 \geq 0 \\ 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 0 \\ 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Все переменные в двойственной задаче без ограничения на знак: $y_1 \gtreqless 0$, $y_2 \gtreqless 0$, $y_3 \gtreqless 0$, потому что в исходной задаче все ограничения равенства (см. каноническую форму исходной задачи).

Свободными членами системы ограничений служат коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи. Так как в исходной задаче ищется максимум F, то в двойственной – минимум T, причем коэффициенты при переменных в функции T являются свободными членами системы ограничений исходной задачи:

$$T = 10y_1 + 11y_2 + 14y_3 \to \min$$

2. Для нахождения оптимального решения двойственной задачи воспользуемся последней симплексной таблицей решения задачи о ресурсах.

$$X_{опт}=(0;\frac{11}{4};5;0;0;\frac{3}{4}),\ F_{max} = 23{,}75\ \left(\frac{95}{4}\right)$$

Найдем компоненты оптимального решения Y двойственной задачи. В решении вторая, третья и шестая компоненты положительны $\left(x_2^0 = \frac{11}{4};\ x_3^0 = 5;\ x_6^0 = \frac{3}{4}\right)$, поэтому второе, третье и шестое неравенства системы ограничений (4.1) двойственной задачи $Y=(y_1, y_2, y_3.)$

$$\begin{cases} 0y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 5 \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 2 \\ 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Решаем систему:

$y_3=0$, система (4.2) примет вид:

$$\begin{cases} 4y_2 = 5 \\ 2y_1 = 2 \end{cases}$$

Очевидно, что $y_1=1$, $y_2=\frac{5}{4}$

Оптимальное решение: $Y_{опт}=(1;\frac{5}{4};0)$

Убедимся, что $F_{max}=T_{min}$:

$$T = 10 \cdot 1 + 11 \cdot \frac{5}{4} + 14 \cdot 0 = \frac{95}{4} = 23{,}75$$

Выполнение равенства $F_{max}=T_{min}$ подтверждает оптимальность решений $X_{опт}$ и $Y_{опт}$.

4.3 Экономическое истолкование оптимального решения двойственной задачи.

Для того, чтобы получить прибыль от продажи материалов не меньшую, чем прибыль от реализации всей продукции, в количестве $\frac{95}{4}$ денежных единиц (рублей), необходимо продать материал первого вида по цене 1 рубль за единицу и материал второго вида по цене $\frac{5}{4}$ рублей за единицу.

Материал третьего вида продавать невыгодно, так как его цена равна нулю. Наиболее дефицитным является материал второго вида, так как его цена наибольшая.

4.4 Решение симметричной двойственной задачи.

Найти оптимальное решение задачи, двойственной к задаче о составлении рациона:

найти минимальное значение линейной функции $Z = 4x_1+6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ \geq \ 9, \\ x_1 + 2x_2 \ \geq \ 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq \ 12\,, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Решение.

1. Построим математическую модель двойственной задачи. Рассматриваем решение **симметричной** двойственной задачи.

В исходной задаче три ограничения, значит, в двойственной задаче будет три переменных y_1, y_2, y_3. В исходной задаче две переменные, значит в двойственной – два ограничения.

Матрица А коэффициентов системы ограничений исходной задачи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

транспонируется (строки заменяются столбцами):

$$A^{т} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Система ограничений двойственной задачи в соответствии с матрицей $A^{т}$ имеет вид:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + 2y_2 + \ 6y_3 \leq 6. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Свободными членами системы ограничений служат коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи. Так как в исходной задаче ищется максимум Z, то в двойственной – минимум T, причем коэффициенты при переменных в функции T являются свободными членами системы ограничений исходной задачи:

$$T = 9y_1 + 8y_2 + 12y_3 \rightarrow \min.$$

2.Приведем модель задачи к канонической форме путем введения дополнительных (балансовых) переменных $y_4 \ \geq 0$ и $y_5 \geq 0$:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + \ + y_4 = 4, \\ y_1 + \ 2y_2 + \ 6y_3 + + y_5 = 6, \end{cases}$$

$T - 9\ y_1 - 8y_2 - 12y_3 = 0.$

Решим задачу симплексным методом.

3.Найдем исходное опорное решение $У_0$.

Таблица 4.1 - Исходное опорное решение $У_0$

Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
y_4	3	1	1	1	0	4	4	$У_0=(0;0;0;4;6)$, $T_{min}=0$
y_5	1	2	6	0	1	6	1	
T	-9	-8	-12	0	0	0		

4. Находим оптимальное решение. Подробное описание опускаем, так как реализация симплексного метода показана выше.

Таблица 4.2 - Опорное решение $У_1$

Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
y_4	17/6	2/3	0	1	-1/6	3	18/17	$У_1=(0;0;1;3;0)$, $T_{min}=12$
y_3	1/6	1/3	1	0	1/6	1	6	
T	-7	-4	0	0	2	12		

Таблица 4.3 - Опорное решение $У_2$

Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
y_1	1	4/17	0	6/17	-1/17	18/17		$У_2=(18/17;0;14/17;0;0)$, $T_{min}=330/17$
y_3	0	5/17	1	-1/17	3/17	14/17	18/17	
T	0	-40/17	0	42/17	27/17	330/17		

Таблица 4.4 - Опорное решение $У_3$

Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_{i0}	Решение
y_1	1	0	-4/5	2	-1/5	2	$У_3=(2;14/5;0;0;0)$, $T_{min}=26$
y_2	0	1	17/5	-1/5	3/5	14/5	
T	0	0	8	2	3	26	

В строке оценок Т нет отрицательных, поэтому решение $У_3$ является оптимальным.

$У_{опт} = (2;14/5;0;0;0)$, $T_{min}=26$.

Для нахождения оптимального решения исходной задачи составим пары двойственных переменных:

$x_1 \rightarrow y_4$, $x_2 \rightarrow y_5$ (x_1 и x_2 – основные исходной задачи, y_4 и y_5 - дополнительные двойственной);

$x_3 \rightarrow y_1$, $x_4 \rightarrow y_2$, $x_3 \rightarrow y_3$ (x_3, x_4 и x_5 – дополнительные исходной задачи, y_1 ,y_2 и y_3 - основные двойственной).

Из последней симплексной таблицы (см. строку «базис» и строку оценок T) находим $x_1 = y_4 = 2$, $x_2 = y_5 = 3$, $x_3 = y_1 = 0$, $x_4 = y_2 = 0$, $x_5 = y_3 = 8$.

$X_{опт} = (2;3;0;0;8)$, $Z_{max} = 4x_1+6x_2 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$ (сравните с результатом, полученным геометрическим способом).

5 Целочисленное линейное программирование

5.1 Основные теоретические сведения

5.1.1 Постановка задачи

Значительная часть экономических задач линейного программирования требует целочисленности решения. Это имеет место, когда искомыми величинами являются неделимые объекты (число изготовляемых изделий, число предприятий, число перевозимых единиц неделимого груза и т.д.).

Задача целочисленного программирования формулируется так:

Найти экстремум функции $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

При условии, что переменные x_1, x_2, …, x_n целые, неотрицательные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$ и удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

5.1.2 Составление дополнительного ограничения

Решение задач целочисленного программирования методом отсечений сводится к решению конечного числа специально построенных задач линейного программирования, каждая из которых получается из предыдущей путем добавления к ее системе ограничений дополнительного линейного неравенства, называемого неравенством Гомори. При этом любое целочисленное решение предыдущей задачи удовлетворяет неравенству Гомори и, значит, является допустимым решением новой задачи, а нецелочисленное решение не удовлетворяет неравенству Гомори – «отсекается».

Пусть оптимальное решение нецелочисленной задачи $X_{опт}=(a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}, 0, \ldots, 0)$ содержит некоторые нецелые a_{i0}. Выберем в симплексной таблице с найденным $X_{опт}$ строку с нецелым свободным членом a_{s0}. Соответствующее уравнение в системе ограничений имеет вид:

$$x_s + a_{s,m+1}x_{m+1} + K + a_{sn}x_n = a_{s0}$$

где x_s - базисная переменная, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ - свободные переменные.

Обозначим через $[a_{sj}]$ и $[a_{s0}]$ - целые части чисел a_{sj} и a_{s0}, то есть наибольшие целые числа, не превосходящие чисел. Тогда величины дробных частей $\{a_{sj}\}$ и $\{a_{s0}\}$ чисел a_{sj} и a_{s0} определяются как разности:

$\{a_{sj}\}=a_{sj}-[a_{sj}]$, $\{a_{s0}\}=a_{s0}-[a_{s0}]$, где $0\leq\{a_{sj}\}\leq 1$, $0\leq\{a_{s0}\}\leq 1$.

Дополнительное ограничение записывается в виде:

$$\{a_{s,m+1}\}x_{m+1} + \{a_{s,m+2}\}x_{m+2} + K + \{a_{sn}\}x_n \geq \{a_{s0}\} \quad (5.1)$$

Введением дополнительной переменной x_{n+1} неравенство преобразуется в уравнение:

$$\{a_{s,m+1}\}x_{m+1} + \{a_{s,m+2}\}x_{m+2} + K + \{a_{sn}\}x_n - x_{n+1} = \{a_{s0}\}$$

и добавляется к последней симплексной таблице.

5.1.3 Алгоритм решения задачи целочисленного программирования.

Решение задачи линейного целочисленного программирования выполняется в виде последовательных итераций (метод Гомори):

1. Решается задача линейного программирования симплексным методом без учета условия целочисленности переменных и находится ее оптимальное решение $X_{опт}$.

2. Если все компоненты $X_{опт}$ целочисленные, то вычисления заканчиваются. Если же $X_{опт}$ содержит хотя бы одну нецелую компоненту, то переходят в п. 3.

3. На основании последней симплексной таблицы вводится дополнительное ограничение, учитывающее целочисленность компонент оптимального решения $X_{опт}$.

4. Дополнительное ограничение добавляется к системе ограничений, в результате чего получается новая задача линейного программирования.

Находится новое оптимальное решение, которое опять проверяется на целочисленность, см п. 2.

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное целочисленное решение, либо не будет установлено, что такого решения нет.

Замечание 5.1.1: если в оптимальном решении окажется несколько дробных компонент, то дополнительное ограничение составляется для той строки, в которой свободный член имеет наибольшую дробную часть.

Замечание 5.1.2: Если в какой-либо строке симплексной таблицы все коэффициенты при переменных целые, а свободный член – дробное число, то задача не имеет целочисленного оптимального решения.

5.2 Нахождение целочисленного решения исходной задачи

Решение $X_4 = (0;\frac{11}{4};5;0;0;\frac{3}{4})$ является оптимальным, но не удовлетворяет условию целочисленности переменных $x_2 = \frac{11}{4}$, $x_6 = \frac{3}{4}$.

Составим дополнительное ограничение, используя метод сечений (метод Гомори).

Неравенство Гомори имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq a_{i0}$$

Вычислим дробные части свободных членов:

$$\left\{\frac{11}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \left\{\frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

Выбирается наибольшая дробная часть.

В нашем случае дробные части равны, поэтому выбираем любую из строк (x_2 или x_6) в последней симплексной таблице.

Пусть это будет строка x_2. Составляем для нее неравенство Гомори:

$$\left\{\frac{1}{4}\right\}x_1 + \{1\}x_2 + \{0\}x_3 + \{0\}x_4 + \left\{\frac{1}{4}\right\}x_5 + \{0\}x_6 \geq \left\{\frac{11}{4}\right\}$$

$$\frac{1}{4}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + \frac{1}{4}x_5 + 0x_6 \geq \frac{3}{4} \Big/ \times 4$$

$$x_1 + x_5 \geq 3$$

Приводим это неравенство к канонической форме:

$$x_1 + x_5 - x_7 = 3$$

К последней симплексной таблице (таблица 3.6), добавим строку с новым ограничением и столбец x_7.

Таблица 5.1 – Новое опорное решение X_0

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	5		$X_0=(3;\frac{11}{4};5;0;0;\frac{3}{4})$ $F_{max}=\frac{95}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{11}{4}$		
x_6	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$		
x_1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	-1	3		
F	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{95}{4}$		

Решение не целочисленное, поэтому выполним дополнительную итерацию с разрешающим элементом a_{41} (четвертая строка не содержит базисных переменных x_3, x_2, x_6). Получаем новое решение – таблица 5.2.

Таблица 5.2 – Новое опорное решение X_1

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		$X_1=(3;2;\frac{1}{2};0;0;\frac{3}{2};0)$ $F_{max}=23$
x_2	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	2		
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$		
x_1	1	0	0	0	1	0	-1	3		
F	0	0	0	1	1	0	$\frac{1}{4}$	23		

Оценки неотрицательные, но условие целочисленности не выполнено: $x_3=\frac{1}{2}$, $x_6=-\frac{3}{2}$.

Вычисляем дробные части a_{i0}:

$$\{a_{10}\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},\{a_{30}\}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

Составим неравенство Гомори для строки x_3:

$$\{0\}x_1+\{0\}x_2+\{1\}x_3+\left\{\frac{1}{2}\right\}x_4+\left\{-\frac{3}{2}\right\}x_5+\{0\}x_6+\left\{\frac{3}{2}\right\}x_7\geq\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_7\geq\frac{1}{2}\Big/\times 2$$

$$x_4+x_5+x_7\geq 1$$

Каноническая форма (новое ограничение):

$$x_4+x_5+x_7-x_8=1$$

Добавим в таблицу 5.2 строку с последним ограничением и столбец x_8.

Таблица 5.3 – Новое опорное решение X_2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
x_2	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	2		
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$		$X_2=(3;2;\frac{1}{2};0;1;-\frac{3}{2}\;0;0)$
x_1	1	0	0	0	1	0	-1	0	3		$F_{max}=23$
x_5	0	0	0	1	$\boxed{1}$	0	1	-1	1		
F	0	0	0	1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	23		

Выполним итерацию с разрешающим элементом $a_{55}=1$. Получаем новое решение.

Таблица 5.4 – Новое опорное решение X_3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	0	0	1	2	0	0	3	$-\frac{3}{2}$	2		
x_2	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	2		
x_6	0	0	0	1	0	1	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0		X_3=(2;2;2;0;1;0;0;0) F_{max} = 22
x_1	1	0	0	-1	0	0	-2	1	2		
x_5	0	0	0	1	1	0	1	-1	1		
F	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	1	22		

Одна из оценок отрицательная, значит, последнее решение можно улучшить.

Разрешающий столбец x_7, разрешающая строка x_6 (по наименьшему симплексному отношению). Получаем новое опорное решение таблица 5.5.

Таблица 5.5 – Новое опорное решение X_4

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Решение
x_3	0	0	1		0		0	$-\frac{3}{2}$	2		
x_2	0	1	0		0		0	0	2		
x_6	0	0	0		0		1	$-\frac{3}{2}$	0		X_4=(2;2;2;0;1;0;0;0) F_{max} = 22
x_1	1	0	0		0		0	1	2		
x_5	0	0	0		1		0	-1	1		
F	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	22		

В строке оценок нет отрицательных, значит, оптимальное решение найдено при условии целочисленности переменных:

$X_{опт}$=(2;2;2;0;1;0;0), F_{max}=22

5.3 Экономико-математическое истолкование решения

Для того, чтобы получить максимальную прибыль в размере 22 денежных единиц от реализации продукции, необходимо из имеющегося количества материалов изготовить 2 изделия вида А, 2 изделия вида В и 2 изделия вида С. При этом материал первого и третьего видов будут израсходованы полностью (x_4=0, x_6=0), а материал второго вида останется в количестве 1 единицы.

Самостоятельно проведите анализ оптимального решения и значения целевой функции с учетом целочисленности и без учета целочисленности.

6 Решение транспортной задачи методом потенциалов.

6.1 Основные теоретические сведения

6.1.1 Постановка транспортной задачи

Пусть в пунктах отправления A_1, A_2, …, A_m находится однородный груз (лес, пиломатериалы, уголь и т.д.) в количествах соответственно a_1, a_2, …, a_m, который должен быть доставлен n потребителям B_1, B_2, …, B_n, в количествах b_1, b_2, …, b_n. Задана матрица $\left\|C_{ij}\right\|_{m*n}$, где C_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j. Требуется составить такой план перевозок, при котором суммарная стоимость перевозок минимальна.

Такую задачу называют транспортной задачей по критерию стоимости.

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме спроса всех продуктов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В этом случае транспортная задача называется закрытой.

Для составления математической модели транспортной задачи обозначим через x_{ij} – количество перевозимого груза, из пункта A_i в пункт B_j. Из реального смысла $x_{ij} \geq 0$.

Общие суммарные затраты на перевозку груза можно представить целевой функцией:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (6.1)$$

Так как спрос всех пунктов потребления должен быть удовлетворен за счет распределения всего продукта, сосредоточенного в пунктах отправления, то переменные должны удовлетворять ограничениям и условиям неотрицательности:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \\ (\text{ограничения по запасам}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \\ (\text{ограничения по потребностям}) \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ m; \quad j = 1,\ \ldots,\ n \tag{6.3}$$

Условия (6.2) образуют систему ограничений транспортной задачи.

Допустимым решением (планом перевозки) транспортной задачи называется матрица $X = \|x_{ij}\|_{m*n}$, - элементы которой X_{ij} удовлетворяют системе (6.2) и условиям (6.3).

Таким образом, математически транспортную задачу можно сформулировать следующим образом. Даны целевая функция (6.1), система ограничений (6.2) и условия (6.3). Требуется найти допустимое решение, минимизирующее целевую функцию.

6.1.2 Нахождение исходного опорного решения

6.1.2.1 Метод «северо-западного угла»

Метод потенциалов решения транспортной задачи состоит в последовательном улучшении опорных решений.

Исходные данные транспортной задачи представим в виде распределительной таблицы – таблица 6.1.

Таблица 6.1 – Исходный план перевозок

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_{n-1}	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n-1}	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n-1}	c_{2n}
…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m1}	…	c_{mn-1}	c_{mn}

Будем искать исходное опорное решение методом «северо-западного угла». Заполним таблицу 6.1, начиная с верхнего левого угла: в клетку (1.1) занесем $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. Если же $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый столбец «закрыт», то есть потребности первого потребителя удовлетворены полностью. В клетку (1.2) записываем $x_{12} = \min\{a_1 - b_1; b_2\}$. Если $b_1>a_1$, то аналогично «закрывается» первая строка и далее переходим к заполнению соседней клетки (2.1), куда заносим $x_{21} = \min\{a_2; b_1 - a_1\}$. Будем продолжать до тех пор, пока не исчерпаются все ресурсы a_i и все потребности b_j.

Незаполненным клеткам таблицы поставим в соответствие нулевые значения свободных переменных, а заполненным клеткам (i, j) - значение базисных переменных x_{ij}. Полученной таблице соответствует матрица $x_0 = \|x_{ij}\|_{min}$, у которой число ненулевых элементов равно m+n-1, а остальные элементы равны 0. Матрица x_0 является исходным опорным решением транспортной задачи.

Замечание 6.1.1: число заполненных клеток в опорном решении должно быть равно r=m+n-1. Если их окажется меньше, тогда в свободную клетку заносится «базисный» нуль, она считается занятой, а соответствующая ей переменная – базисной. При этом необходимо следить за тем, чтобы в опорном решении заполненные клетки не образовывали замкнутого цикла, то есть такого набора заполненных клеток (таблица 1), в котором две и только две клетки расположенные в одной строке или одном столбце, и последняя клетка набора лежит в той же строке, что и первая.

6.1.2.2 Метод минимальных элементов.

Суть метода состоит в том, что в матрице стоимостей $C = \|c_{ij}\|$ выбирается стоимость минимальной перевозки c_{ij}. Затем назначается максимальный объем ресурса от производителя i к потребителю j для данной перевозки. При этом возможны три варианта:

1. Производитель i имеет ресурса больше, чем надо потребителю j.

2. В этом случае удовлетворяется полностью заявка потребителя j, а остаток произведенного ресурса будет распределен после. Так как потребность потребителя j удовлетворена полностью, то исключается из рассмотрения столбец матрицы стоимости, принадлежащий j-му потребителю;

3. Производитель i имеет ресурса меньше, чем надо потребителю j.

В этом случае весь имеющийся ресурс производителя i назначается потребителю j. Недостающая часть ресурса потребителю j будет назначена потом. Так как весь ресурс производителя i исчерпан полностью, то из рассмотрения удаляется строка матрицы стоимости, принадлежащая производителю i;

Производитель i имеет ресурса столько, сколько необходимо потребителю j.

В этом случае, аналогично рассмотренным выше случаям, из рассмотрения удаляется и строка, и столбец матрицы стоимости.

Затем из матрицы стоимостей выбирается следующая минимальная стоимость перевозки ресурса от производителя к потребителю, удовлетворяются потребности следующего потребителя ресурса (полностью или частично) и удаляется из рассмотрения очередная строка или столбец матрицы стоимостей. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет распределен полностью весь произведенный ресурс между всеми потребителями. Так как ресурса произведено ровно столько, сколько нужно потребителям, то задача распределения будет обязательно выполнена.

6.1.3 Проверка опорного решения на оптимальность и улучшение решения

Каждому пункту отправления A_i ставится в соответствие потенциал α_i, а пункту назначения B_j - потенциал β_j. Значение потенциалов α_i и β_j находятся из системы m+n-1 уравнений

$$c_{ij}+\alpha_i-\beta_j \tag{6.4}$$

составленной для базисных переменных x_{ij}. Далее вычисляются оценки свободных переменных Δ_{st} по формуле:

$$\Delta_{st}=c_{st}+\alpha_s-\beta_t \tag{6.5}$$

Если все $\Delta_{st}\geq 0$, то соответствующее решение x_0 является оптимальным и задача решена.

Если же есть хотя бы одна отрицательная оценка Δ_{st}, то решение x_0 не будет оптимальным, его нужно улучшить. Для этого среди отрицательных оценок Δ_{st} выбирается наименьшая (среди нескольких равных выбирается любая), затем строится замкнутый цикл с вершиной в этой клетке.

Соединяя последовательно клетки цикла отрезками прямой, получим замкнутую ломаную линию, каждый отрезок которой лежит либо в строке, либо в столбце и только одна из вершин этой ломанной лежит в свободной клетке. Свободной клетке цикла приписывается знак «+», остальным вершинам – чередующиеся знаки.

Среди x_{ij}, соответствующих отрицательных вершин, отыскивается $\lambda = \min\{x_{ij}\}$. Это число λ прибавляется к клеткам со знаком «+», включая свободную, и вычитается из клеток со знаком «-». В результате перемещения числа λ по клеткам замкнутого цикла, получается новое решение x_1 , которое снова исследуется на оптимальность.

Замечание 6.1.2: потенциалы, как и циклы для каждого решения определяются заново.

Замечание 6.1.3: если при перемещении числа λ по циклу освободятся сразу несколько клеток, то одну из освободившихся клеток, которой соответствует наибольшая стоимость перевозок c_{ij}, оставляют свободной, а другие заполняют «базисными» нулями.

6.1.4 Алгоритм решения закрытой транспортной задачи методом потенциалов

Решение транспортной задачи проводится по следующей схеме:

1. Исходные данные задачи располагают в распределительной таблице (таблица 5.1).

2. Строят исходное опорное решение.

3. Вычисляют потенциалы α_i и β_j для поставщиков и потребителей.

4. Вычисляют оценки свободных переменных Δ_{st}. Если $\Delta_{st} \geq 0$ для свободных клеток, то полученное решение оптимально, если хотя бы одна $\Delta_{st} \leq 0$, то для соответствующей клетки строят цикл пересчета и получают новый план перевозки.

Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получен план, для которого все оценки $\Delta_{st} \geq 0$.

6.2 Решение типовой транспортной задачи.

Имеются три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и четыре пункта потребления этого груза B_1, B_2, B_3, B_4. В пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз соответственно в количестве 150, 400, 650 единиц (тонн). В пункты B_1, B_2, B_3, B_4 требуется доставить соответственно 300, 550, 150, 200 тонн груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j приведена в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты на перевозки были наименьшими.

Решение:

1. Поместим исходные данные в распределительную таблицу (таблица 6.2)

Таблица 6.2 – Распределительная таблица

a_i \ b_j	300	550	150	200
150	3	6	5	2
400	1	4	3	1
650	4	3	1	2

Проверим условие разрешимости транспортной задачи.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 150 + 400 + 650 = 1200$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 300 + 550 + 150 + 200 = 1200$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, значит транспортная задача является закрытой.

2. Построение математической модели транспортной задачи.

Составим математическую модель задачи. Обозначим X_{ij} количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.

Система ограничений состоит из условий вывоза и условий ввоза груза.

Условия вывоза:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 650 \end{cases} \qquad (6.6)$$

Условия вывоза:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300 \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 550 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 150 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200 \end{cases} \qquad (6.7)$$

Условия не отрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (6.8)$$

Целевой функцией F являются суммарные затраты на перевозку груза:

$$F = 3x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 3x_{32} + x_{33} + 2x_{34} \to \min \qquad (6.9)$$

Требуется найти такое решение X, которое удовлетворяет системам ограничений (6.6) и (6.7), условиям не отрицательности (6.8) и минимизируют функцию (6.9).

3. Построение исходного опорного решения.

Построим исходное опорное решение методом «северо-западного угла» (таблица 6.3).

Таблица 6.3 – Исходное опорное решение

	b_j	300	550	150	200
a_i	**α_i β_j**	**β_1=3**	**β_2=6**	**β_3=4**	**β_4=5**
150	**α_1=0**	-150 ^{3}	^{6}	^{5}	+ ^{2}
400	**α_2=2**	+150 ^{1}	-250 ^{4}	^{3}	- ^{1}
650	**α_3=3**	^{4}	+300 ^{3}	150 ^{1}	-200 ^{2}

Для этого плана перевозок транспортные расходы составят:

$$F = 3 \cdot 150 + 1 \cdot 150 + 4 \cdot 250 + 3 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 200 = 2750\,(\text{д. е.})$$

Число заполненных клеток $ч = 3 + 4 - 1 = 6$.

4. Проверка плана на оптимальность.

Проверим план на оптимальность.

Составим систему уравнений для определения потенциалов по формуле (6.10).

$$C_{ij} + \alpha_i - \beta_j = 0 \qquad (6.10)$$

Для заполненных клеток:

$$\begin{array}{ll}
3 + \alpha_1 - \beta_1 = 0 & \alpha_1 = 0, \\
1 + \alpha_2 - \beta_1 = 0 & \alpha_2 = 2, \\
4 + \alpha_2 - \beta_2 = 0 & \alpha_3 = 3, \\
3 + \alpha_3 - \beta_2 = 0 & \beta_1 = 3, \beta_2 = 6, \\
1 + \alpha_3 - \beta_3 = 0 & \beta_3 = 4, \\
2 + \alpha_3 - \beta_4 = 0 & \beta_4 = 5
\end{array}$$

Вычислим оценки $\boldsymbol{\Delta_{st}}$ для свободных переменных по формуле (6.11).

$$\Delta_{st} = C_{ij} + \alpha_i - \beta_j \qquad (6.11)$$

Для незаполненных клеток:

$$\Delta_{12} = 6 + 0 - 6 = 0, \quad \Delta_{13} = 5 + 0 - 4 = 1, \quad \Delta_{14} = 2 + 0 - 5 = 3,$$
$$\Delta_{23} = 3 + 2 - 4 = 1, \quad \Delta_{24} = 1 + 2 - 5 = -2, \quad \Delta_{31} = 4 + 3 - 3 = 4.$$

Среди оценок есть отрицательные, следовательно, полученное решение не является оптимальным и значение целевой функции $F = 2750\,(\text{д. е.})$ можно уменьшить.

Из отрицательных оценок выбираем наименьшую: $\Delta_{24} = -2$. Если наименьших несколько одинаковых, то выбираем любую.

Для клетки (1, 4) строим замкнутый цикл пересчета (таблица 5.3).

Вершинам цикла приписываем знаки «+» или «–». Вычисляем число λ: $\lambda_1 = \min\{150; 250; 200\} = 150$. Перемещаем число λ_1 по циклу: прибавим 200 в клетки со знаком «+» и вычтем из клеток со знаком «–». Получим новую таблицу (новый план) – таблица6.4.

Таблица 6.4 – Новый опорный план

	b_j	300	550	150	200
a_i	α_i \ β_j	$\beta_1=0$	$\beta_2=3$	$\beta_3=1$	$\beta_4=2$
150	$\alpha_1=0$	^{3}	^{6}	^{5}	150 ^{2}
400	$\alpha_2=-1$	300 ^{1}	-100 ^{4}	^{3}	^{1}
650	$\alpha_3=0$	^{4}	+450 ^{3}	150 ^{1}	50 ^{2}

Для этого плана перевозок транспортные расходы составят:

$$F = 2\cdot 150 + 1\cdot 300 + 4\cdot 100 + 3\cdot 450 + 1\cdot 150 + 2\cdot 50 = 2600\,(\textbf{д. е.})$$

Транспортные расходы уменьшились.

Проверим последний план на оптимальность. Найдем потенциалы $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$ из системы уравнений:

$$\begin{array}{ll} 2+\alpha_1-\beta_4=0 & \alpha_1=0, \\ 1+\alpha_2-\beta_1=0 & \alpha_2=-1, \\ 4+\alpha_2-\beta_2=0 & \alpha_3=0, \\ 3+\alpha_3-\beta_2=0 & \beta_1=0, \beta_2=3, \\ 1+\alpha_3-\beta_3=0 & \beta_3=1, \\ 2+\alpha_3-\beta_4=0 & \beta_4=2 \end{array}$$

Вычислим оценки $\boldsymbol{\Delta_{st}}$ для свободных переменных:

$$\Delta_{11}=3+0-0=3,\quad \Delta_{12}=6+0-3=3,\quad \Delta_{13}=5+0-1=4,$$
$$\Delta_{23}=3-1-1=1,\quad \Delta_{24}=1-1-2=-2,\quad \Delta_{31}=4+0-0=4.$$

Оценка $\Delta_{24}=-2<0$, поэтому это решение не является оптимальным. Построим для клетки (2, 4) замкнутый цикл.

Вычислим $\lambda_2=\min\{100;50\}=50$. Перемещаем число λ_2=50 по циклу, прибавляя в клетках со знаком «+», вычитая в клетках со знаком «–».

Получаем новый план – таблица 6.5.

Таблица 6.5 – Новое опорное решение

	b_j	300	550	150	200
a_i	α_i \ β_j	$\beta_1=2$	$\beta_2=5$	$\beta_3=3$	$\beta_4=2$
150	$\alpha_1=0$	^{3}	^{6}	^{5}	150 ^{2}
400	$\alpha_2=1$	300 ^{1}	50 ^{4}	^{3}	50 ^{1}
650	$\alpha_3=2$	^{4}	500 ^{3}	150 ^{1}	^{2}

Для этого плана перевозок транспортные расходы составляют:

$$F = 2\cdot150 + 1\cdot300 + 4\cdot50 + 1\cdot50 + 3\cdot500 + 1\cdot150 = 2500\,(\text{д. е.})$$

Снова проверяем план на оптимальность.

Найдем потенциалы $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$ из системы уравнений:

$$\begin{array}{ll}
2+\alpha_1-\beta_4=0 & \alpha_1=0,\\
1+\alpha_2-\beta_1=0 & \alpha_2=1,\\
4+\alpha_2-\beta_2=0 & \alpha_3=2,\\
1+\alpha_2-\beta_4=0 & \beta_1=2, \beta_2=5,\\
3+\alpha_3-\beta_2=0 & \beta_3=3,\\
1+\alpha_3-\beta_3=0 & \beta_4=2
\end{array}$$

Вычисляем оценки $\boldsymbol{\Delta_{st}}$:

$$\Delta_{11}=3+0-2=1,\quad \Delta_{12}=6+0-5=1,\quad \Delta_{13}=5+0-3=2,$$
$$\Delta_{23}=3+1-3=1,\quad \Delta_{31}=4+2-2=4,\quad \Delta_{34}=2+2-2=2.$$

Среди оценок нет отрицательных, поэтому полученное решение оптимальное.

5. Построение исходного опорного решения методом «минимального элемента»

Решим задачу, используя метод «минимального элемента» при построении исходного опорного плана (таблица 6.6).

Таблица 6.6 – Исходное опорное решение

a_i \ b_j	**B₁** 300	**B₂** 550	**B₃** 150	**B₄** 200
A₁ 150	3	50 / 6	5	100 / 2
A₂ 400	300 / 1	4	3	100 / 1
A₃ 650	4	500 / 3	150 / 1	2

Выбираем клетку с наименьшими транспортными расходами. Если таких несколько, то выбираем любую. В нашем плане берем, например, клетку (2,1) и даем в нее поставку 300. Спрос потребителя B_1 удовлетворен, столбец B_1 вычеркиваем. Берем клетку (2,4) и отправляем туда остатки поставщика A_2 100 единиц. Ресурсы A_2 исчерпаны, строку A_2 вычеркиваем. Даем в клетку (3,3) 150 единиц груза, спрос потребителя B_3 удовлетворен, столбец B_3 вычеркиваем. Берем клетку с минимальной стоимостью, например, (1,4) и даем 100 единиц груза. Спрос B_4 удовлетворен, столбец B_4 вычеркиваем. Берем клетку (3,2) и даем туда 500 единиц груза, ресурс A_3 исчерпан, строку A_3 вычеркиваем. У A_1 осталось 500 единиц груза, отдаем их в клетку (1,2), строку A_1 и столбец B_2 вычеркиваем.

Проверим полученный план на оптимальность.

$$F = 6 \cdot 50 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 300 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 150 = 2550\,(\text{д. е.})$$

Найдем потенциалы $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$:

$$\begin{array}{ll} 6+\alpha_1-\beta_2=0 & \alpha_1=0, \\ 2+\alpha_1-\beta_4=0 & \alpha_2=1, \\ 1+\alpha_2-\beta_1=0 & \alpha_3=2, \\ 1+\alpha_2-\beta_4=0 & \beta_1=2, \beta_2=6, \\ 3+\alpha_3-\beta_2=0 & \beta_3=4, \\ 1+\alpha_3-\beta_3=0 & \beta_4=2 \end{array}$$

Вычислим оценки $\boldsymbol{\Delta_{st}}$:

$$\Delta_{11}=3+0-2=1, \quad \Delta_{13}=5+0-4=1, \quad \Delta_{22}=4+1-6=-1,$$
$$\Delta_{23}=3+1-4=0, \quad \Delta_{31}=4+3-2=5, \quad \Delta_{34}=2+3-2=3.$$

Среди оценок одна отрицательная ($\Delta_{22}=-1$).

Для клетки (2,2) строим замкнутый цикл.

Вычислим $\lambda_1=\min\{50;100\}=50$. Перемещаем λ_1=50 по циклу, прибавляя в клетках со знаком «+», вычитая в клетках со знаком «–», получаем новый опорный план (таблица 6.7).

Таблица 6.7 – Новый опорный план

	b				
	$\mathbf{b_j}$	300	550	150	200
$\mathbf{a_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$ \ $\boldsymbol{\beta_j}$	$\boldsymbol{\beta_1}$=	$\boldsymbol{\beta_2}$=	$\boldsymbol{\beta_3}$=	$\boldsymbol{\beta_4}$=
150	$\boldsymbol{\alpha_1}$=	3	6	5	150 2
400	$\boldsymbol{\alpha_2}$=	300 1	50 4	3	50 1
650	$\boldsymbol{\alpha_3}$=	4	500 3	150 1	2

Очевидно, что этот опорный план совпадает с оптимальным планом в пункте 4 (таблица 6.5), поэтому $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$ в таблице 6.7 не показаны.

6.3 Экономическое истолкование оптимального решения транспортной задачи

Дадим экономическое истолкование оптимального решения. Для того, чтобы затраты на перевозку груза и пунктов A_i в пункты B_j были наименьшими и составляли 2500 денежных единиц, необходимо отправить 150 тонн из A_1 в B_4; 300 тонн из A_2 в B_1; 50 тонн из A_2 в B_2; 50 тонн из A_2 в B_4; 500 тонн из A_3 в B_2; 150 тонн из A_3 в B_3.

Совершенно очевидно, что исходное опорное решение, построенное методом «минимального элемента» намного ближе к оптимальному плану, чем исходное опорное решение, построенное методом «северо-западного угла».

7 Вопросы для контроля

7.1 Вопросы для контроля к разделу 1 «Экономико-математические методы и модели»

1.Сформулируйте понятие моделирования.

2. Сформулируйте понятие математического моделирования.

3. Сформулируйте понятие математического программирования.

4.Дайте понятие математической модели.

5.Что образует математическую модель задачи?

6. Перечислите возможные критерии эффективности.

7.Что называется системой ограничений задачи программирования?

8. Сформулируйте понятие линейного программирования.

9. Почему переменные должны быть неотрицательными?

10. В каких случаях в системе ограничений используют знаки ≤ ?

11. В каких случаях в системе ограничений используют знаки ≥ ?

12. В каких случаях в системе ограничений используют знаки = ?

13.Какая функция называется целевой функцией?

14.Что значит решить задачу линейного программирования?

15.Что называется опорным решением задачи линейного программирования?

16. Что называется оптимальным решением задачи линейного программирования?

17. Перечислите основные классы экономико-математических моделей.

7.2 Вопросы для контроля к разделу 2 «Графический метод решения задачи линейного программирования »

1. Что называется областью допустимых решений задачи линейного программирования?

2. Какой вид может иметь область допустимых решений?

3.Сформулируйте порядок нахождения (построения) области допустимых решений.

4. Что называется вектором – градиентом?

5. Какая прямая называется опорной?

6. Как геометрически истолковать задачу линейного программирования?

7.В какой точке многоугольника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального решения?

8. Какое значение может принимать целевая функция в зависимости от области допустимых решений задач линейного программирования?

9. В каком пространстве применяется графический метод решения задачи линейного программирования?

10.Как определить полуплоскость соответствующую неравенству, имеющему знак $\leq$?

11. Как определить полуплоскость соответствующую неравенству, имеющему знак $\geq$?

12. Как определить координаты угловой точки многоугольника решений?

7.3 Вопросы для контроля к разделу 3 «Симплексный метод » и к разделу 4 «Двойственность в линейном программировании»

1. Сформулируйте основную идею симплексного метода решения задачи линейного программирования (ЗЛП).

2. Какие этапы включает в себя симплексный метод?

3. Каким требованиям должна удовлетворять математическая модель ЗЛП для решения ее симплексным методом?

4. Дайте определение оптимального решения ЗЛП и укажите его геометрический смысл.

5. Какое из решений X_1 и X_2 является лучшим для задачи при $F \to \max$, если $F(x_1) < F(x_2)$?

6. Какое из решений X_1 и X_2 является лучшим для задачи при $F \to \min$, если $F(x_1) < F(x_2)$?

7. Как заполняется симплексная таблица?

8. По каким правилам преобразуются элементы в симплексной таблице при переходе к новой симплексной таблице?

9. Как вычислить оценки свободных переменных в целевой функции ЗЛП по симплексной таблице?

10. Какой экономический смысл имеют оценки свободных переменных?

11. Как по симплексной таблице определить, что имеющееся опорное решение не является оптимальным, но его можно улучшить?

12. Как выбирается разрешающий элемент для улучшения опорного решения ЗЛП при $F \to \max$?

13. Как проверить правильность расчетов элементов на каждом этапе построения симплексной таблицы?

14. В каком случае ЗЛП не имеет оптимального решения?

15. Как по симплексной таблице определить, что ЗЛП не имеет оптимального решения?

16. Какие преобразования называются симплексными?

17. Почему нужно сохранять не отрицательность свободных членов в симплексных таблицах?

18. Поясните правила составления двойственных задач.

19. Дайте математическую постановку прямой ЗЛП и двойственной к ней об использовании сырья для производства продукции нескольких видов.

20. Каковы интересы предприятия – продавца и предприятия – покупателя?

21. Каков экономический смысл двойственных переменных y_i в задачах о ценах на ресурсы?

22. Почему неравенства в двойственной задаче имеют знак $\geq$?

23. Какие двойственные задачи называются симметричными?

24. Как определить дефицитные и недефицитные ресурсы?

25. Как по оптимальному решению одной из ЗЛП найти оптимальное решение двойственной к ней?

7.4 Вопросы для контроля к разделу 6 «Решение транспортной задачи методом потенциалов»

1. Дайте экономическую постановку транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости.

2. Какая транспортная задача называется закрытой?

3. Какая транспортная задача называется открытой?

4. Сколько переменных содержит математическая модель закрытой ТЗ?

5. Что означает экономически условие $\sum a_i < \sum b_j$?

6. Что означает экономически условие $\sum b_j < \sum a_i$?

7. Опишите правило преобразования открытой модели ТЗ в закрытую, если $\sum a_i < \sum b_j$?

8. Опишите правило преобразования открытой модели ТЗ в закрытую, если $\sum b_j < \sum a_i$?

9. Какой план перевозок ТЗ называется опорным?

10. Как проверить, будет ли план перевозок ТЗ опорным решением?

11. Опишите построение исходного опорного плана перевозок методом «северо-западного угла»?

12. Сколько заполненных клеток должно быть в распределительной таблице и как этого достичь?

13. Опишите построение исходного опорного плана перевозок методом «минимального элемента»?

14. Опишите сущность метода потенциалов нахождения оптимального плана перевозок к ТЗ?

15. Сформулируйте признак оптимальности плана перевозок ТЗ, решаемой методом потенциалов.

16. С какой целью строится цикл пересчета?

17. Как строится цикл пересчета?

18. Как определяется наименьшая загрузка свободной клетки, с помощью которой происходит перемещение груза по циклу?

19. Запишите формулу для определения потенциалов в ТЗ.

20. Запишите формулу для вычисления оценок свободных переменных в ТЗ.

21. Как вычислить изменение значения целевой функции при улучшении плана перевозок?

22. Какое экономическое истолкование потенциалов $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$ в ТЗ?

23. Какое экономическое истолкование потенциалов $\boldsymbol{\Delta_{st}}$ в ТЗ?

Заключение

Математика необходима в повседневной жизни, следовательно, определенные математические навыки нужны каждому человеку. Математические знания и навыки нужны практически во всех профессиях, прежде всего, конечно, в тех, что связаны с естественными науками, техникой, экономикой.

Важнейшей задачей математического образования является воспитание в человеке способности понимать смысл поставленной перед ним задачи, умении правильно, логично рассуждать, усвоить навыки алгоритмического мышления, уметь пользоваться готовыми приемами, учиться думать самому.

Математические методы и модели хорошо известны, распространены и используются под различными «вывесками» – математические методы в принятии решений; методы исследования операций; экономико-математические методы; методы экономической кибернетики и прочее. Совокупность прикладных математических методов, используемых для решения практических организационных задач, называются исследованием операций. Главный метод исследования операций – системный анализ целенаправленных действий (операций) и объективная количественная сравнительная оценка возможных результатов этих действий.

Например, расширение выпуска продукции на заводе требует одновременного и взаимосвязанного решения множества частных проблем: реконструкции предприятия, заказа оборудования, сырья и материалов, подготовки рынка сбыта, совершенствования технологии, изменения системы оперативно-производственного планирования и диспетчирования, организационной перестройки, перемещения руководящих работников и т.д. При анализе возможных последствий принимаемых решений приходится учитывать такие факторы, как неопределенность, случайность и риск. К решению таких задач привлекают социологов, инженеров, экономистов, статистов, математиков. Поэтому очень важно, чтобы будущие специалисты владели математическими методами.

Список использованных источников

Основные источники

1 Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 7-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2019. – 398 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373 – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-02736-9. – Текст : электронный.

Дополнительные источники:

2 Шапкин, А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию : учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 9-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 432 с. : ил. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573151). – Библиогр.: с. 428. – ISBN 978-5-394-03710-8. – Текст : электронный.

Интернет – ресурсы:

3 http: // www.math test.ru.
4 http: // www.webmath.ru.
5 http: // e - scince.ru.
6 http: // mathem lib.ru.